

SISTEMA DE CONTROLE DE ALOCAÇÃO DE ZEROS EM MALHA ABERTA VIA LMI

CRISTIANO QUEVEDO ANDREA*, EDSON ANTONIO BATISTA*, LUCIANA CAMBRAIA LEITE*, EDVALDO ASSUNÇÃO†

*UFMS - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul,
FAENG - Faculdade de Engenharias, Arquitetura e Urbanismo e Geografia
Caixa Postal 549, 79070-900, Campo Grande, MS, Brasil

†UNESP - Univ Estadual Paulista
Departamento de Engenharia Elétrica
15385-000, Ilha Solteira, São Paulo, Brasil.

Emails: cristiano.andrea@ufms.br, edson.batista@ufms.br,
luciana.cambracia@ufms.br, edvaldo@dee.feis.unesp.br

Abstract— A methodology of zeros placement for open loop SISO continuous-time dynamic systems is proposed in this work. A parallel controller with the plant is used in order to modify the overall position of the zeros associated with augmented system. In other words, the controller parameters modify the zero positions. Consequently, by tuning these parameters, the positions of the zeros can be modified. The tuning technique is formulated in terms of Linear Matrix Inequalities (LMIs). A numerical example, that illustrates how the overall performance can be degenerated by the position of the open loop zeros, shows the effectiveness of the proposed condition, as well as its importance.

Keywords— Zeros placement, LMIs, Open Loop, Control system.

Resumo— Neste trabalho é proposto uma metodologia de alocação dos zeros em malha aberta aplicada em sistemas dinâmicos SISO contínuos no tempo. Neste contexto estuda-se situações no qual as posições destes zeros afetem o desempenho especificado em projeto para elaboração de controladores. Utiliza-se um controlador em paralelo com a planta para que por meio de sintonia do mesmo, a posição dos zeros sejam alteradas e com isso os requisitos de projeto sejam obtidos na resposta do sistema. A técnica é formulada em termos de desigualdades matriciais lineares. Um exemplo numérico, que ilustra como o desempenho da saída pode ser afetado pela posição dos zeros de malha aberta, demonstra a potencialidade da metodologia de sistema de controle proposta, bem como sua importância.

Palavras-chave— Alocação de Zeros, LMIs, Malha Aberta, Sistema de Controle.

1 Introdução

Em sistemas de controle a estabilidade é o objetivo principal durante o projeto do controlador (Chen, 1995). Em conjunto com a estabilidade, tem-se o erro de regime em estado estacionário como outro fator importante na regulação de saída de sistemas de controle em malha fechada. Neste contexto, pode-se também inserir ao projeto índices de desempenho na regulação da resposta, tais como: tempo de pico, porcentagem de overshoot e tempo de estabelecimento, vide (Nise, 2012) para maiores detalhes sobre estes índices.

Usando a teoria de sistemas lineares, sabe-se que, caso o sistema seja controlável, é possível alocar os polos de malha fechada em qualquer posição do plano complexo s (em geral, para obter estabilidade assintótica e desempenho do sistema de controle, aloca-se os polos no semiplano esquerdo). Na condição da presença de zeros ou outros polos próximos aos polos de malha fechada de projeto, o desempenho pode ser comprometido (Ogata, 2010).

Neste contexto os zeros presentes no sistema podem ser oriundos da inserção de controladores de realimentação dinâmica da saída, ou pela utilização de estimadores de estados ou zeros da planta. Na situação no qual as posições destes zeros interfiram no desempenho da resposta do sistema, deve-se refazer o projeto dos controladores de modo a obter um mapeamento de zeros em malha fechada adequado.

Entretanto, as posições dos zeros da planta não podem ser alteradas por meio de técnicas de projeto de controladores. Dessa forma, nos casos em que as posições dos zeros interferem no desempenho do sistema de controle malha fechada, necessita-se de uma maneira alternativa para modificar as posições dos zeros. Em (Assunção et al., 2007a), é abordada uma metodologia de alocação de zeros aplicada ao sistema de controle via LMI. Neste caso a modificação dos zeros foi proposta para solucionar o problema de zeros que surgem quando se utiliza a realimentação dinâmica da saída. E tal trabalho não possibilita solucionar os efeitos de perda de desempenho do sinal de saída que podem ser causados pela presença de zeros de plantas próximo aos polos dominantes do sistema de controle.

Os zeros também apresentam função importante em algumas metodologias de sistemas de controle. Em (Moura, 2012) é abordada a análise dos zeros da função de transferência de malha aberta e ajuste de parâmetros de controladores suplementares de amortecimento acoplado ao dispositivo FACTS (do inglês, *Flexible AC Transmission Systems*). A utilização da posição dos zeros para o projeto de rastreamento de sinais foi proposto em (Assunção et al., 2007b) e em (Hollmann, 2015), a alocação de zeros foi utilizada para projeto de filtros digitais.

Neste trabalho é proposta uma metodologia de modificação da posição dos zeros de malha aberta cujo objetivo é atingir especificações de projeto nos casos

em que os zeros de malha aberta limitam o desempenho do sistema de malha fechada. Assim, no trabalho aborda-se a modificação de zeros no semiplano complexo s esquerdo, mas o método proposto também pode ser aplicado para zeros no semiplano complexo s direito. A metodologia proposta não possibilita a modificação dos zeros da planta, os quais estão relacionados com a estrutura da mesma.

No projeto insere-se um controlador em paralelo com a planta de modo que os zeros do arranjo apresentem posição compatível com o mapeamento de polos de malha fechada, e consequentemente não afetando a regulação da saída do sistema. A metodologia é descrita na forma de LMIs (do inglês, Linear Matrix Inequalities). Posteriormente, por meio de simulação computacional demonstra-se potencialidade e viabilidade da metodologia de sistema de controle proposta.

2 Definição do Problema

Considere um sistema linear e invariante no tempo descrito na forma de espaço de estado como,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t),\end{aligned}\quad (1)$$

sendo matrizes $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $B \in \mathcal{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathcal{R}^{1 \times n}$ e $D \in \mathcal{R}$, $x(t)$ o vetor de estados do sistema, $u(t)$ é a entrada de controle de atuação e $y(t)$ é a saída do sistema.

Observação 1 Admite-se neste trabalho que o sistema dinâmico dado em (1) apresente zero(s) no semiplano esquerdo do plano complexo s , os quais podem ser calculados por (Franklin et al., 2013):

$$\det \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} = 0. \quad (2)$$

Na literatura de sistema de controle existem diversas metodologias para regular o sinal de saída, tais como: realimentação dos estados, realimentação da saída, controle preditivo, controle adaptativo, controle com modos deslizantes, entre outros. Em um sistema controlável pode-se atingir em malha fechada as especificações de projeto utilizando teorias de controle com alocação dos polos.

No projeto do sistema de controle com alocação de polos, fixa-se um par de polos complexos conjugados em um ponto do semiplano complexo s esquerdo que proporcione especificações de desempenho a saída do sistema de controle. Neste procedimento deve ser garantida a dominância dos polos de segunda ordem de projeto para que a resposta do sistema em malha fechada atenda as especificações estabelecidas.

Entretanto não são todas as metodologias de sistemas de controle que permitem ao projetista garantir dominância de polos em malha fechada. Um fator que pode dificultar o projeto de um sistema de controle é a presença de zeros próximos à posição dos polos dominantes. Neste contexto considere o seguinte problema.

Problema 1 Projetar um controlador que permita obter regulação da resposta para plantas com zeros nas vizinhanças dos polos dominantes de malha fechada. As posições dos polos de malha fechada são definidas a partir das especificações de transitório, tais como: tempo de estabelecimento, tempo de pico e porcentagem de overshoot.

Observação 2 O diagrama de blocos do sistema de controle usado para resolver o Problema 1 é ilustrado na Figura 1. Tal sistema possibilita a modificação da posição dos zeros no semiplano complexo s esquerdo do sistema em malha aberta, impedindo que a posição dos zeros da planta interfira na regulação da saída da planta.

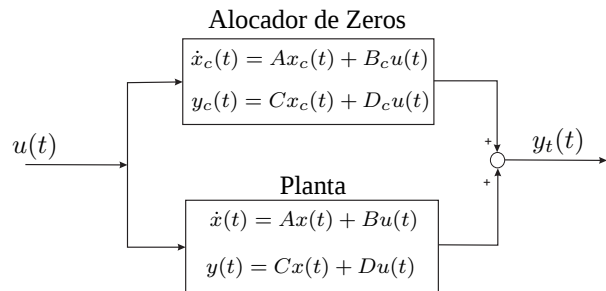


Figura 1: Sistema de controle para modificação dos zeros.

Para o diagrama de blocos ilustrado na Figura 1 adota-se a variável de estado $x_t(t) = x(t) + x_c(t)$, assim tal sistema pode ser descrito na forma de espaço de estado como,

$$\begin{aligned}\dot{x}_t(t) &= Ax_t(t) + (B + B_c)u(t), \\ y_t(t) &= Cx_t(t) + (D + D_c)u(t),\end{aligned}\quad (3)$$

sendo $B_c \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ e $D_c \in \mathcal{R}$.

Reescrevendo-se (3) obtém-se,

$$\begin{aligned}\dot{x}_t(t) &= A_t x_t(t) + B_t u(t), \\ y_t(t) &= C_t x_t(t) + D_t u(t),\end{aligned}\quad (4)$$

sendo,

$$A_t = A, \quad B_t = B + B_c, \quad C_t = C \quad \text{e} \quad D_t = D + D_c.$$

Dessa forma, o polinômio característico de (4) é:

$$p(s) = \det(sI - A)^{-1}, \quad (5)$$

e para obter os polos deste sistema deve-se resolver a equação $p(s) = 0$. Note que os polos do sistema (4) apresenta os mesmos polos da planta. Entretanto, a posição dos zeros para o sistema resultante da associação em paralelo é diferente em relação a posição dos zeros da planta.

Na situação no qual a posição dos zeros da planta interfere do desempenho da saída em malha fechada pode-se utilizar o sistema de controle ilustrado na Figura 1 para modificar o mapeamento de zeros. A modificação da posição dos zeros é realizada pela escolha adequada dos parâmetros B_c , D_c descritos em

(3). Neste trabalho propõe-se o Teorema 1 para o projeto via LMIs da modificação da posição dos zeros objetivando-se atingir especificações de transitório em projeto solucionando-se o Problema 1.

Teorema 1 Suponha que o sistema descrito em (1) é assintoticamente estável, e considere o Problema 1. Suponha que a matriz D_c e os escalares q_z e ρ_z são dados, com $D_c \neq 0$. Dessa forma, se existir uma matriz $Q = Q' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que

$$\begin{bmatrix} -\rho_z Q & QA - WD_t^{-1}C + q_z Q \\ A'Q - C'D_t^{-1}W' + q_z Q & -\rho_z Q \end{bmatrix} < 0, \quad (6)$$

sendo $W = QB_t \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Então, os zeros do sistema (4) são alocados em uma região limitada por um círculo de raio ρ_z com centro em $(-q_z, 0)$, como ilustrado na Figura 2.

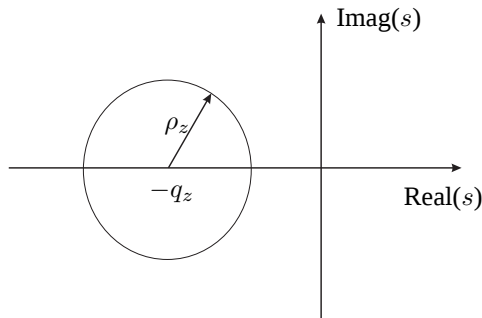


Figura 2: Região para alocação dos zeros com raio ρ_z e centro em $(q_z, 0)$ no plano complexo s .

Prova: A determinação da posição dos zeros de uma dado sistema descrito em espaço de estado pode ser obtido solucionando-se (2). Os zeros do sistema dado em (4) pode ser determinado por,

$$\det \begin{bmatrix} sI - A_t & -B_t \\ C_t & D_t \end{bmatrix} = 0. \quad (7)$$

Multiplicando a última coluna por D_t^{-1} , sendo que $\det[D_c] \neq 0$ por consideração inicial, e adicionando-se à primeira coluna o produto de C_t pela última coluna, tem-se:

$$\det \begin{bmatrix} sI - A_t + B_t D_t^{-1} C_t & -B_t D_t^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0, \quad (8)$$

$$\det [sI - A_t + B_t D_t^{-1} C_t] = 0.$$

Assim, determina-se a posição dos zeros do sistemas calculando-se os autovalores da matriz $A_x = A_t - B_t D_t^{-1} C_t$.

Para que os autovalores de uma dada matriz $\tilde{A}$ estejam alocados em uma região do plano s limitados por uma circunferência de raio ρ_a com centro em $(-q_a, 0)$, deve existir uma matriz Q , $Q = Q' > 0$, tal que a seguinte inequação seja satisfeita (Chilali and Gahinet, 1996):

$$\begin{bmatrix} -\rho_a Q & Q\tilde{A} + q_a Q \\ \tilde{A}'Q + q_a Q & -\rho_a Q \end{bmatrix} < 0. \quad (9)$$

Substituindo-se a matriz $\tilde{A}$ pela matriz A_t em (9), com a manipulação de variável $W = QB_t$, obtém-se a LMI descrita em (6). $\square$

O Teorema 1 possibilita a alocação de zeros do sistema descrito em (4) visando a regulação do sinal de saída da planta. Note que teoria descrita neste trabalho não realiza a alocação de zeros do sistema físico, os quais representam características dinâmicas do mesmo.

3 Exemplo de Aplicação

Considere o seguinte sistema descrito na forma de espaço de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -40 & -80 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 20 \end{bmatrix} x(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Para a regulação da saída em malha fechada considerando uma entrada degrau unitária do sistema dado em (10) tem-se como especificações de projeto os seguintes itens,

- Tempo de estabelecimento: 0,16 segundos.
- Porcentagem de overshoot: 15%.

Adota-se a realimentação de estados, $u(t) = -Kx(t)$, como opção para sistema de controle visando obter a resposta especificada em projeto. Ressalta-se que a correção de erro de regime não foi abordada como requisito para o sistema de controle. O sistema de controle é apresentado no diagrama a blocos da Figura 3.

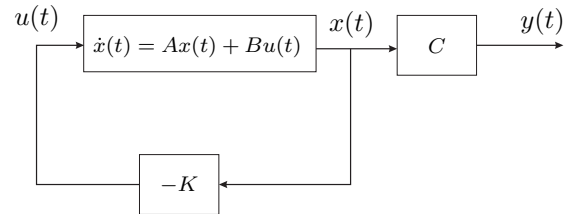


Figura 3: Sistema de controle de realimentação dos estados.

As especificações de projeto são atingidas via realimentação de estados com alocação de polos em $s_{1,2} = -25 \pm j41,38$. Assim utilizando a Fórmula de Ackermann determina-se o seguinte controlador.

$$K = \begin{bmatrix} 10 & 2257,31 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

A Figura 4 ilustra a resposta ao degrau unitário do sistema de controle de realimentação de estados projetado. Para aplicação da entrada do tipo degrau, alterou-se a lei de controle ilustrada na Figura 3 para $u(t) = r(t) - Kx(t)$, sendo $r(t)$ a entrada degrau.

A resposta do sistema de controle ilustrada na Figura 4 para a entrada degrau unitária apresenta tempo de estabelecimento de 0,153 segundos. A porcentagem de overshoot deste sistema é de 86,8%. Neste

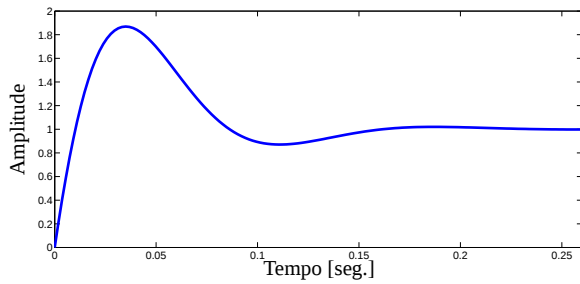


Figura 4: Resposta normalizada ao degrau unitário.

caso o tempo de estabelecimento de projeto foi atingido, mas a porcentagem de overshoot foi diferente do especificado em projeto, que foi de 15%.

Para entender o motivo da diferença entre a especificação e o resultado da Figura 4, é necessário avaliar a posição dos zeros do sistema (10) para o valor de K dado em (11). Note que o sistema em malha fechada apresenta um zero em -20 e polos $s_{1,2} = -25 \pm j41,38$. Com isso, essa diferença deve-se ao fato da proximidade entre as partes reais dos polos e do zero, como pode ser visualizado na Figura 5.

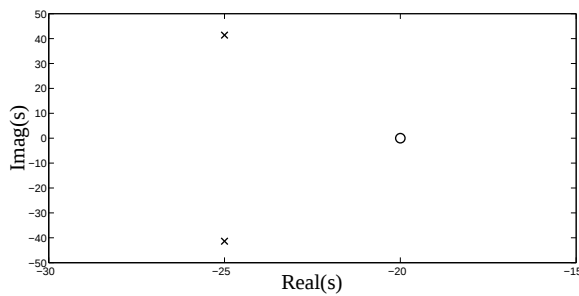


Figura 5: Mapeamento de polos e zeros.

Então, utiliza-se o Teorema 1 para alocar o zero distante dos polos de malha-fechada. Considera-se a região do círculo para alocação dos zeros com centro $q_z = 50$ o $\rho_z = 15$. Utiliza-se também o parâmetro $D_c = 1$ e obtém o seguinte resultado,

$$B_c = \begin{bmatrix} -4,96 \\ 2,49 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Neste cenário, os zeros de malha direta do sistema ilustrado na Figura 1 considerando-se a planta dada em (10), são:

$$z_1 = -35,97 \text{ e } z_2 = -50 \quad (13)$$

Observa-se que inicialmente a planta apresenta um zero de malha aberta. Entretanto, a solução do Teorema 1 apresenta dois zeros de malha aberta para o sistema ilustrado na Figura 1. Este fator acontece pois D_t não pode ser nulo ou possuir determinante igual a zero. Após a determinação de B_c projeta-se o controlador de realimentação de estado para o sistema descrito em (4). Neste contexto utiliza-se as mesmas especificações de projeto para determinação do controlador K . Assim, por meio da utilização da fórmula de

Ackermann determina-se o controlador, o qual é dado por,

$$K = \begin{bmatrix} -39,52 & -58,77 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

A Figura 6 ilustra o sistema de realimentação de estados utilizando a metodologia proposta de modificação dos zeros.

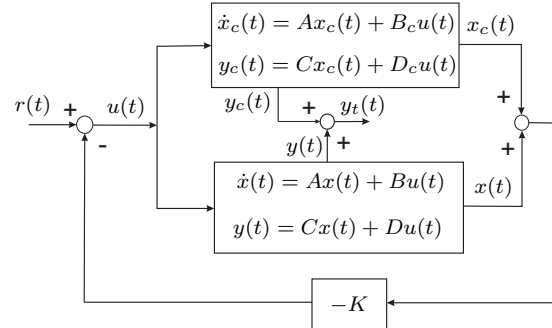


Figura 6: Sistema de controle com modificação dos zeros.

A Figura 7 ilustra a resposta ao degrau unitário do sistema de controle de realimentação de estados projetado para o sistema com modificação da posição dos zeros de malha aberta e a inserção de um zero com o controlador dado em (14).

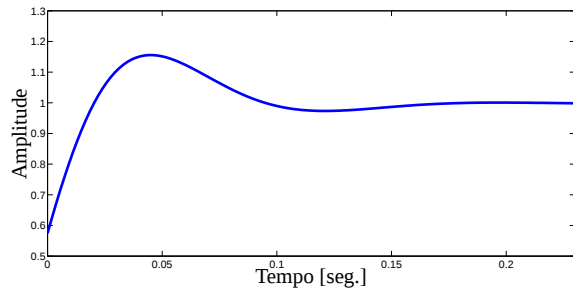


Figura 7: Resposta ao degrau unitário.

A resposta do sistema de controle ilustrada na Figura 7 para a entrada degrau unitária apresenta tempo de estabelecimento de 0,153 segundos. A porcentagem de overshoot deste sistema é de 15,9%. Neste caso, com os zeros mais distantes dos polos dominantes de malha fechada, pode ser considerado que tanto o tempo de estabelecimento quanto a porcentagem de overshoot de projeto foram atingidos.

4 Conclusão

Neste trabalho foi proposto uma metodologia para alocação de zeros em malha aberta para sintonia de controladores em regulação de variáveis de saída. Por meio da análise dos resultados, verifica-se que esta metodologia pode ser utilizada para projeto de sistema de controle em plantas que tenham zero em sua modelagem e que de algum modo a posição deste zero dificulte o desempenho do sistema de controle.

A metodologia é descrita na forma de LMIs, e quando factível, pode ser facilmente solucionados por meio de algoritmos de convergência polinomial disponíveis na literatura (Boyd et al., 1994), (Gahinet, P. and Nemirovski, A., 1997).

Referências

- Assunção, E., Andrea, C. Q. and Teixeira, M. C. M. (2007a). Alocação de zeros aplicada a sistemas de controle via LMI, *SBA Controle & Automação* **18**(1): 55–66.
- Assunção, E., Andrea, C. Q. and Teixeira, M. C. M. (2007b). H_2 and H_∞ optimal control for the tracking problem with zero variation, *IEEE Proceedings. Control Theory and Applications* **1**: 682–688.
- Boyd, S. P., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). Linear matrix inequalities in system and control theory, *Philadelphia, PA: SIAM*.
- Chen, C. T. (1995). *Linear System Theory and Design*, Oxford University Press, Inc.
- Chilali, M. and Gahinet, P. (1996). H_∞ Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(3): 358–367.
- Franklin, G. F., Powell, J. D. and Emami-Naeini, A. (2013). *Sistemas de Controle para Engenharia*, 6 edn, bookman.
- Gahinet, P. and Nemirovski, A. (1997). The projective method for solving linear matrix inequalities, *Mathematical Programming* **77**(1): 163–190.
- Hollmann, Luke J. ; Stevenson, R. L. (2015). Pole-zero placement algorithm for the design of digital filters with fractional-order rolloff, *Signal Processing* **107**: 218–229.
- Moura, R. F. (2012). *Análise dos Zeros da FTMA e Ajuste de Parâmetros de Controladores Suplementares de Amortecimento Acoplado ao Dispositivo FACTS UPFC*, Tese de Doutorado, Unesp, Campus Ilha Solteira-SP.
- Nise, N. S. (2012). *Engenharia de Sistemas de Controle*, 6 ed. edn, LTC.
- Ogata, K. (2010). *Engenharia de Controle Moderno*, 5 edn, Pearson.