

SUPER-TWISTING ALGORITHM MULTIVARIÁVEL PARA UMA CLASSE DE SISTEMAS COM MATRIZ DE ENTRADA INCERTA

PAULO VICTOR N. M. VIDAL*, EDUARDO V. L. NUNES*, LIU HSU*

*Programa de Eng. Elétrica, COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro

Emails: paulovictornmv@poli.ufrj.br, eduardo@coep.ufrj.br, liu@coep.ufrj.br

Abstract— In this paper, we propose a new design for a recently proposed multivariable super-twisting algorithm in order to deal with MIMO systems with uncertain symmetric positive definite input matrix. Global finite-time convergence properties are demonstrated using a Lyapunov approach. In addition, motivated by the problem of stabilizing the motion of a satellite, a nonlinear state-dependent time scaling is used to obtain a modified algorithm based on variable gains which is able to present global finite-time convergence properties in the presence of a wider class of nonlinear disturbances. Simulations illustrate the theoretical results.

Keywords— Super-twisting, higher-order sliding modes, multivariable control, uncertain systems.

Resumo— Neste artigo, é proposta uma nova implementação para um super-twisting algorithm multivariável recentemente proposto, permitindo lidar com sistemas MIMO com matriz de entrada incerta simétrica e positiva definida. Propriedades de convergência global em tempo finito são demonstradas utilizando uma abordagem de Lyapunov. Além disso, motivado pelo problema de estabilizar o movimento de um satélite, uma mudança não-linear e dependente do estado da escala de tempo é utilizada para obter um algoritmo modificado baseado em ganhos variáveis capaz de apresentar propriedades de convergência global em tempo finito na presença de uma classe maior de perturbações não-lineares. Simulações ilustram os resultados teóricos.

Palavras-chave— Super-twisting, modos deslizantes de ordem superior, controle multivariável, sistemas incertos.

1 Introdução

O Super-Twisting Algorithm (STA) (Levant, 1993) é um controlador por modos deslizantes de ordem superior que vem atraindo considerável atenção recentemente. Baseado em modos deslizantes de segunda ordem, este algoritmo destaca-se por fornecer convergência em tempo finito por meio de um sinal de controle contínuo sem a necessidade de se utilizar a derivada da variável de deslizamento. Inicialmente, a teoria do STA era baseada em métodos geométricos (Levant, 1993) ou em homogeneidade (Levant, 2005). Recentemente, a abordagem de Lyapunov foi introduzida por Moreno and Osorio (2008; 2012), o que permitiu novos avanços. No entanto, os trabalhos eram até então restritos a sistemas SISO.

Em alguns casos, é possível aplicar técnicas de controle SISO a sistemas multivariáveis considerando uma decomposição apropriada em malhas de controle SISO. Entretanto, essa abordagem desacoplada pode falhar se a interação entre as variáveis de estado do sistema for suficientemente forte. Para resolver esse problema, foi proposta em (Nagesh and Edwards, 2014) uma extensão multivariável para o STA baseada em controle vetorial unitário, obtida utilizando uma abordagem de Lyapunov similar à de Moreno and Osorio (2008; 2012). Embora uma classe de incertezas/perturbações seja considerada em (Nagesh and Edwards, 2014), é necessário o conhecimento completo da matriz de entrada do sistema para a implementação da lei de controle.

Este artigo representa uma tentativa preliminar de contornar a necessidade do conhecimento

exato da matriz de entrada do sistema para a implementação do STA multivariável. Aqui, o problema será restrito a sistemas com matriz de entrada simétrica e positiva definida. Usando uma abordagem de Lyapunov, mostra-se que são necessários apenas limitantes inferior e superior dos autovalores da matriz de entrada para que a lei de controle seja implementada. Além disso, motivado pelo problema do controle do movimento de um satélite, é proposta uma modificação para o STA multivariável baseada em ganhos variáveis. Para isso, é utilizada uma mudança de escala de tempo de modo que o novo algoritmo com ganhos variáveis possa ser tratado utilizando a mesma análise teórica desenvolvida para ganhos constantes. Assim, a estratégia modificada pode lidar com uma classe maior de incertezas/perturbações, e resultados globais de estabilidade podem ser obtidos para casos em que apenas propriedades locais são garantidas com ganhos constantes.

2 Definição do Problema

Em sistemas de controle por modos deslizantes de segunda ordem, o objetivo é assegurar a convergência das trajetórias de estado para uma superfície de deslizamento $\sigma(x) = \dot{\sigma}(x) = 0$ especificada conforme o comportamento dinâmico desejado, sendo que $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado de um sistema dinâmico e $\sigma : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ é a variável de deslizamento. Assuma que a dinâmica da variável de deslizamento seja descrita por

$$\dot{\sigma} = K_p[u + \gamma(t, \sigma)] + f(t), \quad (1)$$

onde $u \in \mathbb{R}^m$   a     de controle, $\gamma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ representa as incertezas do sistema, e $f \in \mathbb{R}^m$   uma perturbação variante no tempo absolutamente cont nu . Suponha que as seguintes hipóteses sejam satisfeitas:

(A1) A matriz de entrada constante K_p   simétrica e positiva definida, isto é, $K_p = K_p^T > 0$.

(A2) As seguintes desigualdades são satisfeitas:

$$\|\gamma(t, \sigma)\| \leq \delta_1 \|\sigma\|, \quad \|\phi(t)\| \leq \delta_2,$$

onde $\phi(t) = K_p^{-1} \frac{df(t)}{dt}$ e $\delta_1, \delta_2 \geq 0$. Isso implica que $f(t)$ possui derivada uniformemente limitada, e $\gamma(t, 0) = 0$.

(A3) A matriz de entrada K_p é incerta. Porém, limitantes superior (λ_M) e inferior (λ_m) para os autovalores de K_p são conhecidos.

O objetivo é projetar uma lei de controle u tal que a superfície de deslizamento $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ seja alcançada em tempo finito.

3 STA Multivariável com Ganhos Constantes

Para alcançar o objetivo, a extensão multivariável para o STA proposta em (Nagesh and Edwards, 2014)   considerada. A lei de controle é dada por

$$u = -k_1 \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 \sigma + \xi, \quad \dot{\xi} = -k_3 \frac{\sigma}{\|\sigma\|} - k_4 \sigma. \quad (2)$$

A principal vantagem desta extensão em relação à abordagem super-twisting convencional   que ela permite lidar com incertezas não-desacopladas e perturbações dependentes do estado, aumentando a robustez e ampliando a aplicabilidade do STA. Assim, a dinâmica do sistema em malha-fechada pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= -k_1 K_p \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 K_p \sigma + K_p z + K_p \gamma(t, \sigma), \\ \dot{z} &= -k_3 \frac{\sigma}{\|\sigma\|} - k_4 \sigma + \phi(t), \end{aligned} \quad (3)$$

onde $z = \xi + K_p^{-1} f(t)$. Note que, ao contrário do caso considerado em (Nagesh and Edwards, 2014), a matriz de entrada K_p não pode ser cancelada pela lei de controle, uma vez que é incerta e portanto não exatamente conhecida, o que torna o problema mais desafiador. Além disso, como estamos lidando com equações diferenciais com lado direito descontínuo, a definição de solução de Filippov é assumida (Filippov, 1964). O resultado principal é dado pelo teorema a seguir.

Teorema 1 *Considere o sistema (3), e suponha que as hipóteses (A1)-(A3) sejam satisfeitas. Se os ganhos k_1, k_2, k_3 , e k_4 forem escolhidos de acordo com (6)-(7), então a superfície de deslizamento $\dot{\sigma} = \sigma = 0$ será alcançada em tempo finito para quaisquer condições iniciais $[\sigma_0^T \ z_0^T]^T$.*

Prova: Considere a seguinte função candidata:

$$V = \left(2k_3 + \frac{k_1^2 \lambda_M}{2}\right) \|\sigma\| + \left(k_4 + \frac{k_2^2 \lambda_M}{2}\right) \sigma^T \sigma + z^T K_p z + k_1 k_2 \lambda_M \frac{\sigma^T \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 \sigma^T K_p z - k_1 \frac{z^T K_p \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}. \quad (4)$$

Note que no caso em que K_p é a matriz identidade e $\lambda_M = \lambda_m = 1$, a função candidata (4)   equivalente à proposta em (Nagesh and Edwards, 2014).   fácil verificar que $V(\sigma, z)$ é positiva definida e radialmente ilimitada, uma vez que

$$V \geq 2k_3 \|\sigma\| + k_4 \sigma^T \sigma + \frac{1}{2} z^T K_p z + \frac{1}{2} \zeta^T K_p \zeta,$$

onde $\zeta = k_1 \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + k_2 \sigma - z$. Além disso, a função   cont nu  em todo ponto, e diferenciável em todo ponto com exceção do subespaço $\mathcal{S} = \{(\sigma, z) \in \mathbb{R}^{2m} | \sigma = 0\}$. Derivando (4) ao longo das soluções do sistema, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \left(2k_3 + \frac{k_1^2 \lambda_M}{2}\right) \frac{\sigma^T \dot{\sigma}}{\|\sigma\|} + (2k_4 + k_2^2 \lambda_M) \sigma^T \dot{\sigma} \\ &+ 2z^T K_p \dot{z} + \frac{3}{2} k_1 k_2 \lambda_M \frac{\sigma^T \dot{\sigma}}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 (z^T K_p \dot{\sigma} + \sigma^T K_p \dot{z}) \\ &- k_1 \frac{z^T K_p \dot{\sigma}}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_1}{2} \frac{(z^T K_p \sigma)(\sigma^T \dot{\sigma})}{\|\sigma\|^{\frac{3}{2}}} - k_1 \frac{\sigma^T K_p \dot{z}}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Ent o, segue que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -k_1 \left(k_3 + \frac{k_1^2 \lambda_M}{2}\right) \frac{\sigma^T K_p \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{3}{2}}} - k_2 \left(k_3 + \frac{k_1^2 \lambda_M}{2}\right) \frac{\sigma^T K_p \sigma}{\|\sigma\|} \\ &+ \frac{k_1^2 \lambda_M}{2} \frac{\sigma^T K_p z}{\|\sigma\|} - k_1 k_2 \lambda_M \frac{\sigma^T K_p \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{3}{2}}} - k_2^2 \lambda_M \sigma^T K_p \sigma \\ &+ k_2^2 \lambda_M \sigma^T K_p z - k_1 k_4 \frac{\sigma^T K_p \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 k_4 \sigma^T K_p \sigma \\ &- \frac{3k_1 k_2 \lambda_M}{2} \frac{\sigma^T K_p \sigma}{\|\sigma\|} - \frac{3k_1 k_2^2 \lambda_M}{2} \frac{\sigma^T K_p \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{3}{2}}} + \frac{3k_1 k_2 \lambda_M}{2} \frac{\sigma^T K_p z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\ &+ k_1 k_2 \frac{z^T K_p^2 \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{3}{2}}} + k_2^2 \sigma^T K_p^2 z - k_2 z^T K_p^2 z + k_1^2 \frac{z^T K_p^2 \sigma}{\|\sigma\|} \\ &+ k_1 k_2 \frac{z^T K_p^2 \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{3}{2}}} - k_1 \frac{z^T K_p^2 z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_2^2}{2} \frac{(z^T K_p \sigma)(\sigma^T K_p \sigma)}{\|\sigma\|^3} \\ &- \frac{k_1 k_2}{2} \frac{(z^T K_p \sigma)(\sigma^T K_p \sigma)}{\|\sigma\|^{\frac{3}{2}}} + \frac{k_1}{2} \frac{(z^T K_p \sigma)(\sigma^T K_p z)}{\|\sigma\|^{\frac{3}{2}}} \\ &+ \left(2k_3 + \frac{k_1^2 \lambda_M}{2}\right) \frac{\sigma^T K_p \gamma}{\|\sigma\|} + (k_2^2 \lambda_M + 2k_4) \sigma^T K_p \gamma \\ &+ 2z^T K_p \phi + \frac{3k_1 k_2 \lambda_M}{2} \frac{\sigma^T K_p \gamma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 z^T K_p^2 \gamma - k_2 \sigma^T K_p \phi \\ &- k_1 \frac{z^T K_p^2 \gamma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_1}{2} \frac{(z^T K_p \sigma)(\sigma^T K_p \gamma)}{\|\sigma\|^{\frac{3}{2}}} - k_1 \frac{\sigma^T K_p \phi}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -k_1 \left(k_3 + \frac{k_1^2 \lambda_M}{2}\right) \frac{\sigma^T K_p \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{3}{2}}} - k_2 k_3 \frac{\sigma^T K_p \sigma}{\|\sigma\|} \\ &- 2\lambda_M k_1 k_2 \frac{\sigma^T K_p \sigma}{\|\sigma\|} + \frac{k_1^2 \lambda_M}{2} \frac{\sigma^T K_p z}{\|\sigma\|} - \frac{5k_1 k_2^2 \lambda_M}{2} \frac{\sigma^T K_p \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{3}{2}}} \\ &- k_1 k_4 \frac{\sigma^T K_p \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2^2 \lambda_M \sigma^T K_p \sigma - k_2 k_4 \sigma^T K_p \sigma \\ &+ k_2^2 \lambda_M \sigma^T K_p z + k_2^2 \sigma^T K_p^2 z + \frac{3k_1 k_2 \lambda_M}{2} \frac{\sigma^T K_p z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\ &+ 2k_1 k_2 \frac{\sigma^T K_p^2 z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 z^T K_p^2 z + k_1^2 \frac{z^T K_p^2 \sigma}{\|\sigma\|} - k_1 \frac{z^T K_p^2 z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{k_1^2}{2} \frac{(z^T K_p \sigma)(\sigma^T K_p \sigma)}{\|\sigma\|^3} - \frac{k_1 k_2}{2} \frac{(z^T K_p \sigma)(\sigma^T K_p \sigma)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \\
& + \frac{k_1}{2} \frac{(z^T K_p \sigma)(z^T K_p \sigma)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} + \left(2k_3 + \frac{k_1^2 \lambda_M}{2}\right) \frac{\sigma^T K_p \gamma}{\|\sigma\|} \\
& + (k_2^2 \lambda_M + 2k_4) \sigma^T K_p \gamma + 2z^T K_p \phi + \frac{3k_1 k_2 \lambda_M}{2} \frac{\sigma^T K_p \gamma}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \\
& - k_2 z^T K_p^2 \gamma - k_2 \sigma^T K_p \phi - k_1 \frac{z^T K_p^2 \gamma}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \\
& + \frac{k_1}{2} \frac{(z^T K_p \sigma)(\sigma^T K_p \gamma)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} - k_1 \frac{\sigma^T K_p \phi}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}}.
\end{aligned}$$

Considerando a Proposição 1 (ver o Apêndice) e os limitantes superiores da Hipótese (A2) para as perturbações $\|\gamma(t, \sigma)\| \leq \delta_1 \|\sigma\|$ e $\|\phi(t)\| \leq \delta_2$, pode ser verificado que

$$\begin{aligned}
\dot{V} & \leq -k_1 \left(k_3 + \frac{k_1^2 \lambda_M}{2}\right) \frac{\sigma^T K_p \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} - k_2 k_3 \frac{\sigma^T K_p \sigma}{\|\sigma\|} \\
& - 2\lambda_M k_1^2 k_2 \frac{\sigma^T K_p \sigma}{\|\sigma\|} + \frac{k_1^2 \lambda_M}{2} \frac{\sigma^T K_p z}{\|\sigma\|} - \frac{5k_1 k_2^2 \lambda_M}{2} \frac{\sigma^T K_p \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \\
& - k_1 k_4 \frac{\sigma^T K_p \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} - k_2^3 \lambda_M \sigma^T K_p \sigma - k_2 k_4 \sigma^T K_p \sigma \\
& + k_2^2 \lambda_M \sigma^T K_p z + k_2^2 \sigma^T K_p^2 z + \frac{3k_1 k_2 \lambda_M}{2} \frac{\sigma^T K_p z}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \\
& + 2k_1 k_2 \frac{\sigma^T K_p^2 z}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} - k_2 z^T K_p^2 z + k_1^2 \frac{z^T K_p^2 \sigma}{\|\sigma\|} - \frac{k_1}{2} \frac{z^T K_p^2 z}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \\
& - \frac{k_1^2}{2} \frac{(z^T K_p \sigma)(\sigma^T K_p \sigma)}{\|\sigma\|^3} - \frac{k_1 k_2}{2} \frac{(z^T K_p \sigma)(\sigma^T K_p \sigma)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \\
& + \lambda_M \left(2k_3 + \frac{k_1^2 \lambda_M}{2}\right) \delta_1 \|\sigma\| + \lambda_M (k_2^2 \lambda_M + 2k_4) \delta_1 \|\sigma\|^2 \\
& + 2\lambda_M \delta_2 \|z\| + \frac{3k_1 k_2 \lambda_M^2}{2} \frac{\delta_1 \|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} + k_2 \lambda_M^2 \delta_1 \|z\| \|\sigma\| \\
& + k_2 \lambda_M \delta_2 \|\sigma\| + k_1 \lambda_M^2 \delta_1 \|z\| \|\sigma\|^{\frac{1}{2}} + \frac{k_1 \lambda_M^2}{2} \frac{\delta_1 \|z\| \|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \\
& + k_1 \lambda_M \frac{\delta_2 \|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}},
\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\dot{V} & \leq -k_1 \lambda_m \left(k_3 + \frac{k_1^2 \lambda_M}{2}\right) \frac{\|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \\
& - \lambda_m (k_2 k_3 + 2\lambda_M k_1^2 k_2) \|\sigma\| + 2k_1^2 \lambda_M^2 \frac{\|z\| \|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \\
& - \lambda_m \left(\frac{5k_1 k_2^2 \lambda_M}{2} + k_1 k_4\right) \frac{\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} - \lambda_m (k_2 k_4 + k_2^3 \lambda_M) \|\sigma\|^2 \\
& + 2k_2^2 \lambda_M^2 \|\sigma\| \|z\| + 4k_1 k_2 \lambda_M^2 \frac{\|\sigma\| \|z\|}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} - k_2 \lambda_m^2 \|z\|^2 \\
& - \frac{k_1 \lambda_m^2}{2} \frac{\|z\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} + \lambda_m \left(2k_3 + \frac{k_1^2 \lambda_M}{2}\right) \delta_1 \|\sigma\| \\
& + \lambda_m (k_2^2 \lambda_M + 2k_4) \delta_1 \|\sigma\|^2 + 2\lambda_m \delta_2 \frac{\|z\| \|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \\
& + \frac{3k_1 k_2 \lambda_M^2 \delta_1}{2} \frac{\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} + k_2 \lambda_m^2 \delta_1 \|z\| \|\sigma\| + k_2 \lambda_m \delta_2 \|\sigma\| \\
& + \frac{3k_1 \lambda_M^2 \delta_1}{2} \|z\| \|\sigma\|^{\frac{1}{2}} + k_1 \lambda_m \delta_2 \frac{\|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}}.
\end{aligned}$$

Assim, definindo $\chi = \begin{bmatrix} \|\sigma\|^{\frac{1}{2}} & \|\sigma\| & \|z\| \end{bmatrix}^T$, tem-se

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \chi^T \Omega \chi - \chi^T \Psi \chi, \quad (5)$$

onde $\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & 0 & \Omega_{13} \\ 0 & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{13} & \Omega_{23} & \Omega_{33} \end{bmatrix}$ e $\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & 0 & \Psi_{13} \\ 0 & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ \Psi_{13} & \Psi_{23} & \Psi_{33} \end{bmatrix}$, com

elementos dados por

$$\begin{aligned}
\Omega_{11} & = \lambda_m \left(k_1 k_3 + \frac{k_1^3}{2} \lambda_M\right) - k_1 \lambda_M \delta_2, \\
\Omega_{13} & = -k_1^2 \lambda_M^2 - \lambda_M \delta_2, \\
\Omega_{22} & = \lambda_m \left(k_1 k_4 + \frac{5}{2} k_1 k_2^2 \lambda_M\right) - \frac{3}{2} k_1 k_2 \lambda_M^2 \delta_1, \\
\Omega_{23} & = -2k_1 k_2 \lambda_M^2, \quad \Omega_{33} = \frac{k_1}{2} \lambda_m^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{11} & = \lambda_m (k_2 k_3 + 2k_1^2 k_2 \lambda_M) - \lambda_M \left(2k_3 + \frac{k_1^2 \lambda_M}{2}\right) \delta_1 \\
& - k_2 \lambda_M \delta_2, \\
\Psi_{13} & = -\frac{3}{4} k_1 \lambda_M^2 \delta_1, \\
\Psi_{22} & = \lambda_m (k_2 k_4 + k_2^3 \lambda_M) - \lambda_M (k_2^2 \lambda_M + 2k_4) \delta_1, \\
\Psi_{23} & = -k_2^2 \lambda_M^2 - \frac{k_2}{2} \lambda_M^2 \delta_1, \quad \Psi_{33} = k_2 \lambda_m^2.
\end{aligned}$$

A prova apresentada aqui segue de perto os passos da prova apresentada em (Nagesh and Edwards, 2014). Entretanto, é considerada uma abordagem diferente para derivar as condições sobre os ganhos do controlador, de modo a assegurar que $\Omega = \Omega^T > 0$ e $\Psi = \Psi^T > 0$. A ideia é selecionar os ganhos de modo que os elementos diagonais e os determinantes de ambas as matrizes sejam positivos. O objetivo é obter relações mais diretas. Portanto, pode se verificar que $\Omega = \Omega^T > 0$ se

$$\begin{aligned}
k_1 & > \sqrt{\frac{2\delta_2}{\lambda_m}}, \quad k_2 > \frac{3}{5} \frac{\lambda_M}{\lambda_m} \delta_1, \quad k_4 > 16k_2^2 \frac{\lambda_M^4}{\lambda_m^3}, \\
k_3 & > 4k_1^2 \frac{\lambda_M^4}{\lambda_m^3} + 8 \frac{\lambda_M^3}{\lambda_m^3} \delta_2 + 4 \frac{\lambda_M^2}{\lambda_m^3} \frac{\delta_2^2}{k_1^2},
\end{aligned} \quad (6)$$

e que $\Psi = \Psi^T > 0$ se

$$\begin{aligned}
k_1 & > 0, \quad k_2 > \max \left\{ 2 \frac{\lambda_M}{\lambda_m} \delta_1, \delta_1 \sqrt{\frac{9}{14} \frac{\lambda_M^3}{\lambda_m^3}} \right\}, \\
k_3 & > \frac{k_2 \lambda_M \delta_2}{k_2 \lambda_m - 2\lambda_M \delta_1}, \\
k_4 & > \frac{3k_2^2 \lambda_M^4 \delta_1 + \frac{1}{2} k_2 \lambda_M^4 \delta_1^2 + k_2^3 \lambda_M (2\lambda_M^3 - \lambda_m^3)}{\lambda_m^2 (k_2 \lambda_m - 2\lambda_M \delta_1)}.
\end{aligned} \quad (7)$$

Considerando que os ganhos do controlador são escolhidos de modo a satisfazer as desigualdades (6)-(7), segue de (5) que

$$\dot{V} \leq -\frac{\lambda_{\min}(\Omega)}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \|\chi\|^2 - \lambda_{\min}(\Psi) \|\chi\|^2, \quad (8)$$

onde $\lambda_{\min}(\Omega), \lambda_{\min}(\Psi) > 0$ são os menores autovalores das matrizes simétricas e positivas definidas Ω e Ψ . Além disso, como a função (4) pode ser reescrita na forma $V(\sigma, z) = \bar{\chi}^T P \bar{\chi}$, onde

$$\bar{\chi} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^T}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} & \sigma^T & z^T \end{bmatrix}^T \text{ e } P = P^T > 0, \text{ tem-se}$$

$$\lambda_{\min}(P) \|\bar{\chi}\|^2 \leq V \leq \lambda_{\max}(P) \|\bar{\chi}\|^2,$$

onde $\|\bar{\chi}\| = \|\chi\|$ e $\lambda_{\min}(P), \lambda_{\max}(P) > 0$ são respectivamente o menor e maior autovalores da matriz P . Então, de (8) e do fato de que $\|\sigma\|^{\frac{1}{2}} \leq \|\chi\| \leq \frac{V^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}$, segue que

$$\dot{V} \leq -\alpha_1 V^{\frac{1}{2}} - \alpha_2 V, \quad (9)$$

$\forall(\sigma(t), z(t)) \in \mathbb{R}^{2m} \setminus \mathcal{S}$, onde

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{\lambda_{\min}(P)\lambda_{\min}(\Omega)}}{\lambda_{\max}(P)}, \quad \alpha_2 = \frac{\lambda_{\min}(\Psi)}{\lambda_{\max}(P)}.$$

De (9) e do fato de que as trajetórias do sistema em malha-fechada não podem permanecer em $\mathcal{S} \setminus \{0\}$, segue que $V(\sigma, z)$ é uma função continuamente decrescente. Logo, o Teorema de Lyapunov generalizado em (Deimling, 1992, Proposition 14.1) para inclusões diferenciais pode ser utilizado, como em (Gonzalez et al., 2012; Nagesh and Edwards, 2014), para concluir que o ponto de equilíbrio na origem $(\sigma, z) = 0$ e a superfície de deslizamento $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ são alcançados em tempo finito partindo de qualquer condição inicial. Além disso, resolvendo a equação de comparação

$$\dot{v} = -\alpha_1 v^{\frac{1}{2}} - \alpha_2 v, \quad v(t_0) \geq 0,$$

pode ser verificado que (σ, z) converge para zero no máximo após um intervalo de tempo finito

$$T_f = \frac{2}{\alpha_2} \ln \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} V^{\frac{1}{2}}(\sigma(t_0), z(t_0)) + 1 \right).$$

□

3.1 Resultados de Simulação

Considere o problema de estabilizar o movimento de um satélite controlador por propulsores, com dinâmica descrita pelas equações de corpo rígido não-lineares apresentadas em (Nagesh and Edwards, 2014; Sidi, 1997). O sistema é dado por

$$\dot{w} = J^{-1}(T + \bar{\gamma} - w \times Jw),$$

onde $T \in \mathbb{R}^3$ é o torque fornecido pelos propulsores, $J \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é uma matriz de inércia simétrica e positiva definida, $w \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade angular inercial do satélite, $\bar{\gamma} = \|w\|Jw$ é uma perturbação não-linear dependente do estado, e o símbolo $\times$ denota o produto vetorial. O objetivo é projetar T baseado no STA multivariável tal que a superfície de deslizamento $w = \dot{w} = 0$ seja alcançada em tempo finito, estabilizando o movimento do satélite. A lei de controle é definida como

$$T = -k_1 \frac{w}{\|w\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 w + \xi, \quad \dot{\xi} = -k_3 \frac{w}{\|w\|} - k_4 w. \quad (10)$$

A dinâmica em malha-fechada é então dada por

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -k_1 J^{-1} \frac{w}{\|w\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 J^{-1} w + J^{-1} z + J^{-1} \gamma(t, w), \\ \dot{z} &= -k_3 \frac{w}{\|w\|} - k_4 w, \end{aligned} \quad (11)$$

onde $\gamma(t, w) = \bar{\gamma} - w \times Jw$ e $z = \xi$. Note que a Hipótese (A2) não é globalmente válida, já que $\gamma(t, w)$ depende quadraticamente da norma de w . Considerando o caso local em que $\|w\| \leq 1$, tem-se

$$\|\gamma(t, w)\| \leq \frac{2}{\lambda_m} \|w\|^2 \leq \frac{2}{\lambda_m} \|w\|, \quad (\|w\| \leq 1), \quad (12)$$

onde λ_m é o autovalor mínimo de J^{-1} . Então, a Hipótese (A2) é válida localmente onde $\|w\| \leq 1$ para $\delta_1 = \frac{2}{\lambda_m}$ e $\delta_2 = 0$. Além disso, de (4) e do fato de que $V(w, z)$ é uma função continuamente decrescente do tempo, segue que $2k_3 \|w(t)\| \leq V(w, z) \leq V(w_0, z_0)$, $\forall t$. Logo, a Hipótese (A2) será válida $\forall t$ se as condições iniciais w_0 e z_0 satisfizerem $V(w_0, z_0) \leq 2k_3$.

Neste exemplo de simulação, é considerada uma matriz de inércia referente a um pequeno satélite (Goeree and Fasse, 2000), dada por

$$J = J_n + \kappa D, \quad (13)$$

onde

$$J_n = \begin{bmatrix} 2.7388 & -0.0031 & -0.0269 \\ -0.0031 & 2.7924 & 0.0136 \\ -0.0269 & 0.0136 & 2.1741 \end{bmatrix},$$

é a matriz de inércia nominal, e

$$D = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.04 & 0.04 \\ 0.04 & 0.05 & 0.04 \\ 0.04 & 0.04 & 0.05 \end{bmatrix}.$$

O termo κD representa a incerteza, com $\kappa \in [-3, 3]$. Para realizar as simulações considera-se o valor nominal de J , de modo que o valor real é $\kappa = 0$. Para satisfazer a Hipótese (A3), os seguintes limitantes para os autovalores de J^{-1} estão disponíveis para fins de controle, e são válidos considerando todas as matrizes de inércia obtidas variando κ no intervalo considerado: $\lambda_m = 0.3$ e $\lambda_M = 0.5$. Considerando as desigualdades (6)-(7), os ganhos do controlador são escolhidos como: $k_1 = 3$, $k_2 = 27$, $k_3 = 84$, e $k_4 = 27000$. Além disso, o método de Euler com passo 10^{-6} é utilizado para integração numérica.

A Fig. 1 mostra os resultados de simulação para $w(0) = [-0.002 \ -0.007 \ 0.03]^T$, e $z(0) = \xi(0) = 0$. Observe que o sinal de controle contínuo fornecido pelo torque permite a convergência em tempo finito da velocidade angular para zero, apesar da perturbação não-linear dependente do estado $\gamma(t, w)$ e do fato de que J^{-1} é incerta. Entretanto, neste caso, o resultado obtido é válido apenas localmente no espaço de estado. Isso é ilustrado pela Fig. 2, que mostra que o sistema se torna instável para condições iniciais $w(0) = [-1 \ -3.5 \ 15]^T$ e $z(0) = \xi(0) = 0$.

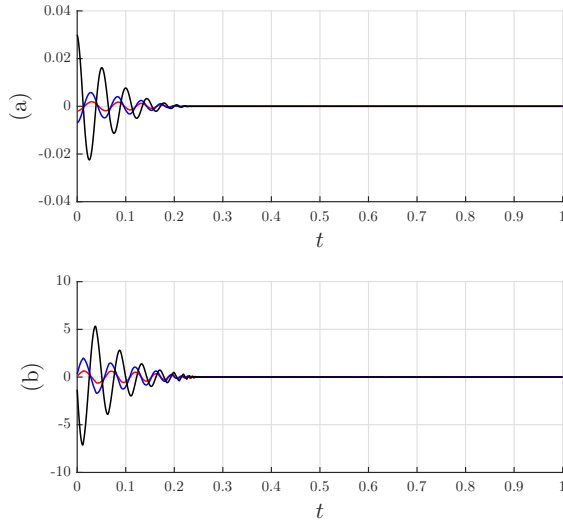


Figura 1: Performance do STA multivariável no controle de um s t lite com matriz de  rcia incerta e $w(0) = [-0.002 \ -0.007 \ 0.03]^T$: (a) componentes do vetor velocidade angular inercial (●) w_1 , (●) w_2 , (●) w_3 ; (b) componentes do vetor de torque (●) T_1 , (●) T_2 , (●) T_3 .

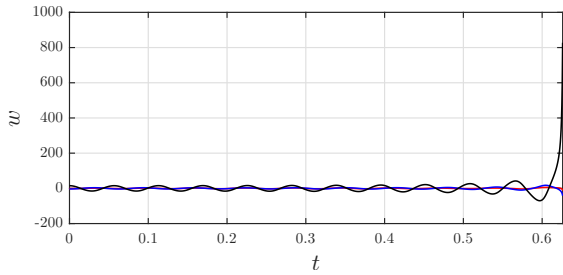


Figura 2: Performance do STA multivariável no controle de um s t lite com matriz de  rcia incerta e $w(0) = [-1 \ -3.5 \ 15]^T$: componentes do vetor velocidade angular inercial (●) w_1 , (●) w_2 , (●) w_3 .

4 STA Multivariável com Ganhos Variáveis

Para um resultado global, uma abordagem super-twisting modificada pode ser considerada, com lei de controle dada por

$$\begin{aligned} T &= (1 + \|w\|) \left[-k_1 \frac{w}{\|w\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 w + \xi \right], \\ \dot{\xi} &= (1 + \|w\|) \left[-k_3 \frac{w}{\|w\|} - k_4 w \right], \end{aligned}$$

que leva à seguinte dinâmica em malha-fechada:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= (1 + \|w\|) J^{-1} \left[-k_1 \frac{w}{\|w\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 w + z \right] + J^{-1} \gamma, \\ \dot{z} &= (1 + \|w\|) \left[-k_3 \frac{w}{\|w\|} - k_4 w \right]. \end{aligned}$$

Considerando uma mudança de escala de tempo dependente do estado (Hsu et al., 1999, Section

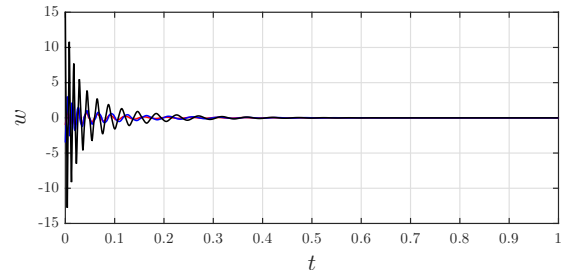


Figura 3: Performance do STA multivariável modificado no controle de um s t lite com matriz de  rcia incerta e $w(0) = [-1 \ -3.5 \ 15]^T$: componentes do vetor velocidade angular inercial (●) w_1 , (●) w_2 , (●) w_3 .

IV) definido por

$$dt = \frac{d\tau}{1 + \|w\|}, \quad \tau(t_0) = t_0,$$

tem-se a seguinte dinâmica em malha-fechada:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} &= J^{-1} \left[-k_1 \frac{w}{\|w\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 w + z + \gamma_\tau(t(\tau), w) \right], \\ \frac{dz}{d\tau} &= -k_3 \frac{w}{\|w\|} - k_4 w, \end{aligned}$$

onde $\gamma_\tau(t(\tau), w) = \frac{\gamma(t(\tau), w)}{1 + \|w\|}$. Na nova escala de tempo, a perturbação é limitada linearmente por $\|w\|$, um vez que

$$\|\gamma_\tau(t(\tau), w)\| \leq \frac{2\|w\|^2}{\lambda_m(1 + \|w\|)} \leq \frac{2}{\lambda_m} \|w\|,$$

e portanto a Hipótese (A2)   satisfeita globalmente no espaço de estado para $\delta_1 = \frac{2}{\lambda_m}$ e $\delta_2 = 0$.

O resultado de estabilidade na nova escala de tempo é equivalente ao da escala de tempo original se a nova variável de tempo crescer ilimitadamente com t (Liapunov et al., 1967, p. 149) (Hsu et al., 1999). Isso obviamente acontecerá se $\|\omega(t)\|$ for uniformemente limitada por alguma constante $\forall t \geq 0$, o que   verdade para qualquer condição inicial como consequência do fato de que $\dot{V}$   negativa definida, como demonstrado na análise anterior. Portanto, considerando os mesmos parâmetros de simulação e ganhos do controlador do exemplo de simulação anterior, o controlador modificado fornece convergência global e em tempo finito para a superfície de deslizamento $w = \dot{w} = 0$. A Fig. 3 mostra os resultados de simulação para o STA multivariável modificado considerando condições iniciais $w(0) = [-1 \ -3.5 \ 15]^T$ e $z(0) = \xi(0) = 0$.

5 Conclusões

Neste artigo, foi proposta uma nova implementação para o STA multivariável, permitindo lidar com sistemas MIMO com matriz de entrada

incerta simétrica e positiva definida. Utilizando uma abordagem de Lyapunov, foi mostrado que apenas o conhecimento de limitantes superior e inferior para os autovalores da matriz de entrada   necessário para o ajuste dos ganhos do controlador de modo a obter convergência global em tempo finito para a superfície de deslizamento. Além disso, motivado pelo problema de estabilizar o movimento de um s t lite controlado por propulsores, foi mostrado através de uma mudança de escala de tempo não-linear e dependente do estado que um STA multivariável modificado utilizando ganhos variáveis é capaz de garantir propriedades de convergência global em tempo finito para uma classe maior de incertezas/perturbações em relação ao algoritmo com ganhos constantes. Simulações ilustram os resultados teóricos obtidos.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado por FAPERJ, CAPES e CNPq.

Referências

- Deimling, K. (1992). *Multivalued Differential Equations*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, De Gruyter.
- Filippov, A. F. (1964). Differential equations with discontinuous right-hand side, *American Math. Soc. Translations* **42**(2): 199–231.
- Goeree, B. and Fasse, E. (2000). Sliding mode attitude control of a small satellite for ground tracking maneuvers, *American Control Conference, 2000. Proceedings of the 2000*, Vol. 2, pp. 1134–1138.
- Gonzalez, T., Moreno, J. A. and Fridman, L. (2012). Variable gain super-twisting sliding mode control, *IEEE Trans. Autom. Control* **57**(8): 2100–2105.
- Hsu, L., Ortega, R. and Damm, G. (1999). A globally convergent frequency estimator, *Automatic Control, IEEE Transactions on* **44**(4): 698–713.
- Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control, *Int. J. of Robust and Nonlinear Contr.* **58**(6): 1247–1263.
- Levant, A. (2005). Homogeneity approach to high-order sliding mode design, *Automatica* **41**(5): 823–830.
- Liapunov, A. M., Pliss, V. A. and Abramovici, F. (1967). *Stability of motion*, Mathematics in science and engineering: a series in monographs and textbooks, Elsevier, Burlington, MA.

Moreno, J. and Osorio, M. (2008). A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers, *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*, pp. 2856–2861.

Moreno, J. and Osorio, M. (2012). Strict Lyapunov functions for the super-twisting algorithm, *IEEE Trans. Autom. Control* **57**(4): 1035–1040.

Nagesh, I. and Edwards, C. (2014). A multivariable super-twisting sliding mode approach, *Automatica* **50**(3): 984–988.

Sidi, M. J. (1997). *Spacecraft Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach*, Cambridge University Press.

Ap ndice

Proposi  o 1 Se $K_p = K_p^T > 0$, então

$$\frac{(z^T K_p \sigma)(z^T K_p \sigma)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \leq \frac{z^T K_p^2 z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}},$$

onde $\sigma, z \in \mathbb{R}^m$.

Prova: Seja $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\|\sigma\|}$ um vetor unitário. Então

$$z^T K_p \bar{\sigma} \leq \|z^T K_p\| = \sqrt{z^T K_p^2 z},$$

onde a desigualdade é consequência da Desigualdade de Cauchy-Schwarz para produtos internos. Portanto, segue que

$$\frac{(z^T K_p \sigma)(z^T K_p \sigma)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} = \frac{(z^T K_p \bar{\sigma})(z^T K_p \bar{\sigma})}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{z^T K_p^2 z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}.$$

□