

OTIMIZAÇÃO DE MODELOS GOBF COM FUNÇÕES INTERNAS POR ENXAME DE PARTÍCULAS

FADUL FERRARI RODOR*, JEREMIAS BARBOSA MACHADO*, CARLOS ALBERTO MURARI PINHEIRO*

* *Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI*
Av. BPS, 1303 - Bairro Pinheirinho 37500-903 Itajubá, MG, Brasil

Emails: fadulrodor@gmail.com, jeremias@unifei.edu.br, pinheiro@unifei.edu.br

Abstract— This paper presents a new technique for system identification of models based on ladder-structured generalized orthonormal basis functions. Thus, an particle swarm optimization (PSO) algorithm with a fitness function based on the Akaike information criterion to define the optimum number of basis and model functions, considering the model accuracy and parsimony, as the optimum model poles is derived. Simulated examples illustrate the performance of the proposed technique.

Keywords— Linear Dynamic Systems, Orthonormal Basis Functions, Particle Swarm Optimization, Identification

Resumo— Neste trabalho, apresenta-se uma nova técnica de identificação de modelos formados por bases de funções ortonormais generalizadas com funções internas. Para tanto, utiliza-se uma técnica de otimização por enxame de partículas juntamente com uma função de *fitness* baseada no critério de Akaike afim de determinar o número de bases e de funções do modelo, considerando sua a precisão e parcimoniosidade, bem como otimizar o valor dos polos. Exemplos simulados ilustram os resultados obtidos para a técnica de identificação e modelagem proposta.

Palavras-chave— Sistemas dinâmicos lineares, Base de Funções Ortonormais, Otimização por enxame de partículas, Identificação.

1 Introdução

A representação matemática de sistemas dinâmicos é importante em várias áreas da ciência e tecnologia. Modelos para análise, otimização, simulação e controle de sistemas dinâmicos requerem precisão e processos de identificação eficientes. Uma abordagem de particular relevância é a modelagem de sistemas dinâmicos usando base de funções ortonormais (*Orthonormal Basis Functions* - OBF) (Schetzen, 1980; Oliveira et al., 2000; Heuberger et al., 2005).

As funções ortonormais mais utilizadas são as de Laguerre e Kautz (Wahlberg and Makila, 1996; Broome, 1965), as quais são mais apropriadas para representar sistemas com dinâmicas dominantes de primeira ou segunda ordem. Sistemas complexos e de dinâmica intrincada são modelados usando as Bases de Funções Ortonormais Generalizadas (*Generalized Orthonormal Basis Functions* - GOBF) (Heuberger et al., 2005; Van den Hof et al., 1995; Ninness and Gustafsson, 1997), ao custo de uma parametrização mais complexa. O modelo de GOBF aqui analisado apresenta vantagens sobre outras funções ortonormais, uma vez que apenas parâmetros reais são utilizados na sua representação, independente dos polos serem reais ou complexos, permitindo a representação de sistemas com vários modos dominantes e/ou ordem elevada por modelos mais simples, sem necessidade de especificar as características dinâmicas dos polos a priori.

Modelos baseados em bases de funções ortonormais apresentam vantagens como, por exem-

plo, a possibilidade de incorporar conhecimentos prévios sobre as dinâmicas dominantes do sistema a ser modelado (Ninness and Gustafsson, 1997). A inclusão dessas informações pode reduzir e simplificar os problemas de identificação e controle associados ao sistema. Modelos baseados em funções ortonormais exibem tolerância a dinâmicas não-modeladas e são menos sensíveis aos parâmetros estimados (Nelles, 2001). Outro ponto a se evidenciar é o fato de modelos OBF não envolverem realimentação da saída, assim, erros de predição não são propagados no modelo, o que, em geral, resulta em representações mais precisas (Nelles, 2001). Devido à completude da base, também é possível aumentar a sua precisão simplesmente aumentando o número de funções na base (Heuberger et al., 2005).

Os parâmetros dos modelos relacionados as bases ortonormais são os polos da funções ortonormais e os coeficientes da expansão das séries dessas funções. Os valores dos coeficientes da expansão dependem da escolha dos polos, sendo esses polos os parâmetros de escolha livre e sua correta seleção corresponde a um passo importante no processo de identificação de modelos OBF. Quando os polos são selecionados de maneira adequada, a velocidade de convergência da série ortonormal pode aumentar consideravelmente, permitindo reduções de sua ordem sem afetar a precisão (Van den Hof et al., 1995). Na verdade, caso os polos da base sejam selecionados próximos aos polos dominantes do sistema, uma aproximação precisa pode ser obtida com poucos coeficientes. A seleção desses polos pode ser feita manualmente pelo projetista

baseando-se em conhecimentos prévios sobre o sistema ou de maneira automática a partir dos dados de entrada e saída e algum método de otimização (Heuberger et al., 2005; Nelles, 2001).

Em (Machado et al., 2013), uma metodologia baseada na informação do gradiente foi utilizada para otimizar e identificar os parâmetros dos modelos das OBF. No entanto, apesar de identificar os parâmetros dos modelos OBFs com precisão, é necessário determinar o número de polos e funções da base previamente. Em (Machado, 2014), uma metodologia para determinar os parâmetros da GOBF, bem como o número de funções da base utilizando algoritmos genéticos foi proposta, mas ainda assim sendo necessário determinar a priori o número funções do modelo.

Este trabalho apresenta uma alternativa para a identificação e otimização de modelos GOBF de estrutura *ladder* com funções internas. Para seleção dos polos e do número de funções das bases uma otimização baseada na técnica de enxame de partículas é desenvolvida. Para tanto, uma função de ajuste baseada no critério de informação de Akaike foi utilizada, similar àquela apresentada por Machado (2014).

O trabalho está organizado da seguinte maneira. Na Seção 2 é apresentada uma revisão dos conceitos de modelagem por OBF's e GOBF. A Seção 3 apresenta as definições a respeito da otimização por enxame de partículas (*Particle Swarm Optimization* - PSO). A Seção 4 apresenta a técnica proposta para a obtenção dos modelos GOBF utilizando-se PSO. Na Seção 5 a metodologia proposta é aplicada a dois exemplos que ilustram sua performance na modelagem de sistemas dinâmicos. E, por fim, a Seção 6 apresenta as conclusões.

2 Base de Funções Ortonormais Generalizadas - GOBFs

O uso de filtros ortonormais para representar sinais e sistemas foi proposto, inicialmente, por Wiener (1966), Takenaka (1925) e outros. Modelos BFO podem ser genericamente representados em modelos de espaço de estados como (Nelles, 2001):

$$\begin{aligned}\Psi(k+1) &= A_f \Psi(k) + B_f u(k) \\ \hat{y}(k) &= C_f^T \Psi(k)\end{aligned}\quad (1)$$

onde, $\hat{y}(k)$ é a saída estimada, as matrizes A_f e B_f dependem diretamente dos parâmetros (polos) do modelo, a matriz C_f contém os termos da expansão da série com a saída das funções ortonormais e $\Psi(k) = [\psi_1(k) \dots \psi_{n_f}(k)]^T$ é o vetor de estados ortonormais de ordem n_f , sendo estes estados iguais as saídas dos filtros correspondentes às funções ortonormais de ordem equivalente (ψ_l com $l = 1, \dots, n_f$).

Neste trabalho há interesse particular nos modelos obtidos pelas bases de funções ortonormais

generalizadas (Heuberger et al., 2005). A classe das funções ortonormais generalizadas é obtida pela conexão de n filtros *all-pass* de n_b -ésima ordem. Cada filtro terá n_b polos distintos ou não, reais ou complexos (Heuberger et al., 2005; Ninness and Gustafsson, 1997). A Figura 1 apresenta a estrutura em blocos de um modelo GOBF, onde os blocos representados por G_b são as funções ortonormais que compõem a base e C_n^T (com $i = 1, \dots, n$), denota os correspondentes subvetores dos coeficientes da expansão, os quais são os pesos das saídas dos filtros antes de se somarem e formarem a saída final do modelo $\hat{y}(k)$.

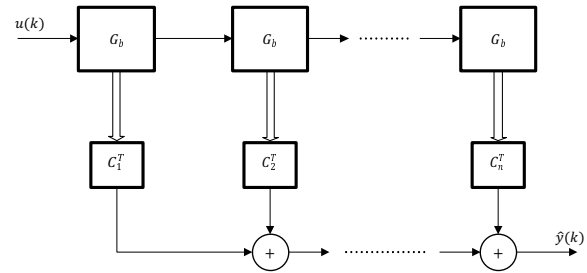


Figura 1: Representação em blocos de um modelo GOBF

Um caso especial de GOBF corresponde em conectar diferentes filtros *all-pass* de primeira e segunda ordem, onde cada filtro pode apresentar polo(s) distinto(s). Estas funções são também conhecidas por funções de Takenaka-Malmquist (Heuberger et al., 2005):

$$F_k(z) = \frac{\sqrt{1 - |\xi|_\kappa^2}}{z - \xi_\kappa} \prod_{i=1}^{\kappa-1} \left[\frac{1 - \xi_i z}{z - \xi_i} \right] \quad (2)$$

onde ξ_i , $i = 1, \dots, \kappa$ denotam os polos do modelo GOBF. Contudo, este tipo de modelagem apresenta algumas complicações, principalmente quando as características dinâmicas do sistema a ser modelado são desconhecidas:

- A parametrização não é única, já que qualquer permutação de polos resultará em modelos idênticos;
- É necessário especificar a priori quantos serão os polos reais e os polos complexos conjugados;
- A saída dos filtros com polos complexos é um valor complexo, contudo essa situação pode ser contornada com uma transformação proposta por Ninness and Gustafsson (1997);
- Para a determinação dos parâmetros no caso de par de polos complexos conjugados (partes reais e imaginárias), os parâmetros são interdependentes, uma vez que os polos devem estar dentro do círculo unitário (Heuberger et al., 2005).

Felizmente, existe outra parametrização que não apresenta as complicações descritas acima. Esta representação é conhecida como funções internas, na qual as funções de Laguerre e Kautz são casos especiais (Heuberger et al., 2005).

Algumas funções internas bem conhecidas e estudadas são as funções que constituem o modelo FIR, (i.e., $G(z) = z^{-1}$). Um exemplo de função interna $G(z)$ com polo real ξ_m é dado pela equação 3:

$$G(z) = \frac{1 - \xi_m z}{z - \xi_m} \quad (3)$$

A conexão em cascata de n_b funções internas de primeira ordem gera outras funções internas de ordem n_b (Heuberger et al., 2005), mas quando envolvem polos complexos conjugados seus parâmetros geralmente se tornam complexos ou requerem alguma transformação para que se tornem reais. Para evitar este problema há uma representação para modelos GOBF através de funções internas em que os polos são parametrizados sempre por parâmetros reais independente da natureza dos polos. Esta representação foi proposta originalmente por Gray and Markel (1975), considerando inicialmente como uma realização em espaço de estados para uma função interna com somente um polo com duas entradas e duas saídas cujo modelo em estado de espaços é dado por (Heuberger et al., 2005; Gray and Markel, 1975):

$$\begin{bmatrix} \psi_i(k+1) \\ y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{1-\gamma^2} & -\gamma & 0 \\ \gamma & \sqrt{1-\gamma^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_i(k) \\ u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} \quad (4)$$

com $-1 < \gamma < 1$. O modelo 4 pode ser representado através do diagrama de blocos da figura 2:

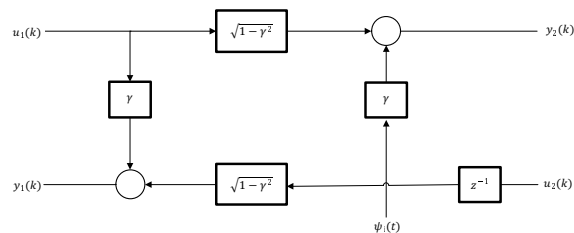


Figura 2: Representação em blocos da estrutura interna parametrizada por γ .

Esta estrutura é normalizada, isto é, gera uma base ortonormal. Bases com somente um parâmetro γ são equivalentes às bases com funções de Laguerre e bases com dois parâmetros são equivalentes às bases com funções de Kautz (Heuberger et al., 2005). A ligação dos n_b blocos com distintos parâmetros γ_b forma uma base ortonormal

generalizada com n_b polos, que podem ou não serem distintos, se dá através da estrutura de ligação apresentada na Figura 3.

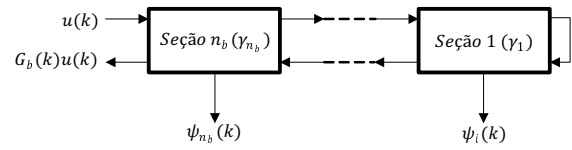


Figura 3: Representação em blocos das funções da base de uma GOBF

As estruturas GOBF são constituídas, como mostrado na figura 1, pela ligação em cascata de n blocos G_b formados pela base de funções ortonormais com polos reais e/ou complexos conjugados, de maneira que o número total de funções na base ortonormal resultante seja $n_f = n_b n$. Neste trabalho utiliza-se a representação em espaço de estados para computar as saídas das GOBFs com funções internas. O modelo em espaço de estados de um único bloco G_b com n_b funções internas, parametrizadas por γ_i com $i = 1, \dots, n_b$ é dado por:

$$\begin{aligned} \Psi_b(k+1) &= A_b \Psi_b(k) + B_b u(k) \\ \hat{y}_b(k) &= C_b \Psi_b(k) \end{aligned} \quad (5)$$

onde $\Psi_b(k) = [\psi_1(k) \dots \psi_{n_b}(k)]$ representam as saídas dos filtros (estados) que compõem o bloco G_b da GOBF. As matrizes A_b e B_b dependem diretamente dos parâmetros γ_i , como descrito em (Machado et al., 2013) e C_b é o respectivo subvetor dos coeficientes da expansão em séries do modelo GOBF.

O modelo genérico da GOBF, composto do cascadeamento de n blocos G_b , pode ser representado na forma de espaço de estados como mostrado na equação 1, onde $\Psi(k)$ é composto pela saída de $n_b n$ filtros ortonormais. As correspondentes matrizes A_f , B_f e C_f , são definidas em (Machado et al., 2013). De forma que os polos do sistema são determinados pelos autovetores da matriz A_f . Nota-se ainda que, com a representação dinâmica em espaço de estados do modelo GOBF é possível obter uma função de transferência equivalente dada por 6 (Heuberger et al., 2005).

$$G_\kappa(z) = C_f(Iz - A_f)^{-1}B_f \quad (6)$$

3 Otimização por Enxame de Partículas

O algoritmo de otimização por enxame de partículas foi originalmente introduzido em (Eberhart, 1995), simulando o comportamento de populações de espécies socialmente organizadas (Clerc, 2006), como bando de pássaros, enxame de abelhas, cardumes de peixes, etc. O algoritmo trata cada

indivíduo como uma partícula em um espaço n -dimensional e para cada uma dessas M partículas é designado um vetor posição a_{ij} e um vetor velocidade v_{ij} . Cada partícula pode ser vista como uma possível solução para um problema de otimização, onde em geral se deve minimizar uma função objetivo associada. A velocidade das partículas é atualizada de acordo com a equação (7).

$$v_{ij}(k+1) = wv_{ij}(k) + c_1r_1[Pb_j(k) - a_{ij}(k)] + c_2r_2[Pg_j(k) - a_{ij}(k)] \quad (7)$$

onde $i = 1, 2, \dots, M$; $j = 1, 2, \dots, n$, c_1 e c_2 são coeficientes de aceleração chamados de parâmetros cognitivos e sociais, respectivamente, r_1 e r_2 são números aleatórios uniformemente distribuídos entre $[0,1]$, $w \in [0,1,4]$ é um valor de inércia (Shi and Eberhart, 1998), o vetor Pb_j é a melhor posição das partículas do ciclo de processamento anterior, e $Pg_j(k)$ é a posição da melhor partícula entre todas as avaliações anteriores.

A posição de cada partícula é atualizada de acordo com a expressão (8).

$$a_{ij}(k+1) = a_{ij}(k) + v_{ij}(k+1) \quad (8)$$

Usualmente emprega-se um limitador de velocidade das partículas restringindo-as no intervalo $[-V_{max}, V_{max}]$, cuja finalidade é evitar que haja uma “dispersão” populacional e uma consequente divergência do algoritmo.

4 Abordagem Proposta

Neste trabalho é proposta uma maneira alternativa para a obtenção dos parâmetros de GOBFs com funções internas a partir dos dados de entrada e saída. Para tanto, utiliza-se um método de otimização baseado no enxame de partículas (PSO). Além de se obter os parâmetros da GOBF, é proposta a determinação automática do número de polos e funções do modelo.

Os parâmetros a serem otimizados pelo PSO são os valores de γ . A cada inicialização do algoritmo de otimização utiliza-se uma combinação do número de polos e funções do modelo (blocos G_b) gerando-se um valor de *fitness* a cada convergência, seja ela provocada ao atingir o número máximo de iterações pré-determinado ou por outro critério de parada (um erro mínimo ser alcançado, por exemplo). Uma vez determinados os polos, o valor dos coeficientes da expansão podem ser determinados pelo já conhecido método dos mínimos quadrados (Campello et al., 2007).

A função de *fitness* utilizada nesse trabalho é baseada no critério de informação de Akaike (AIC), definido como (Ljung, 1999):

$$AIC = N \ln[\sigma_{error}^2(n_p)] + 2n_p \quad (9)$$

onde N é o número de amostras de entradas e saídas usadas para identificação, $\sigma_{error}^2(n_p)$ é a variância do erro da saída do modelo e n_p é o número total de parâmetros do modelo. Assim, a primeira parte da Equação 9 mede a diminuição do erro do modelo e a segunda parte penaliza o aumento do número de parâmetros do modelo.

O valor de inércia das partículas do enxame foi determinado a partir de outros trabalhos (Shi and Eberhart, 1998), variando de forma linear, como demonstrado abaixo:

$$w = 0,9 - (0,9 - 0,4) \frac{i}{N_{step}} \quad (10)$$

onde $i = 1, \dots, N_{step}$ e N_{step} é o número máximo de gerações do algoritmo. O valor máximo de velocidade (V_{max}) para o PSO foi determinado empiricamente como 0,2, uma vez que os valores do parâmetro otimizado (γ_j) devem estar limitados no intervalo $[-1,1]$.

5 Resultados

Com o intuito de demonstrar a metodologia proposta, a identificação e modelagem de dois sistemas dinâmicos é apresentada.

Primeiramente, um sistema linear com três polos, um par complexo conjugado e um real, dado pela seguinte função de transferência discreta foi simulado e identificado:

$$G(z) = \frac{0,1587z + 0,02187}{z^3 - 1,191z^2 + 0,5352z - 0,09072} \quad (11)$$

no qual os polos são $z = 0,4490$ e $z = 0,3710 \pm 0,2538i$ ($T_s = 0,1seg$).

Um sinal aleatório com distribuição uniforme entre $[-1,1]$ foi utilizado para obtenção dos dados para identificação, assumindo-se então que o modelo do sistema seja desconhecido. A Figura 4 apresenta os dados usados no processo de identificação.

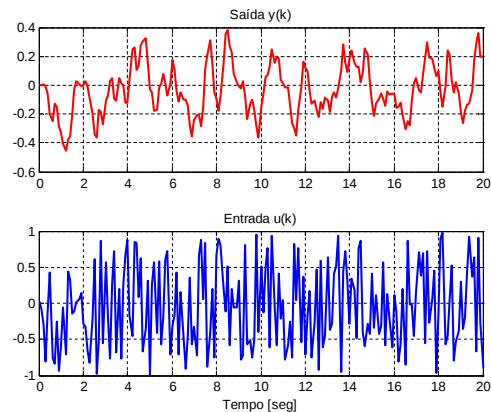


Figura 4: Dados de entrada e saída utilizados para o processo de identificação

O algoritmo do PSO foi configurado com os seguintes parâmetros:

- Máximo de 5 funções no modelo;
- Máximo de 5 polos;
- população de 100 indivíduos;
- máximo 500 de gerações;
- parâmetros cognitivos e sociais iguais a 2 (Shi and Eberhart, 1998);
- caso o erro quadrático médio (EQM) mínimo de 10^{-25} seja atingido o processo termina, considerando que o algoritmo convergiu para aquele par de polos/funções.

Uma segunda massa de dados foi utilizada para validação e os resultados finais para o sistema em análise com o melhor modelo é apresentado na Tabela 1.

Tabela 1: Melhor modelo para o primeiro exemplo

Nº de funções	<i>Fitness</i>	EQM	Iterações
1	$-1,1606 * 10^{-4}$	$8,2272e * 10^{-26}$	320

O modelo GOBF convergiu de tal maneira a apresentar três polos e uma função no modelo. Os parâmetros γ apresentam três valores distintos com $\gamma = [0,8052 \ -0,4307 \ 0,0907]$ e polos dados por $p_{1,2} = 0,3710 \pm 0,2538i$ e $p_3 = 0,4490$, que são, de maneira prática, os polos exatos do sistema. A Figura 5 apresenta uma comparação entre os dados de validação e a saída do modelo GOBF identificado pelo método proposto.

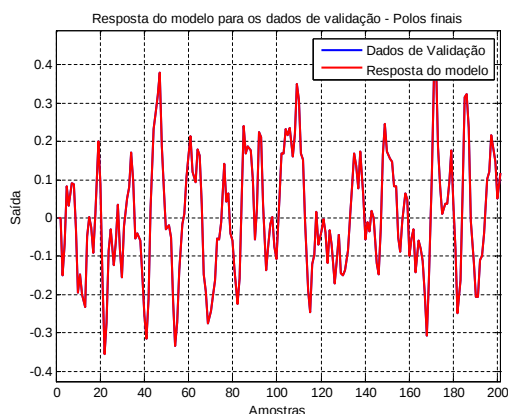


Figura 5: Resposta do modelo para os dados de validação para o primeiro exemplo

Os resultados apresentados acima comprovam a efetividade da metodologia proposta. Verifica-se que, a partir de dados de entrada e saída foi possível obter um modelo com um número de parâmetros ideal, tendo os polos convergido para valores muito próximos dos exatos.

Um segundo exemplo é desenvolvido para um sistema com função de transferência dada por (12).

$$G(z) = \frac{0,02167z^3 + 0,1226z^2 + 0,06434z + 0,003167}{z^4 - 1,483z^3 + 0,9539z^2 + 0,2995z - 0,04076} \quad (12)$$

na qual os polos são $z = 0,3645 \pm 0,2444i$ e $z = 0,3770 \pm 0,2637i$ ($T_s = 0,1seg$). A Figura 6 apresenta os dados usados para a identificação do modelo.

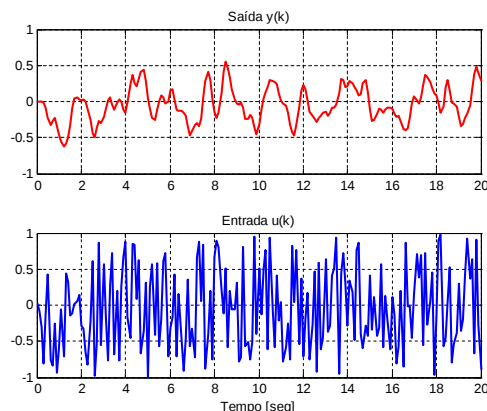


Figura 6: Dados de entrada e saída utilizados para o processo de identificação para o segundo exemplo

Para esse exemplo os parâmetros do algoritmo PSO foram escolhidos iguais aos do exemplo anterior e de forma similar, uma segunda massa de dados foi utilizada para validar o modelo identificado. A Tabela 2 sumariza os resultados obtidos.

Tabela 2: Melhor modelo para o segundo exemplo

Nº de funções	<i>Fitness</i>	EQM	Iterações
1	$-1,1567 * 10^{-4}$	$9,5962 * 10^{-26}$	493

O modelo GOBF convergiu de tal maneira a apresentar quatro polos e uma função no modelo. Os parâmetros γ apresentam quatro valores distintos com $\gamma = [0,8322 \ -0,5980 \ 0,2394 \ -0,0407]$ e polos dados por $p_{1,2} = 0,3770 \pm 0,2637i$ e $p_{3,4} = 0,3645 \pm 0,2444i$, que são os polos exatos do sistema. A Figura 7 apresenta uma comparação entre os dados de validação e a saída do modelo GOBF identificado pelo método proposto.

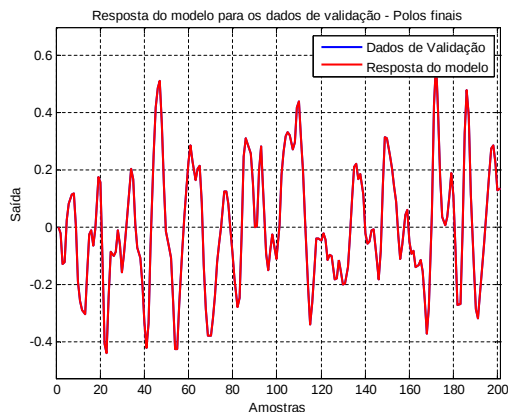


Figura 7: Resposta do modelo para os dados de validação para o segundo exemplo

Novamente, os resultados apresentados para o segundo exemplo comprovam a eficácia da metodologia proposta e dos modelos obtidos.

6 Conclusões

Este trabalho apresentou uma nova metodologia para a identificação de sistemas dinâmicos usando GOBFs com funções internas. Uma otimização por enxame de partículas foi utilizada com sucesso para determinação dos parâmetros ótimos das GOBFs. Uma função de *fitness* foi proposta com base no critério de Akaike, permitindo a seleção de um modelo que contemplasse o número ideal de polos e funções sem que o mesmo fosse superdimensionado, garantindo uma boa relação entre precisão e parcimoniosidade. Os resultados da metodologia proposta aplicada a dois sistemas dinâmicos foram apresentados, comprovando a viabilidade de identificar e modelar processos por GOBFs com funções internas apenas com base nos dados de entrada e saída.

Como trabalhos futuros pretende-se aplicar a metodologia a dados de sistemas reais, bem como uma análise mais aprofundada dos parâmetros do algoritmo de otimização por enxame de partículas e estudar a possibilidade de um auto-ajuste dos mesmos, de forma a sistematizar a técnica aqui proposta.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer à UNIFEI, CAPES, FAPEMIG e CNPQ pelo apoio financeiro.

Referências

- Broome, P. W. (1965). Discrete orthonormal sequences, *Journal of the Association for Computing Machinery* **12**(2): 151–168.
- Campello, R. J. G. B., Oliveira, G. H. C. and Amaral, W. C. (2007). Identificação e controle de processos via desenvolvimento em séries ortonormais:

Parte a (identificação) e b (controle), *Controle e Automação* **18**(3): 298–332.

- Clerc, M. (2006). *Particle Swarm Optimization*, ISTE.
- Eberhart, R. C. and Kennedy, J. (1995). A new optimizer using particle swarm theory, *Proceeding of 6th Int. Symp. Micro Machine and Human Science*, IEEE, pp. 39–43.
- Gray, J. A. and Markel, J. (1975). A normalized digital filter structure, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing* **23**(3): 268–277.
- Heuberger, P. S. C., Van den Hof, P. M. J. and Wahlberg, B. (2005). *Modelling and Identification with Rational Orthogonal Basis Functions*, Springer-Verlag.
- Ljung, L. (1999). *System Identification: Theory for the User*, Prentice Hall.
- Machado, J. B. (2014). Ga optimization of ladder-structured gobf models, *8th Annual IEEE Systems Conference (SysCon)*, IEEE, pp. 396–401.
- Machado, J. B., Campello, R. J. G. B. and Amaral, W. C. (2013). Takagi-sugeno fuzzy models in the framework of orthonormal basis functions, *IEEE Transactions on Cybernetics* **43**(3): 858–870.
- Nelles, O. (2001). *Nonlinear System Identification: From Classical Approaches to Neural Networks and Fuzzy Model*, Springer-Verlag.
- Ninness, B. and Gustafsson, F. (1997). A unifying construction of orthonormal bases for system identification, *IEEE Transactions on Automatic Control* **42**(4): 515–521.
- Oliveira, G. H. C., Amaral, W. C., Favier, G. and Dumont, G. A. (2000). Constrained robust predictive controller for uncertain processes modeled by orthonormal series functions, *Automatica* **36**(4): 563–571.
- Schetzen, M. (1980). *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*, John Wiley and Sons.
- Shi, Y. and Eberhart, R. (1998). A modified particle swarm, *Proceedings of 1998 IEEE International Conference on Evolutionary Computation*, IEEE, pp. 1945–1950.
- Takenaka, S. (1925). On the orthogonal functions and a new formula of interpolation, *Japanese J. Math* **II**: 129–145.
- Van den Hof, P. M. J., Heuberger, P. S. C. and Bokor, J. (1995). System identification with generalized orthonormal basis function, *Automatica* **31**(12): 1821–1834.
- Wahlberg, B. and Makila, P. M. (1996). Approximation of stable linear dynamical systems using laguerre e kautz functions, *Automatica* **32**(5): 693–708.
- Wiener, N. (1966). *Nonlinear Problems in Random Theory*, The MIT Press.