

VARIABLE GAIN SUPER-TWISTING ALGORITHM MULTIVARIÁVEL POR REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA

PAULO VICTOR N. M. VIDAL*, EDUARDO V. L. NUNES*, LIU HSU*

*Programa de Eng. Elétrica, COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro

Emails: paulovictornmv@poli.ufrj.br, eduardo@coep.ufrj.br, liu@coep.ufrj.br

Abstract— Inspired by a recently introduced multivariable super-twisting algorithm, an output-feedback non-decoupled multivariable extension for the variable gain super-twisting algorithm is proposed. The proposed scheme provides uniform global asymptotic stability, as well as global finite-time exact tracking, for multivariable uncertain systems in the presence of a rather general class of nonlinear state-dependent disturbances.

Keywords— Super-twisting, output-feedback, multivariable control, uncertain systems.

Resumo— Inspirados por um super-twisting algorithm multivariável recentemente introduzido, neste artigo propõe-se uma extensão multivariável não-desacoplada por realimentação de saída para o variable gain super-twisting algorithm. O esquema proposto fornece estabilidade assintótica uniforme global, bem como rastreamento global e exato em tempo finito, para sistemas multivariáveis incertos na presença de uma classe bastante geral de perturbações não-lineares dependentes do estado.

Palavras-chave— Super-twisting, realimentação de saída, controle multivariável, sistemas incertos.

1 Introdução

Recentemente, um algoritmo de controle baseado em modos deslizantes de ordem superior conhecido como Super-Twisting Algorithm (STA) ganhou considerável atenção. Sua principal vantagem em relação aos demais controladores por modos deslizantes de segunda ordem é a não necessidade de se implementar a derivada do sinal de saída. No entanto, a análise de estabilidade e convergência do STA era inicialmente baseada em métodos geométricos (Levant, 1993) e na teoria de sistemas homogêneos (Levant, 2005). Apenas mais recentemente, a abordagem Lyapunov foi introduzida por Moreno and Osorio (2008; 2012). Esse importante trabalho permitiu novos desenvolvimentos para a teoria do STA.

Em (Dávila et al., 2010; Gonzalez et al., 2012), uma importante generalização do STA denominada Variable Gain Super-Twisting Algorithm (VGSTA) foi proposta, sendo capaz de compensar perturbações crescentes com o tempo ou junto com as variáveis de estado em sistemas SISO. Em (Nagesh and Edwards, 2014), foi proposta uma extensão multivariável não-desacoplada do STA com ganhos fixos baseada em controle vetorial unitário, capaz de lidar com perturbações linearmente limitadas pela variável de deslizamento ou com primeiras derivadas temporais uniformemente limitadas. Entretanto, tais trabalhos eram baseados em realimentação de estado.

A principal contribuição deste artigo é propor uma extensão multivariável não-desacoplada por realimentação de saída do VGSTA. Até onde se sabe, este resultado representa o primeiro controlador por realimentação de saída baseado em um STA multivariável não-desacoplado que garante propriedades de estabilidade assintótica uniforme

global com convergência em tempo finito para sistemas incertos na presença de uma classe bastante geral de perturbações não-lineares dependentes do estado. Resultados de simulação ilustram a efetividade do esquema proposto.

2 Preliminares

Nas seções a seguir, todos os κ 's denotam constantes positivas apropriadas. Funções de classes $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_\infty$, $\mathcal{KL}$ são definidas como de costume (Khalil, 2002). $\|\cdot\|$ representa a norma Euclidiana para vetores, ou a norma induzida para matrizes. Aqui, a definição de Filippov para a solução de equações diferenciais descontínuas é assumida (Filippov, 1964). A margem de estabilidade de uma matriz de transferência $p \times m$ dada por $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ é definida por $\gamma_0 := \min_j \{-\text{Re}(p_j)\}$, onde p_j são os polos de $G(s)$. O sistema com matriz de transferência $G(s)$ é BIBO estável se e somente se $\gamma_0 > 0$. A margem de estabilidade de uma matriz real A é definida por $\lambda_0 := \min_j \{-\text{Re}(\lambda_j)\}$, onde λ_j são os autovalores de A . Se $\lambda_0 > 0$, então A é Hurwitz.

3 Definição do Problema

Considere um sistema não-linear incerto dado por

$$\dot{x} = Ax + B[u + d(x, t)], \quad y = Cx, \quad (1)$$

onde $t \in [0, \infty)$, $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é a entrada, $y \in \mathbb{R}^m$ é a saída, e $d(x, t) \in \mathbb{R}^m$ é uma perturbação não-linear incerta absolutamente contínua. As matrizes A , B e C também são incertas, mas pertencem a um conjunto compacto, de modo que limitantes para suas incertezas estão disponíveis para serem utili-

zados no projeto do controlador. Além disso, são feitas as seguintes hipóteses:

- (A1) $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ é de fase mínima e posto completo.
- (A2) O sistema é controlável e observável.
- (A3) $G(s)$ possui grau relativo uniforme e unitário, i.e., $\lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = K_p$, com K_p não-singular.
- (A4) O ganho de alta-frequência $K_p = CB$ é conhecido.

Considerando as hipóteses acima, existe uma transformação linear não-singular

$$\begin{bmatrix} \eta \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^\perp \\ C \end{bmatrix} x, \quad B^\perp B = 0,$$

que leva o sistema (1) à seguinte forma normal:

$$\dot{\eta} = A_{11}\eta + A_{12}y, \quad (2a)$$

$$\dot{y} = A_{21}\eta + A_{22}y + K_p[u + d(x, t)], \quad (2b)$$

onde a dinâmica dos zeros $\dot{\eta} = A_{11}\eta$ é estável de acordo com a Hipótese (A1), e $\eta \in \mathbb{R}^{n-m}$ é uma variável de estado não-medida.

O objetivo é determinar uma lei de controle por realimentação de saída u tal que y rastreie em tempo finito um sinal de referência $y_m \in \mathbb{R}^m$ gerado pelo seguinte modelo de referência:

$$\dot{y}_m = A_m y_m + K_m r,$$

onde $r \in \mathbb{R}^m$ é uma entrada de referência limitada e contínua por partes. O erro de rastreamento de saída é definido como

$$e := y - y_m.$$

Considerando a Hipótese (A4), a lei de controle pode ser projetada como

$$u = K_p^{-1} [v + \dot{y}_m],$$

onde v é uma variável de controle a ser definida posteriormente. Neste caso, a dinâmica do erro de rastreamento de saída é descrita por

$$\dot{e} = v + f(\eta, e, t), \quad (3)$$

onde $f(\eta, e, t) = A_{21}\eta + A_{22}e + K_p d(\eta, e, t) + A_{22}y_m$ é considerado como uma perturbação não-linear dependente do estado, que pode ser reescrita como

$$f(\eta, e, t) = g_1(\eta, e, t) + g_2(\eta, t), \quad (4)$$

onde

$$\begin{aligned} g_1(\eta, e, t) &= A_{22}e + K_p \{d(\eta, e, t) - d(\eta, 0, t)\}, \\ g_2(\eta, t) &= A_{21}\eta + K_p d(\eta, 0, t) + A_{22}y_m, \end{aligned} \quad (5)$$

e $g_1(\eta, 0, t) = 0$. Para projetar uma lei de controle baseada no VGSTA, majorantes para a norma da perturbação $g_1(\eta, e, t)$ e para a derivada

$$\begin{aligned} \frac{dg_2}{dt} &= A_{21}A_{11}\eta + A_{21}A_{12}(e + y_m) \\ &\quad + K_p \frac{d}{dt}[d(\eta, 0, t)] + A_{22}\dot{y}_m \end{aligned}$$

devem estar disponíveis. Entretanto, tais majorantes geralmente dependem da norma da variável de estado não-medida η . Logo, é necessário obter um majorante para $\|\eta\|$, o que pode ser feito utilizando filtros de aproximação de primeira ordem (*First Order Approximation Filters* - FOAFs).

4 First Order Approximation Filters

O objetivo é obter uma aproximação de primeira ordem de um majorante para a norma de η , com dinâmica dada por (2a). Assim, é necessário ter algum conhecimento sobre a margem de estabilidade da matriz A_{11} , que é Hurwitz já que $G(s)$ é de fase mínima. Então, é feita a seguinte hipótese:

- (A5) Um limitante inferior $\lambda > 0$ para a margem de estabilidade de A_{11} é conhecido.

Sendo assim, de acordo com (Hsu et al., 2003, Lema 2), um majorante para $\|\eta\|$ pode ser obtido pelo seguinte FOAF:

$$\dot{\hat{\eta}} = -\lambda_f \hat{\eta} + c_f \|y\|, \quad (6)$$

onde $c_f > 0$ e $0 < \lambda_f < \lambda$ são constantes apropriadas que podem ser computadas pelos métodos de otimização descritos em (Cunha et al., 2008). Portanto, existem constantes $c_\eta, \lambda_\eta > 0$ tais que

$$\|\eta(t)\| \leq \hat{\eta}(t) + |\pi_\eta(t)|, \quad (7)$$

com $|\pi_\eta(t)| = c_\eta \|x_\eta(t_0)\| e^{-\lambda_\eta(t-t_0)}$, $x_\eta = [\eta^T \hat{\eta}^T]^T$.

5 Output-Feedback MIMO Variable Gain Super-Twisting Algorithm

Recentemente, uma interessante extensão multi-variável não-desacoplada do STA foi proposta em (Nagesh and Edwards, 2014). No entanto, essa extensão é baseada em realimentação de estado e em ganhos constantes. Neste artigo, inspirado pelos resultados obtidos em (Gonzalez et al., 2012), é proposto um STA multivariável por realimentação de saída com ganhos variáveis. A principal vantagem é permitir lidar com incertezas não-desacopladas e perturbações dependentes do estado, estendendo a aplicabilidade do STA a uma classe maior de sistemas incertos. A lei de controle é dada por

$$v = -k_1(t, \hat{\eta}, e)\phi_1(e) - \int_{t_0}^t k_2(t, \hat{\eta}, e)\phi_2(e)dt, \quad (8)$$

onde

$$\phi_1(e) = \frac{e}{\|e\|^{\frac{1}{2}}} + k_3 e, \quad (9)$$

$$\phi_2(e) = \frac{1}{2} \frac{e}{\|e\|} + \frac{3}{2} k_3 \frac{e}{\|e\|^{\frac{1}{2}}} + k_3^2 e, \quad (10)$$

com $k_3 > 0$. Para $m = 1$, a nova lei de controle é reduzida ao VGSTA em (Gonzalez et al., 2012).

Considere os sinais de referência auxiliares η_m e $\hat{\eta}_m$ definidos pelas seguintes dinâmicas:

$$\dot{\eta}_m = A_{11}\eta_m + A_{12}y_m, \quad \dot{\hat{\eta}}_m = -\lambda_f \hat{\eta}_m + c_f \|y_m\|$$

com condições iniciais nulas. Definindo os erros auxiliares $\eta_e = \eta - \eta_m$ e $\hat{\eta}_e = \hat{\eta} - \hat{\eta}_m$, e considerando a lei de controle dada por (6) e (8) e os termos de perturbação em (5), a dinâmica do erro em malha-fechada pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\eta}}_e &= -\lambda_f \hat{\eta}_e + c_f [\|e + y_m\| - \|y_m\|], \\ \dot{\eta}_e &= A_{11}\eta_e + A_{12}e, \\ \dot{e} &= -k_1(t, \hat{\eta}, e)\phi_1(e) + z + g_1(\eta, e, t), \\ \dot{z} &= -k_2(t, \hat{\eta}, e)\phi_2(e) + \frac{d}{dt}[g_2(\eta, t)]. \end{aligned} \quad (11)$$

De modo a levar em consideração a presença do FOAF (6), o que é fundamental para permitir uma solução por realimentação de saída, é feita a seguinte hipótese com respeito à perturbação:

(A6) A perturbação de entrada $f(\eta, e, t)$ (ver (4)) satisfaz as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} \|g_1(\eta, e, t)\| &\leq \{\varrho_1(t, \hat{\eta}, e) + |\pi_1(t)|\} \|\phi_1(e)\|, \\ \left\| \frac{d}{dt}[g_2(\eta, t)] \right\| &\leq \{\varrho_2(t, \hat{\eta}, e) + |\pi_2(t)|\} \|\phi_2(e)\|, \end{aligned} \quad (12)$$

onde $\varrho_1, \varrho_2 \geq 0$ são funções contínuas conhecidas, $|\pi_1(t)| = \gamma_1 (\|x_\eta(t_0)\|) e^{-\lambda_1(t-t_0)}$, e $|\pi_2(t)| = \gamma_2 (\|x_\eta(t_0)\|) e^{-\lambda_2(t-t_0)}$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}_\infty$.

Esta hipótese é ligeiramente diferente da apresentada em (Gonzalez et al., 2012). Os termos $|\pi_1(t)|$ e $|\pi_2(t)|$ são introduzidos em (12) para representar perturbações relacionadas a $|\pi_\eta(t)|$ em (7).

Considerando (9)-(10) e a matriz jacobiana

$$\Phi'_1(e) = \frac{d\phi_1(e)}{de} = \frac{1}{\|e\|^{1/2}} \left\{ I - \frac{ee^T}{2\|e\|^2} \right\} + k_3 I,$$

onde $\Phi'_1(e) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, é possível mostrar que as seguintes propriedades são válidas $\forall e \neq 0$:

Propriedade (P1):

$$\phi_2(e) = \Phi'_1(e)\phi_1(e). \quad \blacksquare$$

Propriedade (P2): Para todo $w \in \mathbb{R}^m$

$$w^T \Phi'_1(e)w \geq \left(\frac{1}{2\|e\|^{1/2}} + k_3 \right) \|w\|^2, \quad \blacksquare$$

Propriedade (P3): Para $m \geq 2$,

$$\|\Phi'_1(e)\| = \left(\frac{1}{\|e\|^{1/2}} + k_3 \right), \quad \blacksquare$$

O resultado principal é enunciado pelo Teorema 1.

Teorema 1 Considere o sistema em malha-fechada (11) com estado $X_e = [\hat{\eta}_e \ \eta_e^T \ e^T \ z^T]^T$, e suponha que as Hipóteses (A1)-(A6) sejam satisfeitas. Então, o sistema é globalmente uniformemente assintoticamente estável e a superfície de deslizamento $\dot{e} = e = 0$ é alcançada em tempo finito, para qualquer condição inicial $X_e(t_0)$, se os ganhos variáveis forem escolhidos como

$$k_1(t, \hat{\eta}, e) = \delta + \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{1}{4\epsilon} [4\epsilon\varrho_1 + \varrho_2]^2 + 2\epsilon\varrho_2 + \epsilon + [2\epsilon + \varrho_1](\beta + 4\epsilon^2) \right\}, \quad (13)$$

$$k_2(t, \hat{\eta}, e) = \beta + 4\epsilon^2 + 2\epsilon k_1(t, \hat{\eta}, e),$$

onde β, ϵ e δ são constante positivas arbitrárias.

Prova: Considere a seguinte função candidata de Lyapunov¹, que é uma generalização da função proposta em (Gonzalez et al., 2012):

$$V(e, z) = \zeta^T P \zeta, \quad P = \begin{bmatrix} (\beta + 4\epsilon^2)I & -2\epsilon I \\ -2\epsilon I & I \end{bmatrix}, \quad (14)$$

onde $\zeta = [\phi_1^T(e) \ z^T]^T$, $\phi_1(e)$ é definido em (9), z é dado por (11), $\beta > 0$, $\epsilon > 0$, e $I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é a matriz identidade. Note que a função $V(e, z)$ é contínua em todo ponto, e diferenciável em todo ponto exceto no subespaço $\mathcal{S} = \{(e, z) \in \mathbb{R}^{2m} | e = 0\}$. Assim, segue de (11) e da Propriedade (P1) que

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \begin{bmatrix} \Phi'_1(e) \{-k_1(t, \hat{\eta}, e)\phi_1(e) + z + g_1(\eta, e, t)\} \\ -k_2(t, \hat{\eta}, e)\phi_2(e) + \frac{d}{dt}[g_2(\eta, t)] \end{bmatrix}, \\ &= \mathcal{A}(t, \hat{\eta}, e)\zeta + \psi(\eta, e, t), \quad \forall (e, z) \in \mathbb{R}^{2m} \setminus \mathcal{S} \end{aligned}$$

$$\text{com } \mathcal{A}(t, \hat{\eta}, e) = \begin{bmatrix} -k_1\Phi'_1 & \Phi'_1 \\ -k_2\Phi'_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \psi(\eta, e, t) = \begin{bmatrix} \Phi'_1 g_1 \\ \frac{dg_2}{dt} \end{bmatrix}.$$

A derivada de $V(e, z)$ em $\mathbb{R}^{2m} \setminus \mathcal{S}$ é então dada por

$$\dot{V} = -\zeta^T \mathcal{Q}(t, \hat{\eta}, e)\zeta + 2\zeta^T P\psi(\eta, e, t),$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(t, \hat{\eta}, e) &= -(\mathcal{A}(t, \hat{\eta}, e)^T P + P\mathcal{A}(t, \hat{\eta}, e)) \\ &= \begin{bmatrix} \{2\beta k_1 + 4\epsilon(2\epsilon k_1 - k_2)\} \Phi'_1, & \star \\ \{k_2 - 2\epsilon k_1 - (\beta + 4\epsilon^2)\} \Phi'_1, & 4\epsilon \Phi'_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e o símbolo $\star$ é usado para indicar um elemento simétrico. Escolhendo k_2 como em (13), tem-se

$$\mathcal{Q}(t, \hat{\eta}, e) = \begin{bmatrix} \{2\beta k_1 - 4\epsilon(\beta + 4\epsilon^2)\} \Phi'_1, & 0 \\ 0, & 4\epsilon \Phi'_1 \end{bmatrix},$$

Neste caso, a Propriedade (P2) implica

$$-\zeta^T \mathcal{Q}(t, \hat{\eta}, e)\zeta \leq -\left(\frac{1}{2\|e\|^{1/2}} + k_3 \right) \bar{\zeta}^T \bar{\mathcal{Q}}(t, \hat{\eta}, e)\bar{\zeta},$$

onde $\bar{\mathcal{Q}}(t, \hat{\eta}, e) = \begin{bmatrix} 2\beta k_1 - 4\epsilon(\beta + 4\epsilon^2), & 0 \\ 0, & 4\epsilon \end{bmatrix}$, e $\bar{\zeta} = [\|\phi_1\| \ \|z\|]^T$. Além disso, considerando (12) e

¹Note que a função (14) se torna igual à proposta em (Gonzalez et al., 2012) para $m = 1$.

a Propriedade (P1), tem-se

$$\begin{aligned} \zeta^T P \psi &= \{(\beta + 4\epsilon^2)\phi_1 - 2\epsilon z\}^T \Phi_1' g_1 - \{2\epsilon\phi_1 - z\}^T \frac{dq_2}{dt} \\ &\leq (\varrho_1 + |\pi_1|) [(\beta + 4\epsilon^2)\|\phi_1\| \|\Phi_1' \phi_1\| + 2\epsilon\|z\| \|\Phi_1'\| \|\phi_1\|] \\ &\quad + (\varrho_2 + |\pi_2|) (2\epsilon\|\phi_1\| + \|z\|) \|\Phi_1' \phi_1\| \end{aligned}$$

Logo, segue de $\Phi_1'(e)\phi_1(e) = \left(\frac{1}{2\|e\|^{1/2}} + k_3\right)\phi_1(e)$ e da Propriedade (P3) que

$$2\zeta^T P \psi \leq \left(\frac{1}{2\|e\|^{1/2}} + k_3\right) \{\bar{\zeta}^T \Psi(t, \hat{\eta}, e) \bar{\zeta} + \bar{\zeta}^T \Pi(t) \bar{\zeta}\},$$

com

$$\Psi(t, \hat{\eta}, e) = \begin{bmatrix} 2\varrho_1(\beta + 4\epsilon^2) + 4\epsilon\varrho_2, & \star \\ \varrho_2 + 4\epsilon\varrho_1, & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Pi(t) = \begin{bmatrix} 2|\pi_1|(\beta + 4\epsilon^2) + 4\epsilon|\pi_2|, & \star \\ |\pi_2| + 4\epsilon|\pi_1|, & 0 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\dot{V} \leq -\left(\frac{1}{2\|e\|^{1/2}} + k_3\right) \{\bar{\zeta}^T Q(t, \hat{\eta}, e) \bar{\zeta} - \bar{\zeta}^T \Pi(t) \bar{\zeta}\},$$

onde $Q(t, \hat{\eta}, e) = \bar{Q}(t, \hat{\eta}, e) - \Psi(t, \hat{\eta}, e)$, e escolhendo k_1 como em (13), tem-se que a matriz $Q - 2\epsilon I$ é positiva definida. Portanto,

$$\dot{V} \leq -\left(\frac{1}{2\|e\|^{1/2}} + k_3\right) \{2\epsilon\|\zeta\|^2 - \bar{\zeta}^T \Pi(t) \bar{\zeta}\}. \quad (15)$$

Forward Completeness: De (15), segue que

$$\dot{V} \leq \left(\frac{1}{2\|e\|^{1/2}} + k_3\right) \bar{\zeta}^T \Pi(t) \bar{\zeta}.$$

Como $|\pi_1(t)|$ e $|\pi_2(t)|$ são uniformemente limitados, então existem constantes $\kappa_1 = \gamma_{\kappa_1}(\|X_e(t_0)\|)$ e $\kappa_2 = \gamma_{\kappa_2}(\|X_e(t_0)\|)$, $\gamma_{\kappa_1}, \gamma_{\kappa_2} \in \mathcal{K}_\infty$, tais que

$$\dot{V} \leq \left(\frac{1}{2\|e\|^{1/2}} + k_3\right) \|\phi_1\| \{\kappa_1\|\phi_1\| + \kappa_2\|z\|\}.$$

De (9) segue que $\|\phi_1\| = \|e\|^{\frac{1}{2}} + k_3\|e\|$, e como $\zeta = [\phi_1^T \ z^T]^T$, tem-se para $\kappa_3 = \kappa_1 + \kappa_2$ que

$$\dot{V} \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}k_3\|e\|^{1/2} + k_3^2\|e\|\right) \kappa_3\|\zeta\|.$$

Como $\|e\|^{\frac{1}{2}} \leq \|\phi_1\|$, $\|e\| \leq \frac{\|\phi_1\|}{k_3}$ e $\|\phi_1\| \leq \|\zeta\|$, então

$$\dot{V} \leq \kappa_4\|\zeta\| + \kappa_5\|\zeta\|^2,$$

com $\kappa_4 = \frac{1}{2}\kappa_3$ e $\kappa_5 = \frac{5k_3}{2}\kappa_3$. Logo, segue de

$$\lambda_{\min}\{P\}\|\zeta\|^2 \leq \zeta^T P \zeta \leq \lambda_{\max}\{P\}\|\zeta\|^2 \quad (16)$$

que para $\kappa_6 = \frac{\kappa_4}{\lambda_{\min}\{P\}}$ e $\kappa_7 = \frac{\kappa_5}{\lambda_{\min}\{P\}}$, tem-se

$$\dot{V} \leq \kappa_6 V^{\frac{1}{2}}(e, z) + \kappa_7 V(e, z).$$

Como a solução da equa  o de comparação

$$\dot{v} = \kappa_6 v^{\frac{1}{2}} + \kappa_7 v, \quad v(t_0) = v_0 \geq 0 \quad (17)$$

  dada por

$$v(t) = e^{\kappa_7(t-t_0)} \left[v_0^{\frac{1}{2}} + \frac{\kappa_6}{\kappa_7} \left(1 - e^{-\frac{\kappa_7}{2}(t-t_0)} \right) \right]^2, \quad (18)$$

$\forall t \geq t_0 \geq 0$, então invocando o princípio de comparação, tem-se que $V(t) \leq v(t)$. Como $\hat{\eta}_e$ e η_e são estados de sistemas lineares estáveis com ganhos finitos, então o estado completo do sistema em malha-fechada não pode escapar em tempo finito.

Estabilidade uniforme global: Considerando (15), como $\bar{\zeta}^T \Pi(t) \bar{\zeta} \leq |\pi_3(t)| \|\bar{\zeta}\|^2$, com $|\pi_3(t)| = \gamma_3(\|X_e(t_0)\|) e^{-\lambda_3(t-t_0)}$, $\lambda_3 > 0$, $\gamma_3 \in \mathcal{K}_\infty$, tem-se

$$\dot{V} \leq -(2\epsilon - |\pi_3(t)|) \left(\frac{1}{2\|e\|^{1/2}} + k_3 \right) \|\bar{\zeta}\|^2,$$

Então, existe um instante de tempo finito

$$T_1 = t_0 + \max \left\{ 0, \frac{\ln \left(\frac{\gamma_3(\|X_e(t_0)\|)}{\epsilon} \right)}{\lambda_3} \right\}$$

tal que

$$(2\epsilon - |\pi_3(t)|) \geq \epsilon, \quad t \geq T_1. \quad (19)$$

De (18) e invocando o princípio de comparação,   possível concluir que as trajetórias do sistema podem crescer no máximo exponencialmente até $t = T_1$. Após esse intervalo de tempo, $\dot{V}(t)$ se torna negativa definida e $V(t) \leq v(T_1)$, $\forall t \geq t_0$, onde

$$v(T_1) = \left[v_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\kappa_7}{2}(T_1-t_0)} + \frac{\kappa_6}{\kappa_7} \left(e^{\frac{\kappa_7}{2}(T_1-t_0)} - 1 \right) \right]^2.$$

Como $\kappa_7 = \frac{5k_3(\kappa_1 + \kappa_2)}{2\lambda_{\min}\{P\}} = \gamma_{\kappa_7}(\|X_e(t_0)\|)$ e tem-se

$$v_0 \leq \lambda_{\max}\{P\} \|\zeta(t_0)\|^2 \leq \gamma_{v_0}(\|X_e(t_0)\|),$$

$\gamma_{\kappa_7}, \gamma_{v_0} \in \mathcal{K}_\infty$, e a constante $\frac{\kappa_6}{\kappa_7} = \frac{\sqrt{\lambda_{\min}\{P\}}}{5k_3}$ é independente de $X_e(t_0)$,   possível mostrar que existem funções $\gamma_4, \gamma_5 \in \mathcal{K}_\infty$ tais que

$$\begin{aligned} v_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\kappa_7}{2}(T_1-t_0)} &\leq \gamma_4(\|X_e(t_0)\|), \\ \frac{\kappa_6}{\kappa_7} \left(e^{\frac{\kappa_7}{2}(T_1-t_0)} - 1 \right) &\leq \gamma_5(\|X_e(t_0)\|), \end{aligned}$$

e portanto existe $\gamma_6 \in \mathcal{K}_\infty$ tal que

$$V(t) \leq v(T_1) \leq \gamma_6(\|X_e(t_0)\|), \quad \forall t \geq t_0.$$

Logo, como $\|e\| \leq \frac{\|\zeta\|}{k_3}$ e $\|z\| \leq \|\zeta\|$, então segue de (16) que existem funções $\gamma_e, \gamma_z \in \mathcal{K}_\infty$ tais que

$$\|e\| \leq \gamma_e(\|X_e(t_0)\|), \quad \|z\| \leq \gamma_z(\|X_e(t_0)\|),$$

e como as din micas de η_e e $\hat{\eta}_e$ em (11) s o est veis, ent o $\exists \kappa_8, \kappa_9, \kappa_{10}, \kappa_{11} > 0$ tais que

$$\|\eta_e\| \leq \kappa_8 \|\eta_e(t_0)\| + \kappa_9 \sup_{t \in [0, \infty)} \|e\| \leq \gamma_{\eta_e}(\|X_e(t_0)\|),$$

$$\|\hat{\eta}_e\| \leq \kappa_{10} \|\hat{\eta}_e(t_0)\| + \kappa_{11} \sup_{t \in [0, \infty)} \|e + y_m\| - \|y_m\|$$

$$\leq \gamma_{\hat{\eta}_e}(\|X_e(t_0)\|),$$

com $\gamma_{\eta_e}, \gamma_{\hat{\eta}_e} \in \mathcal{K}_\infty$. Logo, $\exists \gamma_{X_e} \in \mathcal{K}_\infty$ tal que

$$\|X_e(t)\| \leq |\hat{\eta}_e| + \|\eta_e\| + \|e\| + \|z\| \leq \gamma_{X_e}(\|X_e(t_0)\|),$$

$\forall t \geq t_0$. Portanto, a origem do sistema (11)   globalmente uniformemente estável (L ria, 2016).

Convergência global em tempo finito: Considerando (19), tem-se

$$\dot{V} \leq -\epsilon \left(\frac{1}{2\|e\|^{1/2}} + k_3 \right) \|\zeta\|^2, \quad t \geq T_1.$$

Logo, segue de (16) e $\|e\|^{1/2} \leq \|\zeta\|$, que

$$\dot{V} \leq -c_1 V^{1/2}(e, z) - c_2 V(e, z), \quad t \geq T_1,$$

onde $c_1 = \frac{\epsilon}{2\lambda_{\max}\{P\}}$, e $c_2 = \frac{\epsilon k_3}{\lambda_{\max}\{P\}}$. Então, sabendo que as trajetórias do sistema não podem permanecer em $\mathcal{S} \setminus \{0\}$,   possível verificar que $V(e, z)$ é uma função continuamente decrescente, e pode-se utilizar o Teorema de Lyapunov generalizado em (Deimling, 1992, Proposição 14.1) para Inclusões Diferenciais para concluir que a superfície de deslizamento $e = \dot{e} = 0$   alcançada em tempo finito $\forall X_e(t_0)$. A propriedade chave que permite esta conclusão é que (Deimling, 1992, Proposição 14.1) requer apenas continuidade e não diferenciabilidade da função de Lyapunov. Além disso, resolvendo uma equação de comparação similar a (17), tem-se que (e, z) converge para zero no máximo após um intervalo de tempo finito

$$T_2 = T_1 + \frac{2}{c_2} \ln \left(\frac{c_2}{c_1} V^{1/2}(e(T_1), z(T_1)) + 1 \right).$$

Estabilidade assintótica uniforme global: Como η_e e $\hat{\eta}_e$ podem ser interpretados como saídas de filtros lineares estáveis com entradas que se anulam quando $e = 0$, então pode-se dizer que a origem do sistema (11) também é globalmente uniformemente atrativa. Portanto, o sistema em malha-fechada (11)   globalmente uniformemente assintoticamente estável (L ria, 2016). $\square$

6 Resultados de Simulação

Considere a cadeia de quatro trailers representada na Figura 1 (Cunha et al., 2006), controlada pelos atuadores conectados aos dois trailers ativos. A dinâmica do movimento é dada por (2), com

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_{31}}{m_3} & -\frac{b_{23}}{m_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{k_{24}}{m_4} & -\frac{b_{24}}{m_4} \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{b_{23}}{m_3} \\ 0 & -1 \\ 0 & \frac{b_{24}}{m_4} \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} \frac{k_{31}}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_{23}}{m_2} & \frac{k_{24}}{m_2} & \frac{b_{24}}{m_2} \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{23}+b_{24}}{m_2} \end{bmatrix},$$

$$K_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & -\frac{1}{m_1} \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix},$$

onde a saída $y = [v_1 \ v_2]^T$ é composta pelas velocidades dos trailers ativos, o controle $u = [F_1 \ F_2]^T$

É dado pelas forças fornecidas pelos atuadores, $d(x, t) \equiv 0$, e $\eta = [l_{31} \ v_3 \ l_{42} \ v_4]^T$ é composto pelas distâncias l_{31} e l_{42} entre os trailers correspondentes, e pelas velocidades dos trailers passivos.

Os parâmetros são dados por $m_1 = 1.2$ kg, $m_2 = 2.5$ kg, $m_3 \in [0.5, 1.5]$ kg, $m_4 = 1.0$ kg, $k_{24} = 100$ N/m, $k_{31} \in [25, 35]$ N/m, $b_{23} \in [2.5, 6.0]$ Ns/m e $b_{24} = 3.0$ Ns/m, com valores nominais $m_3^{\text{nom}} = 1.0$ kg, $k_{31}^{\text{nom}} = 30$ N/m, e $b_{23}^{\text{nom}} = 4.0$ Ns/m. Além disso, considera-se que o quarto trailer pode ou não estar conectado à cadeia. Quando o quarto trailer está desconectado, considera-se que $b_{24} = 0$ Ns/m e $k_{24} = 0$ N/m, e a variável de estado não-medida pode ser reduzida a $\eta = [l_{31} \ v_3]^T$. Note que A_{11}   Hurwitz e K_p é conhecido, satisfazendo as Hipóteses (A1) e (A4).

O objetivo é projetar uma lei de controle por realimentação de saída baseada no MIMO VGSTA de modo que y rastreie em tempo finito o sinal de referência y_m gerado por $\dot{y}_m = -2y_m + r(t)$, com $r = [20 \sin(10t) - 10 \sin(5t)]^T$. Para isso, o conhecimento nominal do sistema é considerado de modo a reduzir a magnitude dos ganhos variáveis. A lei de controle é projetada como

$$u = K_p^{-1}[v + \dot{y}_m - A_{22}^{\text{nom}}y],$$

com v dado por (8). Assim, a dinâmica do erro é dada por (3), com a perturbação dependente o estado $f(\eta, e, t) = g_1(\eta, e, t) + g_2(\eta, t)$ definida por

$$g_1(\eta, e, t) = \tilde{A}_{22}e, \quad g_2(\eta, e, t) = A_{21}\eta + \tilde{A}_{22}y_m,$$

onde $\tilde{A}_{22} = A_{22} - A_{22}^{\text{nom}}$. Além disso, tem-se a derivada $\frac{dg_2}{dt} = A_{21}A_{11}\eta + A_{21}A_{12}y + \tilde{A}_{22}\dot{y}_m$.

Considerando os intervalos admissíveis para os parâmetros incertos, um possível majorante para $\|A_{21}A_{11}\eta\|$ é dado pela multiplicação de $\|A_{21}A_{11}\|_{\max}$ pela estimativa de $\|\eta\|$ obtida pelo FOAF (6). Neste exemplo, um majorante menos conservativo é obtido projetando um FOAF diretamente para o sistema definido por $H(s) = A_{21}A_{11}(sI - A_{11})^{-1}A_{12}$. Este FOAF é dado por

$$\dot{\hat{\eta}}_h = -\lambda_h \hat{\eta}_h + c_h \|y\|,$$

com $c_h = 506.7$ e $\lambda_h = 0.83$. Logo, para satisfazer as desigualdades (12) da Hipótese (A6), as funções contínuas do VGSTA devem ser tais que

$$\varrho_1 \geq \frac{\|\tilde{A}_{22}\|}{k_3},$$

$$\varrho_2 \geq \max \left\{ \frac{\|A_{21}A_{12}\|}{k_3^2}, 2(\hat{\eta}_h + \|A_{21}A_{12}\| \|y_m\| + \|\tilde{A}_{22}\| \|\dot{y}_m\|) \right\},$$

e portanto são escolhidas utilizando os valores máximos $\|\tilde{A}_{22}\|_{\max}$ e $\|A_{21}A_{12}\|_{\max}$. Na simulação, as condições iniciais do sistema são dadas por $\eta(0) = 0$ e $y(0) = [5 \ -5]^T$, e os parâmetros incertos são dados por $m_3 = 1.5$ kg, $b_{23} = 6$ Ns/m, e $k_{31} = 35$ N/m. O quarto trailer está inicialmente desconectado, sendo conectado em $t = 3$ s.

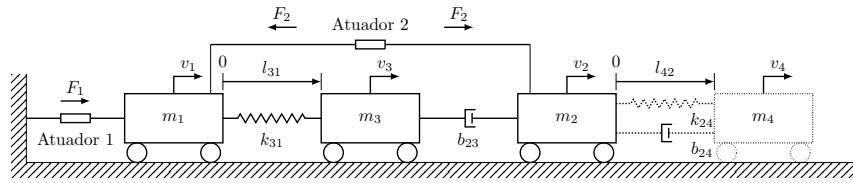


Figura 1: Cadeia de quatro trailers controlada por dois atuadores conectados aos trailers ativos. O quarto trailer pode ou não estar conectado à cadeia.

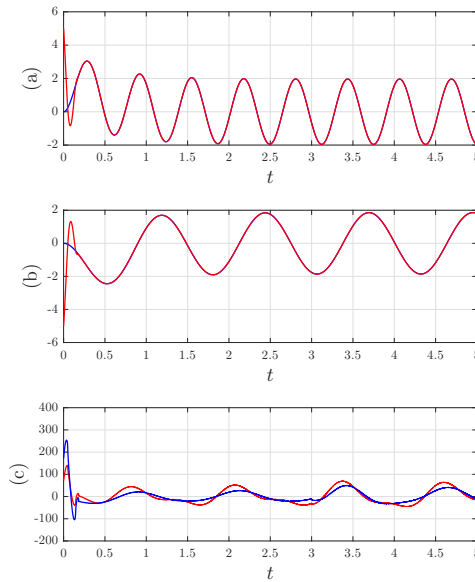


Figura 2: Performance do MIMO VGSTA no controle de uma cadeia de trailers: (a) rastreamento da velocidade do primeiro trailer (●) v_1 , (●) y_{m1} ; (b) rastreamento da velocidade do segundo trailer (●) v_2 , (●) y_{m2} ; (c) forças fornecidas pelos atuadores (●) F_1 , (●) F_2 .

O ganho constante do algoritmo é escolhido como $k_3 = 0.4$, e seus ganhos variáveis são dados por (13), com $\delta = 0.1$, $\epsilon = 4$, e $\beta = 900$.

A Figura 2 mostra os resultados de simulação. Note que o MIMO VGSTA fornece rastreamento exato a partir de $t \approx 0.2s$, e que a performance é insensível à conexão do quarto trailer à cadeia. É importante salientar que foram utilizados os mesmos parâmetros de simulação de (Cunha et al., 2006), visando permitir uma comparação entre as duas abordagens. Comparado ao controle descontínuo em (Cunha et al., 2006), o MIMO VGSTA alcança uma performance similar com um esforço de controle significativamente menor e, o mais importante, com um sinal de controle contínuo e menos propenso ao chattering.

7 Conclusões

Neste artigo, apresentou-se uma extensão multivariável não-desacoplada por realimentação de saída para o VGSTA. O controlador proposto assegura estabilidade assintótica uniforme global e rastreamento global e exato em tempo finito para sistemas multivariáveis incertos na presença de perturbações não-lineares dependentes do estado. Estas propriedades foram provadas utilizando uma

abordagem de Lyapunov. FOAFs foram usados para lidar com perturbações dependentes de variáveis de estado não-medidas. Simulações foram apresentadas para ilustrar a eficácia do esquema proposto em um sistema de interesse prático.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado por FAPERJ, CAPES e CNPq.

Referências

- Cunha, J. P. V. S., Costa, R. R. and Hsu, L. (2006). Design of sliding mode controllers for linear uncertain systems based on first order approximation filters, *Proc. 9th Int. Workshop Variable Structure Syst., Alghero, Italy*, pp. 340–345.
- Cunha, J. P. V. S., Costa, R. R. and Hsu, L. (2008). Design of first-order approximation filters for sliding-mode control of uncertain systems, *IEEE Trans. Ind. Electron.* **55**(11): 4037–4046.
- Dávila, A., Moreno, J. and Fridman, L. (2010). Variable gains super-twisting algorithm: A Lyapunov based design, *Proc. Amer. Control Conf.*, Baltimore, MD.
- Deimling, K. (1992). *Multivalued Differential Equations*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, De Gruyter.
- Filippov, A. F. (1964). Differential equations with discontinuous right-hand side, *American Math. Soc. Translations* **42**(2): 199–231.
- Gonzalez, T., Moreno, J. A. and Fridman, L. (2012). Variable gain super-twisting sliding mode control, *IEEE Trans. Autom. Control* **57**(8): 2100–2105.
- Hsu, L., Costa, R. R. and Cunha, J. P. V. S. (2003). Model-reference output-feedback sliding mode controller for a class of multivariable nonlinear systems, *Asian Journal of Control* **5**(4): 543–556.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems, 3rd Ed*, John Wiley.
- Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control, *Int. J. of Robust and Nonlinear Contr.* **58**(6): 1247–1263.
- Levant, A. (2005). Homogeneity approach to high-order sliding mode design, *Automatica* **41**(5): 823–830.
- Loría, A. (2016). Observers are unnecessary for output-feedback control of lagrangian systems, *IEEE Trans. Autom. Control* **61**(4): 905–920.
- Moreno, J. and Osorio, M. (2008). A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers, *Proc. IEEE Conf. Dec. Control, Cancun, Mexico*, pp. 2856–2861.
- Moreno, J. and Osorio, M. (2012). Strict Lyapunov functions for the super-twisting algorithm, *IEEE Trans. Autom. Control* **57**(4): 1035–1040.
- Nagesh, I. and Edwards, C. (2014). A multivariable super-twisting sliding mode approach, *Automatica* **50**(3): 984–988.