

OBSERVADOR DIGITAL APLICADO A CIRCUITO RC

RHONEI PATRIC DOS SANTOS*, WAGNER FELIPE SANTANA SOUZA*

*Universidade Estadual de Santa Cruz, Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas
Rodovia Jorge Amado, Km 16, Ilhéus - Bahia

Emails: rhoneipatric.eletrica@gmail.com, king_ofcs@hotmail.com

Abstract— In industrial applications, information of the variables of a given process is a crucial step for supervision and control of it. However, in some applications, limitations such as: cost of the sensors, physical space, operational, technological limitations of the sensors, among others, make the direct measurement impossible thereof being necessary to resort to more sophisticated techniques. An interesting alternative to this type of situation is to use the knowledge about observers to estimate (observe) state variables that are not part of the set of measurements using the mathematical model of the process. The objective of this study was to determine the behavior of an *RC* circuit state variable, using control theory and observer's project via state space of discrete time. It used the *Scilab* as simulation environment, and the *Arduino MEGA2560* as the data acquisition system. Through simulations it was found that the designed observer has met the specifications satisfactorily, since their results were compared with the actual behavior of the estimated state.

Keywords— Control, Observer, Arduino, State Space

Resumo— Nas aplicações industriais, obter informações das variáveis de um dado processo é uma etapa crucial para supervisão e controle do mesmo. Porém, em algumas aplicações, limitações como: custo dos sensores, espaço físico, limitações tecnológicas operacionais dos sensores, entre outros, impossibilitam a medição direta das mesmas sendo necessário recorrer à técnicas mais sofisticadas. Uma alternativa interessante a este tipo de situação consiste em utilizar o conhecimento sobre os observadores de estados para estimar (observar) variáveis de estado que não fazem parte do conjunto de medições usando o modelo matemático do processo. O objetivo deste trabalho consistiu em determinar o comportamento da variável de estado de um circuito *RC*, utilizando teoria de controle e projeto de observadores via espaço de estados de tempo discreto. Utilizou-se o *Scilab* como ambiente de simulações, e o *Arduino MEGA2560*, para aquisição de medidas do sistema. Através das simulações realizadas constatou-se que o observador projetado atendeu às especificações de forma satisfatória, uma vez que seus resultados foram comparados com o comportamento real do estado estimado.

Palavras-chave— Controle, Observador, Arduino, Espaço de Estados

1 Introdução

Na maioria das aplicações de engenharia é desejável obter informações de variáveis de um determinado processo, para que estas possam ser supervisionadas e controladas. Porém, em algumas situações o comportamento de algumas destas variáveis não podem ser medidas diretamente devido a limitações como: custos dos sensores e instrumentação utilizada, espaço físico, limitações tecnológicas e operacionais dos sensores, entre outros. Uma alternativa interessante a este tipo de situação consiste em realizar uma estimação das variáveis desejadas, utilizando o conhecimento sobre o modelo matemático do sistema e a medida da saída do sistema (Cerqueira and Luis, 2010).

O conhecimento sobre a teoria dos observadores de estado contribui de forma essencial para resolução do problema anterior pois, a depender do sistema analisado, estes conseguem estimar (observar) variáveis de estado que não fazem parte do conjunto de medições (Ogata, 1995). Contudo, em aplicações industriais, a precisão das estimações não é o objetivo final, mas sim que o estado estimado tenha um valor próximo o suficiente do real, para que seu comportamento possa ser controlado dentro de um processo.

Na literatura já foram desenvolvidos vários métodos robustos e sofisticados para obter esti-

mativas de variáveis de estado não-mensuráveis, como: Filtro de Kalman, Estimadores Robustos, Estimadores Fuzzy, entre outros (Bianco, 2009); (Campos, 2004); (Minotti, 2008). Entretanto, o objetivo principal deste trabalho consistiu em obter uma estimativa discreta do comportamento de uma variável de estado de um sistema conhecido, utilizando as teorias básicas de controle e projeto de observadores via espaço de estados discreto. Para isto utilizou-se a ferramenta *Xcos* do *software Scilab* como ferramenta de simulações computacionais, e a placa *Arduino MEGA 2560*, para aquisição de medidas do sistema.

2 Fundamentação Teórica

Existem pelo menos quatro desvantagens a respeito da utilização dos sensores. Primeiramente são caros, podendo aumentar o custo do sistema de controle. Segundo, as suas ligações por fios reduzem a confiabilidade do sistema. Terceiro, alguns sinais são inacessíveis à medição. Quarto, os sensores induzem a erros significativos assim como ruídos estocásticos. Daí, vem a necessidade da utilização de observadores para substituir os sensores em sistemas de controle. Pois, de maneira geral, estes minimizam a ocorrência de falhas, reconstituindo as variáveis de estado não-mensuráveis, tornando o sistema mais confiável (Ellis, 2002).

Como nem sempre é possível medir a entrada e saída de um sistema, pode-se estabelecer um esquema que permita indiretamente estimar suas variáveis de estado, a partir do modelo matemático, e da observabilidade do sistema. A Figura 1 ilustra essa ideia:

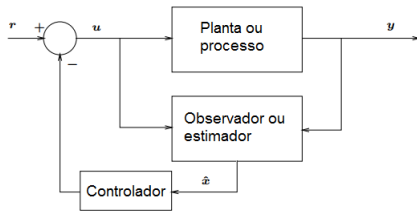


Figura 1: Diagrama de Blocos de um sistema com realimentação de estados estimado por observador

2.1 Sistemas de Tempo Discreto

Existem dois tipos básicos de sinais: Sinais de tempo contínuo e sinais de tempo discreto. Nos sinais de tempo contínuo, a variável independente é contínua e, portanto, esses sinais são definidos em um conjunto contínuo de valores da variável independente. Em contrapartida, os sinais de tempo discreto são definidos somente em instantes discretos, ou seja, a variável independente assume apenas um conjunto discreto de valores.

Um sinal de tempo discreto $x[n]$ pode representar um fenômeno para o qual a variável independente é inerentemente discreta. Por outro lado, muitos sinais de tempo discreto decorrem da amostragem de sinais de tempo contínuo. Nesse caso, o sinal de tempo discreto $x[n]$ representa amostras sucessivas de um fenômeno para o qual a variável independente é contínua. Devido à sua velocidade, capacidade computacional e flexibilidade, os processadores digitais modernos são usados para implementar muitos sistemas práticos. Tais sistemas requerem o uso de sequências de tempo discreto, representando versões amostradas de sinais de tempo contínuo (Oppenheim, 2010).

Neste trabalho, será representada uma versão amostrada de um circuito RC, onde uma de suas variáveis de estado será estimada através de um observador digital através da comunicação serial entre a placa *Arduino*, e o software *Scilab*

2.2 Espaço de Estados em Tempo Discreto

De forma geral, uma planta ou processo de tempo contínuo possui sua representação matemática em espaço de estados através das equações de estado abaixo:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2)$$

Onde, $A \in Re^{n \times n}$, $B \in Re^{n \times m}$, $C \in Re^{l \times n}$ e $D \in Re^{l \times m}$, $l =$ número de saídas, são os parâmetros do sistema obtidos da modelagem matemática e $x(t) \in Re^n$ é o vetor de estados e $u(t) \in Re^m$ é a entrada do sistema.

A representação matemática acima modela sistemas de tempo contínuo, onde tem-se informações da saída $y(t) \forall t$ real. Na prática não é isto que acontece, pois as informações a respeito da saída do sistema são obtidas em determinados intervalos de tempo T , este é chamado período de amostragem do sistema. Então, caso se queira computar um estado do sistema dispondo de um computador digital, faz-se necessário converter uma equação de estados de tempo contínuo para uma equação de estado de tempo discreto.

A representação em espaço de estados de tempo discreto é dada por (3) - (4) (Ogata, 1995).

$$x((k+1)T) = G(T)x(kT) + H(T)u(kT) \quad (3)$$

$$y(kT) = Cx(kT) + Du(kT) \quad (4)$$

Observa-se que as matrizes G e H dependem do período de amostragem T , uma vez que T é fixado constante, as matrizes anteriores são consideradas constantes, e a representação em espaços de estados discreto do sistema é:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (5)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (6)$$

2.3 Observabilidade em Tempo Discreto

Seja um sistema dado por (5) - (6), este sistema será completamente observável se, dada a saída $y(kT)$ e a entrada $u(kT)$ para períodos de amostragem finitos, seja possível obter o vetor contendo todo histórico de estados do sistema e sua condição inicial $x(0)$. Caso contrário, o sistema é dito não observável. A condição que determina se o sistema é ou não observável é feita através da análise da sua matriz de observabilidade. Se esta possuir posto n , o sistema é dito observável:

$$M = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ C^{n-1}G \end{bmatrix} \quad (7)$$

Se um sistema é observável, então é possível alocar arbitrariamente os pólos da dinâmica do erro de um observador de estados. Porém, dependendo da posição destes pólos os ganhos do observador podem ser demasiadamente elevados e a precisão necessária pode tornar a alocação impraticável.

2.4 Projeto de Observadores em Tempo Discreto

Verificada a condição de observabilidade do sistema, caso este seja observável, é possível projetar um observador que forneça informações a respeito das variáveis de estado não acessíveis para medição direta. O projeto do observador consiste basicamente em calcular um vetor constante L de modo que a resposta transitória do observador seja mais rápida (normalmente 5 a 10 vezes, pois dinâmicas muito mais rápidas do observador os tornam mais suscetíveis a ruídos que podem deteriorar a estimação) que a resposta da planta controlada, a fim de resultar em uma estimação precisa do vetor de estados e o controlador aplicado ao sistema receba os dados estimados instantaneamente. A Figura 2 ilustra esta abordagem.

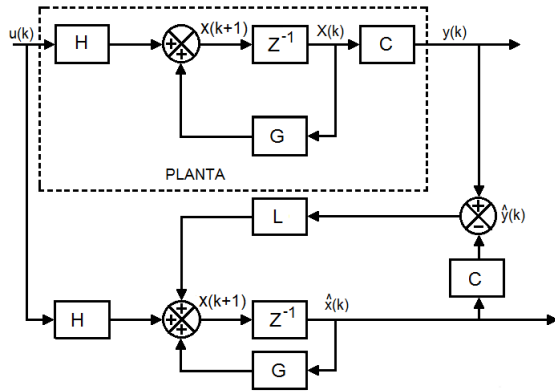


Figura 2: Diagrama de blocos do sistema com observador de estados

Considere uma planta na forma das equações (5) - (6) e um sistema em espaço de estados de tempo discreto, onde $\hat{x}$ e $\hat{y}$ indicam, respectivamente, o estado e a medida estimada do sistema real.

$$\hat{x}(k+1) = G\hat{x}(k) + Hu(k) \quad (8)$$

$$\hat{y}(k) = C\hat{x}(k) \quad (9)$$

O modelo incluindo os ganhos do observador apresenta a seguinte forma:

$$\hat{x}(k+1) = G\hat{x}(k) + L(y(k) - \hat{y}(k)) + Hu(k) \quad (10)$$

$$\hat{y}(k) = C\hat{x}(k) \quad (11)$$

A dinâmica do erro ($\tilde{x}$) de estimação dos estados é então descrita por:

$$\tilde{x}(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) \quad (12)$$

Substituindo as equações (5) e (8) em (12).

$$\tilde{x}(k+1) = (G - LC)\tilde{x}(k) \quad (13)$$

O projeto de observadores de estado consiste em determinar os valores de L para resultar em uma equação característica desejada, ou que $(G - LC)$ tenha os autovalores desejados. A equação (14) representa a equação característica do observador.

$$\det[zI - (G - LC)] \quad (14)$$

Determinando a equação (14) e conhecendo-se a equação característica desejada, obtida através dos pólos desejados em malha fechada, é possível determinar o vetor L , que representa o ganho do observador

3 Resultados

A execução deste trabalho consistiu de quatro etapas principais. Primeiramente extraiu-se o modelo matemático em tempo contínuo do sistema, via espaço de estados. Posteriormente, o circuito foi montado experimentalmente em conjunto com a placa *Arduino* e realizada a comunicação com o software *Scilab*. Em seguida foi projetado o observador com as informações da saída medida do sistema. Por fim, o observador foi implementado computacionalmente para obtenção do estado estimado.

Na Tabela 1 encontram-se os componentes utilizados para a montagem experimental do circuito.

Tabela 1: Componentes do Circuito

R_1 (Ω)	R_2 (Ω)	C_1 (μF)	C_2 (μF)	V_i (V)
980	2700	47	470	5

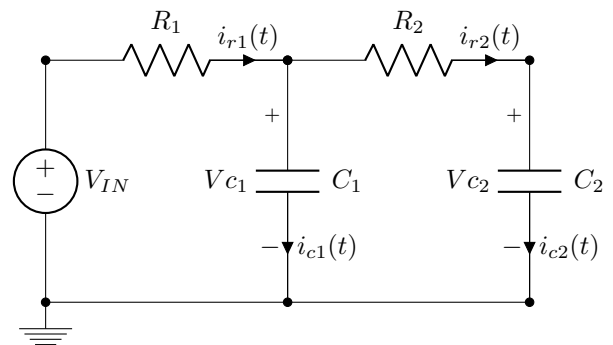


Figura 3: Circuito do projeto

Para obtenção do modelo em espaço de estados do circuito, considerou-se como variáveis de estado do sistema as tensões em C_1 e C_2 . Utilizando-se as leis de *Kirchoff* é possível representar o modelo do circuito em espaço de estados.

$$\begin{bmatrix} \frac{dV_{c1}}{dt} \\ \frac{dV_{c2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(R_1 + R_2)}{C_1 R_1 R_2} & \frac{1}{R_2 C_1} \\ \frac{1}{C_2 R_2} & \frac{-1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{c1} \\ V_{c2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} \\ 0 \end{bmatrix} V_i \quad (15)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_{c1} \\ V_{c2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Substituindo os valores de R_1 , R_2 , C_1 e C_2 na equação (15):

$$\begin{bmatrix} \frac{dV_{c1}}{dt} \\ \frac{dV_{c2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29.59 & 7.88 \\ 0.788 & -0.788 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{c1} \\ V_{c2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21.71 \\ 0 \end{bmatrix} V_i \quad (17)$$

Para utilização da representação matemática do circuito no computador fez-se necessário obter sua representação em espaço de estados na forma discreta. Utilizando $T = 0,01s$ de forma reduzir a perda de informação sobre o sinal medido, obteve-se o modelo discreto do sistema através das equações (18) - (19).

$$\begin{bmatrix} X_1(k+1) \\ X_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7441 & 0.06794 \\ 0.006794 & 0.9924 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1879 \\ 0.0007748 \end{bmatrix} V_i \quad (18)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \end{bmatrix} \quad (19)$$

Verificou-se que o sistema é observável, o que torna viável o projeto de observador para o sistema, ou seja:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0.0068 & 0.9924 \end{vmatrix} = -0.0068 \neq 0 \quad (20)$$

A Figura 4 mostra a resposta do sistema para uma tensão de entrada 5 V. Através desta, foram obtidas as especificações para o projeto do observador.

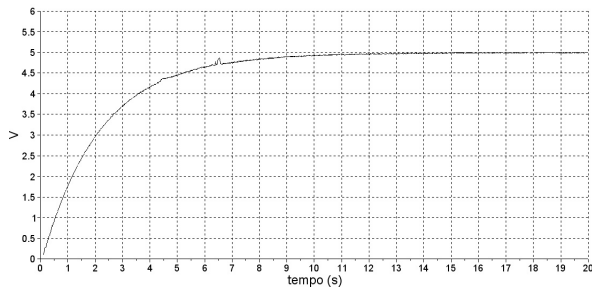


Figura 4: Tensão de saída em C_2

Da Figura 4, observa-se que o tempo de acomodação da saída do sistema foi de 9,2 s. Desta forma, projetou-se o observador para que o mesmo tivesse uma resposta dez vezes mais rápida que esta (0,92s). Assim, obteve-se um polo desejado em s de $s_1 = -4,347$ rad/s, como o sistema se trata de um sistema de ordem 2 sem zeros na função de transferência, o segundo pólo foi alocado de forma que não influenciasse na resposta desejada, ou seja fez-se $s_2 = -43,47$ rad/s.

Como o projeto do observador será realizado para sistema discreto, os polos do observador devem estar situados no plano z. Para tanto utiliza-se a transformação: $z = e^{sT}$, com $T = 0,01s$, o

que fornece: $z_1 = 0,9574$ e $z_2 = 0,644$. A equação característica desejada no plano z fica:

$$z^2 - 1.6014z + 0.6165 = 0 \quad (21)$$

Utilizando (14), é possível obter a equação característica do sistema em função dos ganhos L do observador.

$$z^2 + (l_2 - 1.7365)z + 0.006794l_1 - 0.7441l_2 + 0.7379 = 0 \quad (22)$$

A equação (23) apresenta o vetor de ganhos do observador.

$$L = \begin{bmatrix} -3.0714 \\ 0.1351 \end{bmatrix} \quad (23)$$

A Figura 5 apresenta o diagrama de blocos implementado no Xcos.

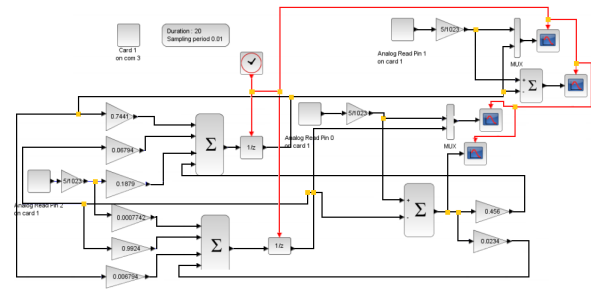


Figura 5: Diagrama de blocos do sistema a ser observado

A fim de validar os resultados, foi medida a saída no capacitor C_1 e comparada com a saída estimada. O resultado pode ser visto na Figura 6.

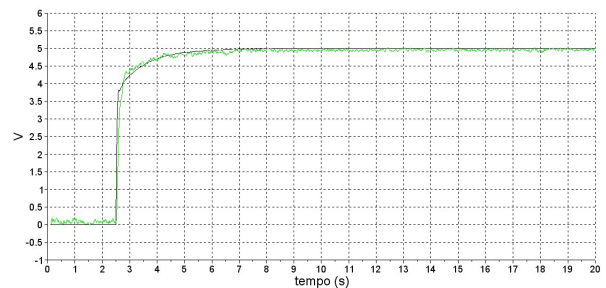


Figura 6: Saída medida x saída estimada

A curva em verde representa a saída medida do circuito através do *Arduino* e a curva em preto representa a saída estimada do estado X_1 . Pode-se verificar que o observador de estados se mostrou eficiente, estimando com precisão a tensão de saída no capacitor C_1 .

A Figura 7 mostra a diferença entre a saída real e a saída estimada.

Analisando a Figura 7 pode-se verificar a velocidade em que o erro vai a zero, corroborando a precisão da estimação em relação à saída real do circuito.

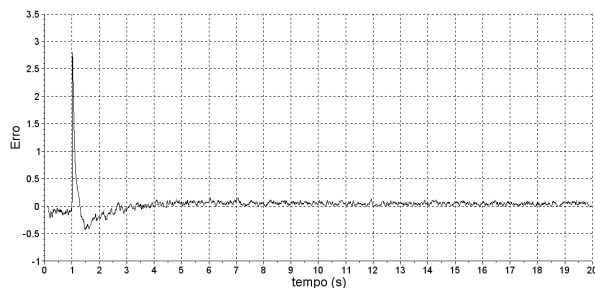


Figura 7: Erro de Observação

Como análise final, verificou-se se o observador de estados atingiu a especificação de desempenho (tempo de acomodação a 2% igual a 0,92s), verificando o tempo em que a saída estimada do estado X_2 chega ao regime permanente.

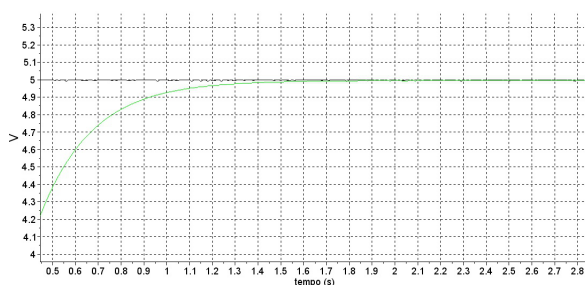


Figura 8: Saída X_2 observador

Analisando a Figura 8 pode-se verificar que a saída estimada do estado X_2 , apresenta um tempo de acomodação a 2% de 0,92s, dez vezes menos o tempo de acomodação medido anteriormente, atingindo a especificação de desempenho proposta.

Sendo assim, verifica-se que o observador de estados possui grande eficácia e é uma ferramenta muito útil para aplicações em sistemas que possuem variáveis de estado desconhecidas. O *Arduino* também mostrou-se uma importante ferramenta, com medidas precisas e permitindo a comunicação entre circuito e modelo matemático, o que nas aplicações atuais tem grande importância e aplicabilidade.

4 Conclusões

Neste trabalho foi proposto o projeto e aplicação de um observador de estados a um circuito *RC*, por ser um circuito que possui duas variáveis de estado que podem ser medidas. Assim foram tomadas as medidas de um dos estados para o projeto do observador, e este foi utilizado para estimar a saída da variável de estado que não foi medida anteriormente. Os resultados mostraram grande precisão do observador, que apresentou uma rápida resposta e atendeu às especificações de projeto. Outro ponto positivo do trabalho foi a utilização do *Arduino*, que através da comunicação

com o *software Scilab* permite a aquisição das medidas em tempo real de circuitos físicos, tornando as comparações mais precisas.

Este trabalho mostra que a teoria dos observadores de estado pode ser ampliada para problemas reais de sistemas que possuem variáveis de estado não-mensuráveis diretamente, a fim de obter seu comportamento computacionalmente com precisão, permitindo tomar as ações de controle desejadas para o monitoramento do sistema.

Agradecimentos

Agradecemos a Deus, ao professor Thiago Chagas pela oportunidade de desenvolver este trabalho e à Universidade Estadual de Santa Cruz.

Referências

- Bianco, A. (2009). *Filtros de Kalman robustos para sistemas dinâmicos singulares em tempo discreto*, PhD thesis, Ph. D. dissertation, Escola de Engenharia de São Carlos-USP.
- Campos, J. C. T. (2004). *Filtragem robusta para sistemas singulares discretos no tempo*, PhD thesis, Tese de doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Cerqueira, M. M. and Llus, S. (2010). Observadores de estados para sistemas de medição indireta e controle rlqd-ga.
- Ellis, G. (2002). *Observers in control systems: a practical guide*, Academic press.
- Minotti, C. (2008). *Estimador fuzzy de velocidade para motores de indução trifásicos usando abordagem sensorless*, PhD thesis, Universidade de São Paulo.
- Ogata, K. (1995). *Discrete-time control systems*, Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ.
- Oppenheim, A. V. (2010). *Sinais e sistemas*, Prentice-Hall.