

USO DE CURVAS PRINCIPAIS HIERÁRQUICAS NA CLASSIFICAÇÃO DE SINAIS SONAR PASSIVO

THIAGO CASSIN DE CARVALHO OLIVEIRA¹, JOÃO BAPTISTA DE OLIVEIRA E SOUZA FILHO^{1,2}.

¹Laboratório de Processamento de Sinais e Instrumentação (LAPSI), Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica (PPEEL), Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckov da Fonseca (CEFET/RJ)

Avenida Maracanã 229, Maracanã, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

² Departamento de Engenharia Eletrônica e de Computação (DEL), Escola Politécnica (POLI), Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

E-mails: thiago_cassin@yahoo.com.br, jbfilho@poli.ufrj.br

Abstract— The classification and recognition of relevant patterns in military tasks have strong importance and complexity. In this context, automatic classification systems may provide relevant aid tools to support the decision-making process. In the present work, an automatic classification system of passive sonar signals based on principal hierarchical curves is proposed. For this technique, the extraction of the principal curves is performed using the “*k-segment hard*” algorithm, followed by a hierarchical data partitioning process based on their projections on the prototype curves. The system was evaluated using real signals radiated from 28 ships belonging to 8 classes. Using the proposed technique, classification efficiencies on the order of 95.1% were achieved, as well as the computational cost were reduced up to 35,7 %, as compared to the classical principal curve approach.

Keywords— Principal curves, contact classification, feature extraction, pattern recognition, passive sonar

Resumo — A classificação e o reconhecimento de padrões relevantes em tarefas militares possuem uma considerável importância e complexidade. Neste contexto, sistemas de classificação automática podem prover importantes ferramentas de suporte ao processo decisório. No presente trabalho é proposto um sistema automático de classificação de sinais de sonar passivo baseado em curvas principais hierárquicas. Para esta técnica, a extração das curvas principais é realizada através do algoritmo “*k-segment hard*”, seguido de um processo de particionamento hierárquico dos dados com base em suas projeções em curvas protótipo. O sistema foi avaliado utilizando sinais reais irradiados de 28 navios pertencentes a 8 classes. Utilizando a técnica proposta, eficiências de classificação da ordem de 95,1% foram alcançadas, bem como o custo computacional reduzido em até 35,7%, em relação à abordagem clássica das curvas principais.

Palavras-chave— Curvas principais, classificação de contatos, extração de características, reconhecimento de padrões, sonar passivo

1 Introdução

O sistema de sonar passivo é empregado com a finalidade de viabilizar a detecção e a classificação de sinais acústicos em ambientes submarinos, desempenhando um papel de fundamental importância nas atividades militares em equipamentos de vigilância ao redor do mundo. Através da aquisição e o adequado processamento destes sinais, é possível identificar possíveis ameaças, que são denominadas na área militar como *contatos*. A utilização da técnica passiva ao invés da ativa se faz necessária, visto que o uso da última pode tornar a referida embarcação visível a sistemas de detecção de outras embarcações, o que não é desejável.

A análise dos sinais captados em um sistema de sonar passivo normalmente é dividida em três estágios: detecção, classificação e localização do contato (Moura, 2013). A tarefa de detecção consiste em verificar a presença de sinais acústicos de um contato de interesse, o qual normalmente vem contaminado por um ruído de fundo. Uma vez que um contato seja detectado, é necessária sua classificação, para posterior identificação. Desta maneira, é possível avaliar se o

contato em questão representa uma ameaça ou se deve ser desprezado.

A classificação de contatos é uma tarefa complexa, o que demanda o uso de técnicas eficazes na construção de sistemas automáticos de classificação. A técnica de curvas principais hierárquicas (Zhang et al., 2011) é atrativa a construção de tais sistemas, visto conjugar a característica não-linear das curvas principais, a qual permite uma modelagem mais acurada das classes de interesse, com uma estrutura hierárquica para o particionamento dos dados. Face à última característica, são esperados ganhos potenciais, principalmente com relação ao custo computacional envolvido, em especial em relação aos algoritmos de curvas principais usuais (Verbeek et al., 2002). O uso da técnica de curvas principais em sistemas de sonar passivo já foi explorado em trabalhos anteriores (Rocha et al., 2011), (Souza filho et al., 2011) e (Fernandes et al., 2015), porém, até o nosso conhecimento, o uso da técnica em questão não foi avaliado neste contexto.

Este artigo é organizado como se segue: na Seção 2 é apresentada uma breve abordagem da técnica de curvas principais e do processo de classificação hierárquica proposto. É também detalhado o projeto do classificador proposto, a base de dados utilizada e os cri-

térios de formação dos conjuntos utilizados para a extração, dimensionamento e a avaliação do sistema proposto. Na Seção 3 são apresentados os resultados obtidos. Por fim, são discutidas as conclusões e os possíveis trabalhos futuros na Seção 4.

2 Projeto do classificador

2.1 Curvas Principais

As curvas principais foram introduzidas e definidas por Trevor Hastie (Hastie, 1984) e consistem numa generalização não-linear do método de análise de componentes principais (Delicado, 1999). Trata-se de curvas suaves que “passam” pelo meio de uma nuvem de dados, sendo esses dados constituídos por realizações de um dado conjunto de variáveis aleatórias. Assim, são capazes de fornecer um resumo dos dados, servindo como uma eficiente ferramenta de extração de características (Kégl et al., 2000).

Para a definição formal das curvas principais, considere um vetor de variáveis aleatórias $X \in R^d$, onde o valor da variável d é arbitrário. A curva principal $f(\lambda) = [f_1(\lambda), \dots, f_d(\lambda)]$ é uma função do parâmetro λ tal que:

$$f(\lambda) = E[X | \lambda_f(X) = \lambda] \quad (1)$$

onde o valor $\lambda_f(X)$ é definido de forma a minimizar a distância do vetor X a curva, e o estimador do valor esperado dos pontos projetados na curva é dado por E . Esta formulação implica que cada ponto individual da curva $f(\lambda)$ é dado pela média dos pontos que nela projetam, propriedade que é conhecida como autoconsistência.

O parâmetro de construção da curva λ é denotado como o índice de projeção de um ponto X a curva principal, e a distância deste ponto a sua projeção correspondente na curva (d_x) é dado por:

$$d_x = \inf \|x - f(\lambda)\|^2 = \|x - f(\lambda_f(X))\|^2 \quad (2)$$

Os parâmetros de distância e o índice de projeção são ilustrados na Figura 1, considerando uma população de dados e curva arbitrária.

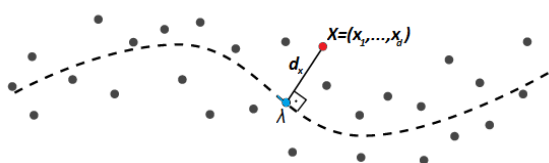


Figura 1: Exemplo de uma curva principal.
Adaptado de (Souza filho et al., 2011).

2.2 Algoritmos hierárquicos de classificação

Nos problemas de classificação, as classes podem apresentar relações de taxonomia ou dependência, de

tal forma a constituir subclasses ou superclasses (Faceli et al., 2011). Nos classificadores convencionais, não há uma relação hierárquica entre as classes, contudo, se essa relação existir, o emprego de estruturas hierárquicas pode levar ao projeto de classificadores dotados de uma maior acurácia preditiva.

A maioria dos algoritmos hierárquicos empregados para o particionamento de dados se utiliza de hiperplanos para dividir o espaço de dados em várias regiões separadas e organizadas em uma espécie de árvore. Podemos citar, entre os mais significativos, os algoritmos KD-tree (Moore e Hall., 1990) e o RP-tree (Freund et al., 2007).

No entanto, tais algoritmos se utilizam de métodos lineares para separar as estruturas existentes nos dados, que muitas vezes são intrinsecamente não-lineares. Este fato pode resultar na identificação de agrupamentos de dados menos compactos, os quais podem resultar em uma menor acurácia para os modelos baseados em tais particionamentos. Em (Zhang et al., 2011), é proposto um mecanismo para a separação dos dados visando a composição de uma estrutura hierárquica baseada em curvas principais, visando melhor refletir a estrutura dos dados quando comparados com técnicas lineares amplamente utilizadas.

2.3 Etapas de desenvolvimento do classificador

O desenvolvimento do classificador proposto possui duas etapas principais: projeto e operação. Na etapa de projeto, são extraídas curvas principais para cada uma das classes que constituem o conjunto de dados de treinamento. Considera-se para a classificação a atribuição de classes segundo o critério de menor distância, isto é, que cada dado seja rotulado pela classe para a qual a curva associada apresentou menor distância e, portanto, maior similaridade. Deste modo, dois parâmetros de projeto importantes são o quantitativo de segmentos por curva e o número de níveis ou profundidade hierárquica adotados, que possuem impacto na eficiência de classificação e no custo computacional. Em fase de operação, tão somente, são calculadas as distâncias do dado de interesse às curvas principais representantes de cada uma das classes, e realizada a classificação por meio da identificação da classe de maior similaridade a este dado. Deste modo, o quantitativo de curvas e segmentos por curva possui um impacto direto no custo computacional do sistema, o qual deve suportar operação em tempo real.

Na abordagem clássica utilizada em (Fernandes et al., 2015) e (Souza filho et al., 2011), é gerada uma curva para cada classe, composta por tantos seguimentos quanto forem os necessários para representar de forma adequada a classe em questão. A contribuição do presente trabalho consiste em, justamente, minimizar este quantitativo de segmentos através do uso de curvas múltiplas para cada classe, dispostas de forma hierárquica, porém construídas com menos seguimentos, diminuindo a complexidade de cada curva e, conseqüentemente, o custo computacional total envolvido.

A escolha do número de segmentos k utilizado na construção das curvas influencia diretamente na qualidade do particionamento das classes. Valores de k subestimados formam curvas imprecisas e representam inadequadamente o conjunto de dados, enquanto que valores de k muito altos podem gerar classificadores assimétricos e muito especializados (“overfitting”). Esta problemática é ilustrada através de diferentes ajustes de curvas principais apresentados na Figura 2.

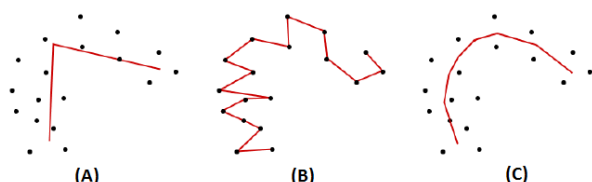


Figura 2: Curvas principais ajustadas com: (A) um valor muito reduzido de k ; (B) um valor muito alto de k , e (C) um valor adequado de k . Adaptado de (Biau e Fisher, 2011).

Nas subseções seguintes serão explicitados em maiores detalhes o algoritmo de construção de curvas principais e a estratégia de particionamento das curvas empregados.

2.4 O algoritmo “ k -segment hard”

Para a extração das curvas principais hierárquicas foi utilizado o algoritmo “ k -segment hard”, desenvolvido por Verbeek, Vassis e Klöse (Verbeek et al., 2002).

O referido algoritmo consiste em um método iterativo, que constrói as curvas principais a partir de partições dos dados. A curva principal é iniciada com um único segmento, sendo inseridos novos segmentos de reta, até que uma condição de parada seja alcançada.

Na inserção do primeiro segmento, todos os eventos do conjunto de dados são considerados definindo-se o primeiro segmento com base no componente principal dos dados a ele pertencentes (Fernandes et al., 2005). Busca-se, então, a inserção de um novo segmento, através da identificação de um novo possível agrupamento nos dados. Caso este agrupamento seja identificado, é realizado um processo de reavaliação da pertinência dos eventos aos grupos, e realiza-se a inserção de um novo segmento, que é baseado na componente principal do novo agrupamento identificado. Em sequência, realiza-se a conexão destes segmentos. Esta sistemática é repetida até que se alcance o critério de parada, que pode ser o número máximo de segmentos estipulado pelo usuário, ou quando um novo agrupamento identificado possuir menos que 3 pontos.

Cabe ressaltar que a escolha do valor de k utilizado no algoritmo “ k -segment hard” influencia diretamente na qualidade do mapeamento das classes realizado pelas curvas afetando, portanto, o processo de particionamento dos dados. Valores inadequados de k são passíveis de resultarem em classificadores de baixa capacidade de generalização.

2.5 Particionamento hierárquico dos dados por meio de curvas principais

Para a construção dos modelos de classificação baseados na técnica proposta, é utilizado o seguinte algoritmo: os dados com índice de projeção menor que a metade do comprimento da curva são reunidos em um grupo distinto que chamamos de “leftchild”, e os que possuem um índice de projeção maior que a metade do comprimento da curva, reunimos em um outro grupo que chamamos de “rightchild”. Em sequência, os novos subconjuntos “leftchild” e “rightchild” são tomados para a geração de novas curvas principais, e assim sucessivamente, até que uma profundidade requerida seja atingida. A Figura 3 ilustra este processo.

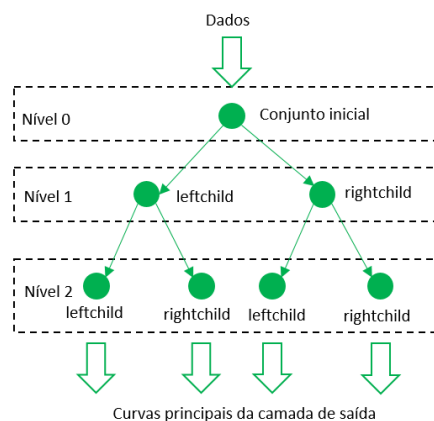


Figura 3: Ilustração do processo de particionamento e formação das curvas principais proposto (vide texto).

Dessa maneira, a quantidade de curvas de saída utilizadas para compor o classificador de uma dada classe é dada por 2^n , onde n representa a profundidade desejada. Cabe ressaltar que a complexidade computacional do método de curvas principais é proporcional ao quadrado do número de amostras (Souza filho et al., 2011).

2.6 Base de dados

Para o desenvolvimento do presente trabalho, foi utilizada uma base de dados fornecida pelo Instituto de Pesquisa da Marinha Brasileira (IPQM), que consiste de um conjunto de ruídos irradiados por 28 navios, distribuídos entre 8 classes de embarcações. A aquisição destes sinais foi realizada em uma raia de testes, a qual foi percorrida por cada navio em condições controladas de operação, totalizando 263 corridas de prova. Os sinais emitidos foram captados por um hidrofone localizado a uma profundidade de aproximadamente 45 metros, ao fundo da raia acústica.

A cadeia de pré-processamento empregada para o tratamento dos sinais adquiridos e a extração de informação relevante para fins de classificação é descrita detalhadamente em (Souza filho et al., 2011). Desse pré-processamento, resultam janelas espectrais de 557 dimensões, onde cada classe possui de 2143 a 7075 janelas. Para o desenvolvimento e a avaliação da abordagem proposta, tal conjunto de janelas espectrais foi

particionado em três conjuntos: treino, validação e teste, segundo as seguintes proporções: 70%, 10% e 20%. O primeiro conjunto foi utilizado para a extração das curvas; o segundo conjunto, para o ajuste dos parâmetros do classificador; enquanto o último, para a avaliação dos modelos.

3 Resultados

Para avaliar a metodologia proposta com relação à eficiência de classificação e quanto a uma possível redução do custo computacional de operação do classificador em relação a abordagem tradicional, foi realizada a produção de um sistema de classificação baseado em uma única curva para cada classe, adotando-se um número máximo de segmentos igual a 30, valor que foi estabelecido com base em resultados obtidos em (Fernandes et al., 2015) e (Souza filho et al., 2011). Adicionalmente, com relação a técnica proposta, dois aspectos foram investigados: (i) o efeito do quantitativo de segmentos por curva principal, e (ii) o impacto do número de níveis de particionamento dos dados considerados. Neste caso, a figura de mérito destas análises foi a eficiência de classificação de cada classe. Para a primeira análise, foram ainda consideradas curvas com, no máximo, 2, 5 e 7 segmentos e um único nível de partição. Um segundo ensaio considerou 2 níveis de partição. Os referidos resultados são sintetizados nas Figuras 4 e 5.

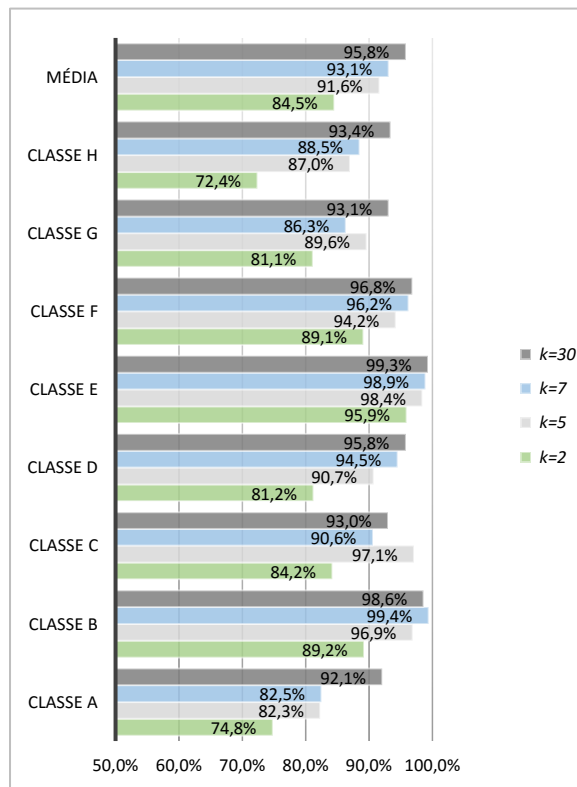


Figura 4 - Eficiências de classificação por classe e totais obtidas (partição em nível único).

Dos resultados apontados na Figura 4, cabe destacar que, para um número expressivo de classes, há

um ganho de eficiência significativo com o uso de curvas mais complexas. Este resultado era esperado, visto que tais curvas tendem a representar melhor as classes, originando, possivelmente, melhores particionamentos das classes, bem como classificadores mais eficazes. Uma exceção parcial a esta regra é a classe C, para a qual os resultados obtidos para um valor de k igual a 7 são claramente inferiores aqueles relativos a um valor de k igual a 5. Este fato sinaliza uma possível ocorrência do fenômeno de *overfitting* (Faceli et al., 2011), e destaca a necessidade de uma escolha apropriada do quantitativo de segmentos adotado em cada curva de classe.

Na Figura 5, observamos que o uso de mais um nível de partição contribuiu para um aumento das eficiências de classificação para a maior parte das classes e para todos os valores de k considerados. De forma similar à Figura 4, o incremento do valor de k conduziu a uma melhoria das eficiências de classificação, ainda que a maior parte dos ganhos observados no uso de k igual a 7 ao invés de 5 tenha se mostrado inferior àqueles observados no caso de um único nível de particionamento. Para ambos, as classes de classificação mais difícil foram a A, H e C. É ainda interessante observar que a eficiência das classes B, C, D e F é superior para o enfoque proposto com o uso de dois níveis do que o obtido pelas curvas principais ordinárias.

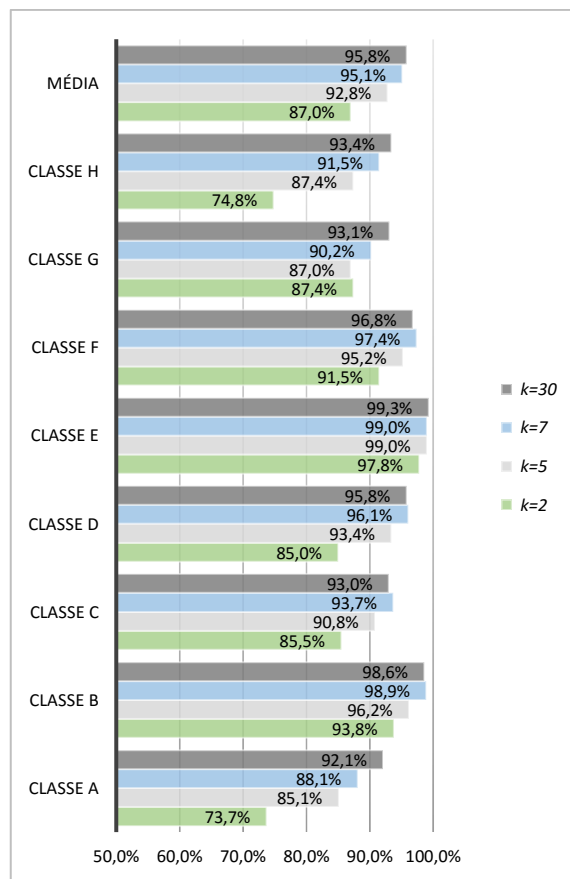


Figura 5 - Eficiências de classificação por classe e totais obtidas (partição em dois níveis).

Com o objetivo de comparar o custo computacional dos sistemas em análise, nas Figuras 6 e 7 são exibidos o quantitativo total de segmentos extraídos pelo algoritmo “*k-segment hard*” para as diferentes classes e modalidades de curvas experimentadas. Cabe ressaltar que o referido algoritmo produz curvas de forma incremental e, portanto, o número de segmentos da curva retornada pelo algoritmo é normalmente inferior ao valor máximo estabelecido ao se executar o algoritmo.

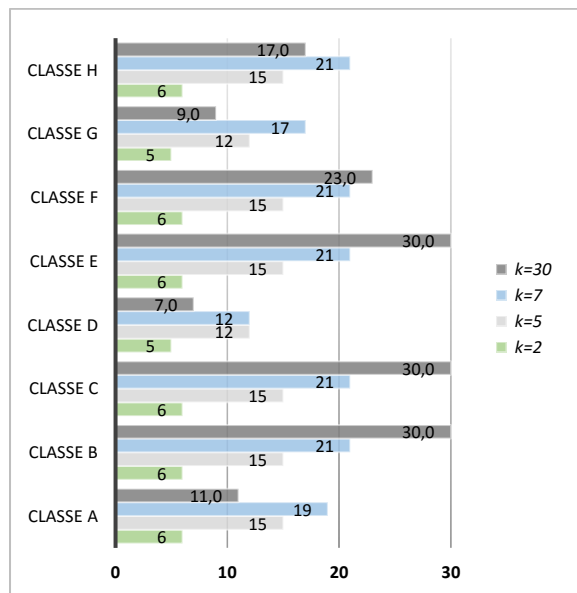


Figura 6 – Número total de segmentos por curvas de classe (partição em nível único).

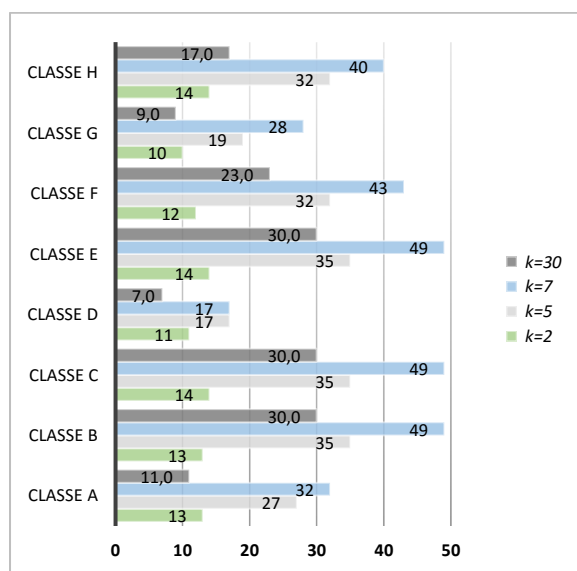


Figura 7 – Número total de segmentos por curvas de classe (partição em dois níveis).

Dos resultados da Figura 6, observa-se que a maior parte das classes tendeu a utilizar um mesmo quantitativo de segmentos com relação aos diferentes valores de *k* adotados para o enfoque proposto. Este valor, no entanto, no caso de uma curva única, mostrou-se claramente dependente da classe em questão.

Quando mais de um nível hierárquico é utilizado, conforme a Figura 7, observa-se que o quantitativo de segmentos começa a depender mais estritamente da classe. A interpretação de tal fato é a que se segue: ao segmentar os dados em mais níveis, sua complexidade intrínseca tende a se reduzir, conduzindo o algoritmo a ajustar curvas menos complexas. Para um único nível, a curva é usualmente pouco complexa para ajustar corretamente os dados, logo o algoritmo seleciona a complexidade limite em quase todos os casos.

Com o objetivo de melhor inferir a relação existente entre a complexidade computacional da técnica proposta, inferida através do quantitativo de segmentos envolvidos nas curvas utilizadas, com a eficiência final do sistema de classificação, foi construído o gráfico da Figura 8. Neste gráfico são apresentados os percentuais de redução ou incremento de complexidade e eficiência quando comparamos o uso de curvas hierárquicas com a alternativa usual de uma única curva por classe. É interessante observar o grande potencial de redução de complexidade da arquitetura proposta, a qual, para um valor de *k* igual a 5 e um único nível de profundidade, apresenta uma redução de 4,4 pontos percentuais na eficiência média, porém emprega menos do que 27,4% do quantitativo de segmentos utilizados na abordagem tradicional. É notório um compromisso bastante atrativo de redução de complexidade e perda de eficiência média obtido para um valor de *k* igual a 7 e profundidade igual a 1. Para as configurações com profundidade igual a 2 e valor de *k* acima de 5, a complexidade total do processo se mostrou superior às curvas principais ordinárias. Tal fato se deve ao aumento exponencial do número de curvas geradas, que ocorre a medida que se avança em níveis de profundidade, conforme descrito na Subseção 2.5.

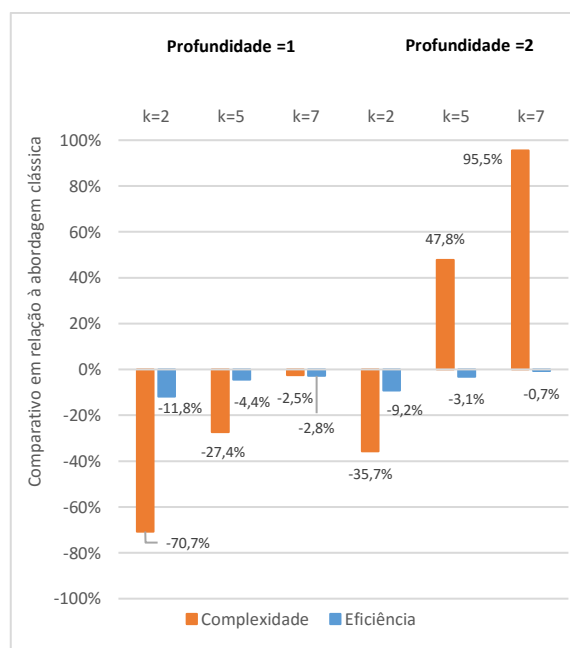


Figura 8: Percentuais de redução de complexidade e de eficiência média de classificação.

Diante dos resultados apresentados, pode-se concluir que é relevante que o modelo proposto possa utilizar curvas de diferentes complexidades e considerar variados níveis de segmentação para os dados, conforme as necessidades apresentadas para cada classe. Adicionalmente, como a escolha da complexidade da curva de uma classe pode comprometer a identificação de outra, em especial no caso de classes com alto nível de similaridade, o uso de mecanismos para uma sintonia conjunta das curvas pode ser útil na obtenção de maiores eficiências e de reduções ainda mais expressivas no custo computacional da sistemática proposta. Pelo exposto, é clara a necessidade da flexibilização dos níveis de profundidade, de forma que seja possível ajustar os níveis de hierarquia adotados, avançando somente o necessário. Assim, deve-se atender às características de cada classe, de maneira que o classificador não seja penalizado a nível global, tanto em eficiência quanto em complexidade, como ocorreu com 2 níveis de profundidade para valores de k superiores a 5.

4 Conclusão

O presente trabalho propôs um sistema de classificação de contatos de sonar passivo utilizando curvas principais hierárquicas. O sistema proposto foi avaliado com o uso de dados reais, provenientes de raia acústica.

Os experimentos realizados mostraram que a técnica proposta apresenta um grande potencial para a solução do problema em tela, alcançando níveis de eficiência de classificação muito próximos dos atingidos pelo uso de curvas principais ordinárias, porém com uma redução de complexidade na maioria das configurações testadas, tendo atingido patamares de redução de custo computacional na ordem de 35%.

Aplicações de sonar, na maioria das vezes, são carentes de um extenso volume de dados para o desenvolvimento de modelos, que possuem, intrinsecamente, uma alta complexidade, portanto, exigem o emprego de técnicas avançadas para o tratamento desses sinais. Uma contribuição deste trabalho é sinalizar que a adoção de múltiplas curvas com um grau de complexidade menor, em substituição à estratégia de uma curva única de alta-complexidade para o modelamento das classes, não é somente capaz de proporcionar um alto grau de eficácia na classificação, mas também influencia drasticamente na redução da complexidade computacional do sistema. Esta redução influencia diretamente o tempo de processamento envolvido, possibilitando a redução das exigências quanto aos sistemas eletrônicos envolvidos no processamento de tais sinais.

Como trabalhos futuros, espera-se considerar uma classificação realizada por curvas especificadas em diferentes níveis hierárquicos, bem como adotar um nível de segmentação particular a cada classe. Nesta direção, é esperada uma melhor relação de eficiência versus complexidade, reduzindo-se o custo computacional

envolvido e, possivelmente, produzindo um sistema de classificação de maior capacidade de generalização. Mecanismos para a sintonia conjunta das curvas hierárquicas serão também investigados.

Agradecimentos

Agradecemos ao Instituto de Pesquisas da Marinha (IPqM) pela disponibilização do banco de dados e pela cooperação técnica, fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Referências Bibliográficas

- Biau, G.; Fischer, A., (2011), "Parameter Selection for Principal Curves", IEEE Transactions on Information Theory (Vol NO.58).
- Delicado, P., (1999), Another Look at Principal Curves and Surfaces, Journal of Multivariate Analysis 77, 84-116 2001.
- Faceli, K.; Lorena, A.C; Gama, J.; Carvalho, A. P. C. L. F., (2011), Inteligência Computacional: Uma Abordagem de Aprendizado de Máquina, Ed LTC, Rio de Janeiro.
- Fernandes L. F., (2005) "Classificação de navios baseada em curvas principais", Dissertação de Mestrado, Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE;
- Fernandes, T. S. P; Souza Filho, J. B. O.; Alvez, E. S., (2015), Identificação de Navios em Sinais de Sonar Passivo por Curvas Principais, X Congresso Brasileiro de Inteligência Computacional - CBIC, Curitiba.
- Freund, Y.; Dasgupta, S.; Kabra M., e Verma N., (2007), "Learning the structure of manifolds using random projections", Proc. Adv. Neural Inf. Process. Syst. 20, Vancouver, BC, Canada, pp. 1-8.
- Hastie, T. J. (1984), "Principal Curves and Surfaces," Laboratory for Computational Statistics Technical Report 11, Stanford University, Dept. of Statistics.
- Kégl, B.; Krzyzak, A.; Zeger, K. Linder, T., (2000), "Learning and design of Principal Curves", IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 22, no. 3, pp. 281-297.
- Moore, A. W. e Hall T., (1990), "Efficient Memory-Based Learning for Robot Control," Comput. Lab., Univ. Cambridge, Cambridge, U.K., Tech. Rep. UCAM-CL-TR-209.
- Moura, N.N., (2013), Detecção e Classificação de Sinais de Sonar Passivo Usando Métodos de Separação Cega de Fontes, Tese de Doutorado, Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE.
- Rocha, G. G. M. ; Souza filho, J. B. O.; Gesualdi, A. R. ; Seixas, J. M., (2011), Otimização genética de curvas principais para a classificação de contatos. X congresso brasileiro de inteligência computacional - CBIC, Fortaleza.
- Souza Filho, J. B. O. ; Guedes, R. M. ; Gesualdi, A. R., Rocha, J.M, (2011), Classificadores Multi-Classe de Contatos por Curvas Principais, X Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI, São João Del Rei.
- Verbeek, J. J., Vlassis, N., Krose, B., (2002) "A k-segments " Algorithm for Finding Principal Curves", Pattern Recognition Letters, v. 23, n. 8, pp. 1009-1017.
- Zhang, J.; Wang, X.; Kruger, U, Wang, F.Y., (2011), "Principal Curve Algorithms for Partitioning High-Dimensional Data Spaces", IEEE Transactions on Neural Networks, Vol 22, NO. 3.