

SÍNTESE DE GANHOS PARA COMPENSAÇÃO ROBUSTA DE SISTEMAS LINEARIZADOS POR REALIMENTAÇÃO

ÂNGELO E. O. FRANCO* LUCAS S. OLIVEIRA* VALTER J. S. LEITE*

*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEL) - CEFET-MG / UFSJ
Av. Amazonas, 7675, 31510 – 000, Belo Horizonte, MG, Brasil
e Departamento de Engenharia Mecatrônica — CEFET-MG / Campus Divinópolis
R. Álvares Azevedo 400, 35500 – 970, Divinópolis, MG, Brasil

Email: angeloegenio@msn.com lqsoliveira@div.cefetmg.br valter@ieee.org

Abstract— We propose a new topology to improve the robustness of the control of nonlinear systems under linearizing feedback. The proposal consists in the introduction of a compensation signal that tries to mitigate the negative effects of differences between the model used to compute the linearizing law and the actual system. Such a signal is proportional to the difference between the integral of the linear control signal and the current output of the system. By exploiting the structure of the matrices concerning the feedback linearization and the compensation topology, we present a convex formulation that allows to obtain the gains related to the linear control law. The proposed technique is applied to a level control model that has an exponential type nonlinearity, illustrating its viability.

Keywords— Robust control, Linearizing feedback, Linear matrix inequalities (LMIs).

Resumo— Propomos uma nova topologia para melhorar robustez ao controle de sistemas não lineares sob realimentação linearizante. A proposta consiste na introdução de um sinal de compensação que tenta mitigar os efeitos das diferenças entre o modelo usado no cálculo da lei linearizante e o sistema real. Esse sinal é proporcional à diferença entre a integral do sinal de controle linear e a saída do sistema real. Ao explorar a estrutura das matrizes envolvidas na linearização por realimentação e na topologia de compensação, apresentamos uma formulação convexa que permite a obtenção dos ganhos relativos às leis de controle linear. A técnica proposta é aplicada em um modelo de controle de nível que contém uma não-linearidade do tipo exponencial, ilustrando sua viabilidade.

Palavras-chave— Controle robusto; Linearização por realimentação; Desigualdades matriciais lineares (LMIs).

1 Introdução

A contribuição deste trabalho consiste na proposição de um procedimento para a síntese dos ganhos da realimentação estática de estados e do sinal de compensação na nova topologia de inversão dinâmica robusta (IDR) introduzida por Laverne (2005). A IDR visa a melhoria da robustez do controle por realimentação linearizante de sistemas não lineares sujeitos a diferenças entre o modelo nominal e o sistema real.

A linearização por realimentação tem várias aplicações em processos físicos ao mesmo tempo que representa um grande desafio teórico pelas dificuldades de tratar a robustez do controle (Isidori, 1995; Khalil, 2002). Ainda não há solução satisfatória na literatura para a síntese de controladores para sistemas linearizados por realimentação que assegurem estabilização robusta da malha fechada. Isso pois, pequenas diferenças entre o sistema real e o modelo nominal utilizando para a síntese da lei de linearização por realimentação pode levar o sistema a uma significativa perda de desempenho ou mesmo à instabilidade. A síntese robusta de controladores para sistemas linearizados por realimentação tem sido investigada em diversos trabalhos (Esfandiari & Khalil, 1992; Laverne, 2005; Franco et al., 2006; Menon et al., 2008; Soares, 2011). Franco et al. (2006) investigou esse problema e propôs uma linearização por realimentação que é mais robusta que a linearização por realimentação clássica encontrada em (Isidori, 1995; Khalil, 2002). Uma das vantagens é que os parâmetros do sistema original permanecem na lei de controle linearizante. Entretanto, essa abordagem ainda pode ter efeitos muito danosos ao desempenho ou mesmo à estabilidade da malha fechada. So-

ares (2011) investigam a estabilização robusta do sistema linearizado via uma realimentação linear de estados. Para determinar o ganho (robusto) dessa realimentação linear é necessário avaliar cuidadosamente as diferenças entre o modelo não linear e o sistema real, formando um politopo de matrizes associado à forma canônica de Brunovsky, o que pode demandar um grande esforço computacional. Outras abordagens para assegurar propriedades de robustez podem ser encontradas em (Menon et al., 2008), em que se utiliza uma abordagem baseada em ações do tipo anti-windup, e em (Esfandiari & Khalil, 1992), em que uma realimentação de saída é proposta com o auxílio de um observador. As diferenças de modelagem são consideradas como uma entrada de perturbação.

Este trabalho é inspirado principalmente na topologia IDR proposta em (Laverne, 2005; Laverne & Fauvel, 2011), mas que não apresenta procedimentos efetivos para o cálculo dos ganhos do controlador linear e da compensação. Essa lacuna foi trabalhada por Silva et al. (2014) via utilização de algoritmos genéticos mas sem assegurar a estabilidade do sistema controlado para todo o conjunto de incertezas. Em (Oliveira et al., 2015) é utilizado um algoritmo diferencial evolutivo para gerar os controladores em uma outra topologia de compensação. Nesse caso, as sintonias geradas são validadas por desigualdades matriciais lineares (LMIs).

Neste trabalho, a topologia IDR (Laverne, 2005; Laverne & Fauvel, 2011) é apresentada e uma formulação baseada em LMIs é proposta para a síntese dos controladores — tanto da realimentação de estados quanto da compensação — de forma a assegurar um desempenho mínimo para o sistema em malha fechada. As condições formuladas são numericamente

avaliadas em um modelo não linear de um tanque para controle de nível. Com isso fica evidenciado como as incertezas podem comprometer o desempenho do sistema linearizado por realimentação e como a técnica de síntese proposta é capaz de gerar controladores com desempenho que se aproxima da condição nominal mesmo na presença de incertezas.

Notação: A norma euclidiana é denotada por $\|\cdot\|$. Para qualquer vetor ou matriz M , sua transposta é denotada por M^T . Para matrizes quadradas e simétricas A e B , $A > B \Leftrightarrow A - B > 0$ (definida positiva). I e 0 são as matrizes identidade e nula, de dimensões adequadas. $\star$ é utilizado para identificar os blocos simétricos em relação à diagonal em LMIs. A dependência na variável temporal t é frequentemente omitida para simplificar a notação.

2 Preliminares

Considere a classe dos sistemas não lineares descritos por

$$\dot{z}(z,x,u) = Az + B\gamma(x)(u - \alpha(x)), \quad (1)$$

$$y(z) = Cz, \quad (2)$$

em que $\alpha(x) : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}^m$ e $\gamma(x) : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}^{m \times m}$ são funções não lineares definidas em $\mathcal{D}$ e A está, por exemplo, na forma canônica de Brunovsky (Isidori, 1995). Assuma ainda que $\gamma(x)$ é invertível para todo $x \in \mathcal{D}$. Note que essa representação é bastante geral para sistemas não lineares. Suponha ainda que existe um difeomorfismo $T(x) : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{D}_z = T(\mathcal{D})$ contém a origem e a mudança de variáveis $z = T(x)$ que permite escrever (2) com $\dot{x}(x,u) = f(x) + g(x)u$ e $y(x) = h(x)$, em que $f(x) = Az - B\gamma(x)\alpha(x)$, $g(x) = B\gamma(x)$ e $h(x) = Cz = CT(x)$. Para maiores detalhes, veja (Khalil, 2002). Uma exigência para o controle do sistema (2) é a controlabilidade do par (A,B) e a invertibilidade de $\gamma(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}$.

O grau relativo, d_1 , de um sistema é o número de vezes que é necessário derivar y em relação ao tempo para que o sinal de controle apareça pela primeira vez na expressão da saída derivada. Em sistemas de grau relativo unitário, $d_1 = 1$, tem-se

$$\dot{y}(z,x,u) = \dot{y}(z,x,u) = C[Az + B\gamma(x)(u - \alpha(x))]. \quad (3)$$

Nesse caso, a lei de controle linearizante é dada por

$$u(x,v) = \gamma(x)^{-1}v + \alpha(x), \quad (4)$$

que substituída em (3) resulta em

$$\dot{y}(z,v) = C[Az + Bv]. \quad (5)$$

Desta forma, com A e B na forma canônica de Brunovsky, tem-se que a saída do sistema linearizado por realimentação é diretamente proporcional à integral do sinal de controle linear:

$$y(v) = k_c \int_0^t v dt. \quad (6)$$

Porém, existindo incertezas associadas às funções $\alpha(x)$ e $\gamma(x)$, não haverá a compensação exata dessas funções na linearização. Neste trabalho, supõe-se que as funções $\gamma(x)$ e $\alpha(x)$ estão sujeitas a incertezas aditivas no formato

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \alpha_n(x) + \Delta\alpha(x), \\ \gamma(x) &= \gamma_n(x) + \Delta\gamma(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Assim, assumindo que a lei de controle linearizante dada (4) é calculada a partir dos valores nominais de $\alpha(x)$ e $\gamma(x)$, isto é, $u = \gamma_n^{-1}(x)v + \alpha_n(x)$, então, o sis-

tema (1) sujeito a (7) resulta em

$$\dot{z}(z,u) = Az + B(\gamma_n + \Delta\gamma)(u - \alpha_n - \Delta\alpha), \quad (8)$$

que pode ser reescrito como

$$\dot{z}(z,v,\Delta_s) = Az + Bv + B\Delta_s, \quad (9)$$

em que as dependências em x , v e z foram omitidas. Note-se que:

$$\Delta_s = \Delta\gamma\gamma_n^{-1}v - (\gamma_n + \Delta\gamma)\Delta\alpha. \quad (10)$$

Seguindo a topologia proposta em (Lavergne, 2005; Lavergne et al., 2000; Lavergne & Fauvel, 2011), pode-se introduzir um sinal de compensação no sinal de controle v , $\Delta_c(z,u)$, como forma de mitigar os efeitos negativos das incertezas ou diferenças existentes entre o modelo nominal e o sistema real:

$$\Delta_c(z,u) = k_c \int_0^t (\tilde{y}_c(\theta) - \tilde{y}(\theta)) d\theta, \quad (11)$$

em que $\tilde{y}_c$ é dado pela saída do modelo não linear nominal do sistema, y_m , subtraído do sinal de compensação Δ_c , ou seja,

$$\tilde{y}_c(z,v) = y_m - \Delta_c(z,u). \quad (12)$$

Assim, o sinal de controle não linear aplicado ao sistema real passa a ser dado por

$$u(x,v) = \gamma_n^{-1}(x)(v + \Delta_c(z,u)) + \alpha_n(x), \quad (13)$$

que aplicada a (8) (ou de forma equivalente, somando $\Delta_c(z,u)$ ao sinal v de (9)) resulta em

$$\dot{z}(z,v,\Delta_s) = Az + B \left(v + k_c \int_0^t (\tilde{y}_c - \tilde{y}) dt \right) + B\Delta_s, \quad (14)$$

em que resta determinar k_c , além da lei de controle v , em que é assumido que os estados do sistema estão disponíveis para realimentação. Sendo assim,

$$v(z) = Kz. \quad (15)$$

Como as incertezas Δ_s dependem em última instância dos estados do sistema, é razoável supor que essas sejam limitadas. Assim, seguindo a proposta de (Leite et al., 2013) são assumidas as seguintes hipóteses:

H₁ A função $\alpha_n(x)$ é conhecida e pertence à família de funções que verificam

$$\alpha_n^T(x)\alpha_n(x) \leq \delta_1 x^T x, \quad (16)$$

com $x \in \mathcal{D}$ e $\delta_1 > 0$.

H₂ A função $\gamma_n^{-1}(x)$ é conhecida e pertence a uma família de funções que verificam

$$\gamma_n^{-T}(x)\gamma_n^{-1}(x) \leq \delta_2 I, \quad (17)$$

com $x \in \mathcal{D}$ e $\delta_2 > 0$.

H₃ A função de incertezas Δ_s não é conhecida, porém é limitada em energia, verificando

$$\|\Delta_s(x)\|_2^2 = \int_0^\infty \Delta_s(x)^T \Delta_s(x) dt \leq \delta_3, \quad (18)$$

com $x \in \mathcal{D}$ e $0 < \delta_3 < \infty$.

Problema 1 Dado o sistema (1) sujeito a (7) e às hipóteses **H₁**, **H₂** e **H₃**, determinar k_c e K , tais que u dado em (13) com (11) e (15), resulte em (14) estável.

Para a solução do Problema 1, considere-se o estado aumentado

$$X = \begin{bmatrix} \int (\tilde{y}_c - \tilde{y})^T dt & z^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (19)$$

em que v é dado em (15). De (14) é possível escrever

$$\dot{X}(X,\Delta_s) = A_0X + B_0\Delta_s, \quad (20)$$

em que

$$A_0 = \begin{bmatrix} -k_c & \mathbf{0} \\ Bk_c & A+BK \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} CB \\ B \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Portanto, A_0 e B_0 são construídas a partir dos valores nominais do modelo utilizado. A linearização por realimentação é projetada a partir do sistema nominal. Neste caso, pode-se alocar a autoestrutura do sistema nominal linearizado no interior de um círculo de raio r e centro em $(-q,0)$, denotado por $C(q,r)$ (veja Figura 1).

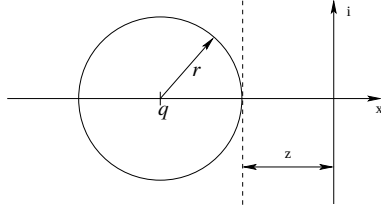


Figura 1: Região Circular $C(q,r)$.

Note-se que considerar a região $C(q,r)$ faz sentido apenas quando é considerado o sistema nominal. Nesse caso, os autovalores estão em uma região que permite a aproximação da malha fechada por uma dinâmica (dominante) de segunda ordem. Nesse caso, os principais parâmetros de um sistema de segunda ordem — amortecimento e frequência natural de oscilação — podem ser ajustados com a escolha adequada dos valores de r e q . Conforme apresentado em (Haddad & Bernstein, 1992) os valores de r e q relacionam-se com o coeficiente de amortecimento,

$$\zeta = \cos \theta, \text{ conforme } r = \frac{\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}{1-\sqrt{1-\zeta^2}} \text{ e } q = \frac{\zeta}{-\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Lema 1 (Alocação regional de autoestrutura) As seguintes afirmativas são equivalentes:

1. A matriz $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ possui todos os seus autovalores no interior da região determinada pelo círculo $C(q,r)$.

2. Existe uma matriz $0 < W = W^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$(A_0 + (q-r)I)W + W(A_0 + (q-r)I)^T + \frac{1}{r}(A_0 + (q-r)I)W(A_0 + (q-r)I)^T < 0. \quad (22)$$

3. Existe uma matriz $0 < P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\begin{bmatrix} -rP & A_0G + qG \\ \star & r(P - G - G^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

A equivalência entre 1 e 2   estabelecida em (Haddad & Bernstein, 1992). A equivalência entre 2 e 3 foi estabelecida em (Leite & Peres, 2005) utilizando o Lema de Finsler. Ressalta-se a relação entre as matrizes W e P : $W = \frac{P}{r}$ (Leite & Peres, 2005, Lema 2).

3 Resultados principais

O resultado principal deste trabalho   uma condição para o cômputo dos ganhos K e k_c que estabilizam robustamente o sistema não linear incerto nas funções $\alpha(x)$ e $\gamma(x)$.

Teorema 1 (Estabilidade Robusta) Considere o sistema não linear na forma (1) sujeito a (7), às hipóteses H_1 , H_2 , H_3 e com sinal de controle u dado em (13) com (11) e (15). Dadas as matrizes $\beta_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\beta_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$, se existem matrizes $F_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $F_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $Z_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $0 < P^T = P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ \star & P_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (m+n)}$, com

$P_{11} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e escalar $\mu > 0$ tais que:

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 & \Xi_3 & \Xi_4 & \mathbf{0} & CB \\ \star & \Xi_5 & \Xi_6 & \Xi_7 & \mathbf{0} & B \\ \star & \star & -P_{11} & -P_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -P_{22} & F_2^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & -I & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\mu I \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (24)$$

em que $\Xi_1 = -F_1^T - F_1 + P_{11}$, $\Xi_2 = -\beta_2^T F_2^T - F_1 \beta_1 + P_{12}$, $\Xi_3 = \frac{1}{r}(-Z_1 + qF_1)$, $\Xi_4 = \frac{1}{r}(F_1 \beta_1 - Z_1 \beta_1)$, $\Xi_5 = -F_2^T - F_2 + P_{22}$, $\Xi_6 = \frac{1}{r}(qF_2 \beta_2 + BZ_1 + AF_2 \beta_2 + BZ_2 \beta_2)$, $\Xi_7 = \frac{1}{r}(AF_2 + BZ_2 + BZ_1 \beta_1 + qF_2)$, então, o sistema em malha fechada (20),   robustamente estável com a incerteza Δ_s limitada a $\|\Delta_s\| \leq \sqrt{\delta_3} = \mu^{-1}$ e com a lei de controle dada em (13) com (11) e (15), em que K e k_c são recuperados como

$$K = Z_2 F_2^{-1}; \quad k_c = Z_1 F_1^{-1}. \quad (25)$$

Prova: Observe que para $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ limitado, tem-se que Δ_s dada em (10)   limitada satisfazendo H_3 . Se

(24)   verificada, assegura-se de $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ \star & P_{22} \end{bmatrix} > 0$. Via complemento de Schur, as definições $Z_1 = k_c F_1$, $Z_2 = K F_2$, A_0 e B_0 dados em (21), $F = \begin{bmatrix} F_1 & F_1 \beta_1 \\ F_2 \beta_2 & F_2 \end{bmatrix}$ e pr - e p s-multiplicando o resul-

tado por $\mathcal{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & F^{-T} \sqrt{r} & 0 \\ F^{-T} \sqrt{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ e seu transposto

obtm-se $\Theta_2 =$

$$\begin{bmatrix} -r\tilde{P} & (A_0 + qI)^T G & B_0 \\ \star & r(\tilde{P} - G^T - G) & 0 \\ \star & \star & -\mu I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ \star & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (26)$$

em que $G = F^{-T}$ e $\tilde{P} = F^{-T} P F^{-1} = G P G^T$. Dessa desigualdade pode-se ver que a primeira parcela é necessariamente definida negativa e que seu bloco superior esquerdo corresponde à condição 3 do Lema 1 com a troca de A_0 por A_0^T . Portanto, os autovalores de A_0^T (logo, os autovalores de A_0) estão localizados no interior da região $C(q,r)$. Pré- e p s-multiplicando Θ_2

por $\mathcal{T}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r}} I & \frac{(A_0 + qI)^T}{r^{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ e $\mathcal{T}_2^T$, obt m-se

$$\Theta_3 = \mathcal{T}_2 \Theta_2 \mathcal{T}_2^T = \begin{bmatrix} \Xi_8 & \frac{1}{\sqrt{r}} B_0 \\ \star & -\mu I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & 0 \\ \star & 0 \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (27)$$

em que $\Xi_8 = \frac{1}{r^2}(A_0 + qI)^T \tilde{P}(A_0 + qI) - \tilde{P}$. Conforme (Leite & Peres, 2005), $\frac{1}{r^2}(A_0 + qI)^T \tilde{P}(A_0 + qI) - \tilde{P} < 0$ é equivalente   condição 2 do Lema 1, ou seja, é equivalente a $(A_0 + (q-r)I)^T W + W(A_0 + (q-r)I) +$

$\frac{1}{r}(A_0 + (q-r)I)^T W (A_0 + (q-r)I) < 0$ com $W = \tilde{P}/r$. Assim, (27) pode ser reescrita como

$$\Theta_3 = \begin{bmatrix} \Xi_9 & \frac{1}{\sqrt{r}}B_0 \\ \star & -\mu I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & 0 \\ \star & 0 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} -\Xi_{10} & 0 \\ \star & 0 \end{bmatrix} \leq 0, \quad (28)$$

em que $\Xi_9 = (A_0 + (q-r)I)^T W + W (A_0 + (q-r)I)$ e $\Xi_{10} = \frac{1}{r}(A_0 + (q-r)I)^T W (A_0 + (q-r)I)$. Portanto, utilizando a negatividade do lado esquerdo de (28), pode-se pré-multiplicá-lo por $[X^T \ \Delta_s^T]$ e pós-multiplicá-lo por seu transposto, o que resulta em

$$X^T W \dot{X} + \dot{X}^T W X - \mu \Delta_s^T \Delta_s + X^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} X < 0 \quad (29)$$

com $\dot{X}$ dado por (20) com A_0 substituído por $A_0 + (q-r)I$ — o que significa que os autovalores de A_0 estão à esquerda de $-(q-r)$ o que é assegurado pela verificação do Lema 1 — devido à alocação regional de autoestrutura.

Por outro lado, utilizando o estado aumentado X é possível reescrever (18) como

$$\Delta_s^T \Delta_s \leq \delta_3 X^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} X. \quad (30)$$

Para a estabilidade de (20), com a lei nominal de linearização finita (H_1 e H_2), utilizamos a candidata a função de Lyapunov dada por $V(X) = X^T \tilde{P} X$. Além disso, é necessário que a negatividade de $V(X)$ seja assegurada por (24). Note-se que

$$\dot{V}(X) = \dot{X}^T \tilde{P} X + X^T \tilde{P} \dot{X} < 0. \quad (31)$$

Usando o procedimento S (Boyd et al., 1994), $\exists \tau > 0$ tal que, de (30) e (31) temos:

$$\dot{X}^T \tilde{P} X + X^T \tilde{P} \dot{X} - \tau \left(\Delta_s^T \Delta_s - \delta_3 X^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} X \right) < 0. \quad (32)$$

Multiplicando (32) por $\mu = (\tau \delta_3)^{-1}$ obtemos

$$\dot{X}^T \tilde{P} X + X^T \tilde{P} \dot{X} - \left(\mu \Delta_s^T \Delta_s - X^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} X \right) < 0, \quad (33)$$

em que $\tilde{P} = \frac{\tilde{P}}{\tau \delta_3}$. Além disso, pela homogeneidade em τ , podemos assumi-lo unitário sem perda de generalidade. Da comparação de (29) com (33) pode-se concluir que (33) é assegurada. ■

O seguinte procedimento é proposto para a síntese de ganhos do controlador IDR:

1. Determinar os valores nominais de $\alpha_n(x)$ e $\gamma_n(x)$, os mínimos e máximos de $\Delta_\alpha(x)$ e $\Delta_\gamma(x)$, o valor máximo do sinal de controle não linear $u_{\max}$ e calcular, via (13), a norma máxima do sinal de controle linear $\|v\|_{\max}$.
2. Estimar $\|\Delta_s\|_{\max}$ e, via (10), obter:

$$\|\Delta_s\|_{\max}(x, v) = \Delta_\gamma(x)_{\max} \gamma_n^{-1}(x) v_{\max} - \frac{(\gamma_n(x) + \Delta_\gamma(x)_{\min}) \Delta_\alpha(x)_{\min}}{\Delta_\alpha(x)_{\min}}. \quad (34)$$

3. Definir os parâmetros $C(q, r)$ e estudar uma região de interesse para os parâmetros b_1 e b_2 de forma a obter as matrizes $\beta_1 = b_1 [I_m \ \mathbf{0}_{m \times n-m}]^T$ e $\beta_2 = b_2 [I_m \ \mathbf{0}_{m \times n-m}]^T$.
4. Obter os ganhos K e k_c via Teorema 1 para valores de b_1 e b_2 até que se consigam ganhos que atendem a relação $|K| \leq 2|k_c|$. Caso sejam obtidos vários pares

(K, k_c) que satisfaçam $|K| \leq 2|k_c|$, pode-se refinar a seleção via simulação computacional, e cômputo do respectivo IAE (integral do valor absoluto do erro), sendo o erro definido como a diferença entre a saída dos sistemas incertos e a saída do sistema nominal. Caso não seja obtida uma solução factível, retornar à etapa 3 e selecionar novos valores de b_1 e b_2 .

4 Estudo de caso

Para avaliar a técnica IDR e a proposta deste trabalho de procedimento de síntese de ganhos de realimentação de estados e de compensação, é utilizado o modelo não linear de um tanque cilíndrico com seção transversal constante em cujo interior existe um sólido como apresentado na Figura 2. Nessa figura são mostrados vários sólidos obtidos por meio da variação dos parâmetros de sua equação geradora. Os parâmetros se-

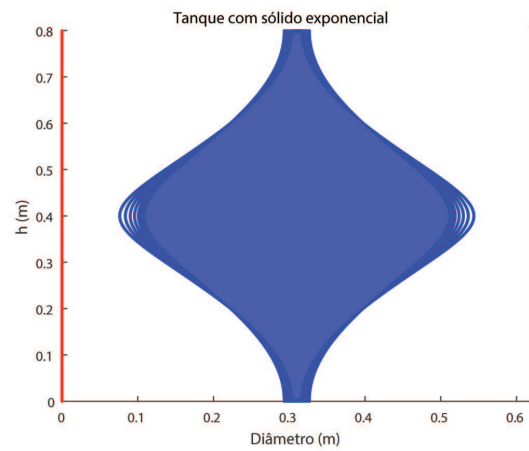


Figura 2: Representação em corte do tanque e sólido com perfil não linear no interior.

guintes foram admitidos em função de um sistema de tanques existente em laboratório: sinal de controle u com $u_{\max} = 1,665 \times 10^{-3} m^3/s$; altura da coluna de água, h_f , que varia na faixa $0,00m \leq h_f(t) \leq 0,80m$. Utilizando equações de balanço de massa, a dinâmica do sistema é dada por:

$$\frac{dh_f}{dt} = -a \sqrt{\frac{2gh_f}{A_t^2 - a^2}} + \frac{1}{A_t} u(t) \quad (35)$$

$$\text{em que } A_t = 1,62r^2 - \frac{0,6r \cos(2,5\pi(h_f - \mu))}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{\frac{(h_f - \mu)^2}{-2\sigma^2}}$$

é a área útil do tanque; $r = 0,31m$ é o raio do tanque; $\mu = 0,40$ e $\sigma = 0,55$ são parâmetros nominais da não linearidade. Note-se que μ determina a altura na qual a não linearidade reduz a área útil do tanque ao valor mínimo. Sendo assim, escolher $\mu = 0,40$ faz com que a área mínima esteja na altura média do tanque. Já o parâmetro σ , é responsável por tornar o perfil da não linearidade mais proeminente ou mais plano em torno da região central determinada por μ . Nesse caso, a escolha de $\sigma = 0,55$, possibilita incluir uma incerteza da ordem de 10% sem que a área da não linearidade extrapole os limites físicos do tanque. Segundo (Khalil, 2002), é possível expressar (35) na forma equivalente (1). Assim, seguindo os passos do

procedimento apresentado na seção anterior, assumiu-se uma incerteza de 10% associada ao parâmetro σ , e calculou-se $\alpha_n(x) = 0,0023$, $\gamma_n(x) = 0,0098$, $\Delta_\alpha(x) \in [0, 0,2047 \times 10^{-4}]$, $\Delta_\gamma(x) \in [0, 0,0153]$. Com isso, estimou-se o valor máximo do sinal de controle linear, $v_{\max} = 6,4796 \times 10^{-2}$. Conforme indicado no passo 2, estimou-se a norma máxima da incerteza, $\|\Delta_s\|_{\max} = 9,7155 \times 10^{-6}$.

A alocação da autoestrutura do sistema linearizado em malha fechada foi escolhida de forma a tornar a resposta da malha fechada a uma mudança de 0,3 m no ponto de operação pelo menos duas vezes mais rápida que a resposta do sistema nominal em malha aberta, obtida via simulação computacional. Com a saída do sistema em uma condição inicial de 0,20 m, um degrau de $0,38 \times u_{\max} = 6,327 \times 10^{-4} m^3/s$ no sinal de controle, proporciona um aumento de nível da ordem de 0,30 m em aproximadamente 200 s. Portanto, a escolha do ganho de realimentação de estados deve levar o sistema linearizado em malha fechada a prover a mesma diferença de nível, 0,30 m em no máximo 100 s. Para atender a especificação, foi definida a alocação da autoestrutura do sistema linearizado em malha fechada na região $C(-0,050, 0,0500)$. Com esses valores utilizou-se o Teorema 1 com uma busca linear nos parâmetros β_1 e β_2 conforme o passo 4 do procedimento apresentado na seção anterior. Dentre os valores obtidos para K e k_c , foi escolhido o par $K = -0,0500$ e $k_c = 0,2495$, que asseguram $\|\Delta_s\|_{\max} = 1 \times 10^{-5}$, obtidos a partir de $b_1 = \beta_1 = 1,8182$, $b_2 = \beta_2 = -0,6$. Com esses valores de K e k_c foram realizadas simulações computacionais para verificar a robustez e desempenho do sistema mediante variações paramétricas. Foram gerados vinte sistemas incertos, obtidos a partir da seleção de 20 valores de σ distribuídos no intervalo $[0,9\sigma, 1,1\sigma]$, que foram usados em todas as simulações em conjunto com nível inicial $h(0) = 0,20m$.

As curvas das saídas do sistema, nível $y(t) = h_f(t)$, e o erro entre os sistemas incertos e o sistema nominal, são mostrados na Figura 3, para o sistema não compensado e, na Figura 4, para o sistema compensado. Observa-se a resposta do sistema nominal, linha traço-ponto preta, e as diversas respostas dos sistemas incertos, linhas contínuas vermelhas. Em ambas as figuras é possível observar que o sistema parte da condição inicial, $x(0) = 0,20m$, e acomoda-se na nova referência, $x^0 = 0,50m$, em aproximadamente 100 segundos. Note-se que durante a transição, para o sistema não compensado, as curvas se afastam do sistema nominal. Isso se deve ao efeito da variação paramétrica. Esse efeito é reduzido nas curvas para o sistema compensado, estando essas mais próximas da resposta do sistema nominal devido à ação da compensação IDR. Nas mesmas figuras são apresentados os sinais de erro entre os sistemas incertos e o sistema nominal. Note-se que o erro no sistema não compensado chega a $8 \times 10^{-2}m$ enquanto que no sistema compensado o erro é mais de dez vezes menor, estando limitado a $2 \times 10^{-3}m$. Na Figura 5, são mostrados três índices de desempenho: IVU, IVY e IAE, implementados conforme (Braga, 2015). Nas abscissas estão os valores de σ usados para construir cada sistema incerto simulado. No primeiro gráfico é possível observar o Índice de variabilidade do sinal de controle, IVU, no segundo, o Índice de variabilidade da saída

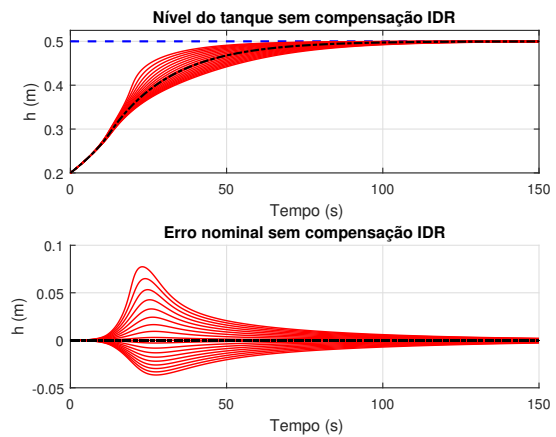


Figura 3: Sistema sem compensação: Nível e Erro entre saída dos sistemas incertos (linha contínua vermelha) e nominal (linha traço-ponto preta).

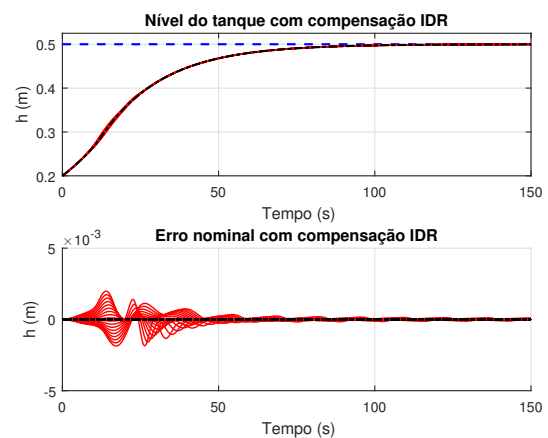


Figura 4: Sistema com compensação: Nível e Erro entre saída dos sistemas incertos (linha contínua vermelha) e nominal (linha traço-ponto preta).

do sistema, IVY, e no terceiro, a Integral do valor absoluto do erro, IAE. Em todos os gráficos, o sistema compensado é representado em linha tracejada preta e o não compensado em linha contínua vermelha. Nesses, é possível observar que, a medida que a incerteza aumenta, à esquerda e à direita do valor nominal de $\sigma = 0,55$, os índices de desempenho também aumentam. Os valores máximos dos índices de desempenho podem ser vistos na Tabela 1. Note-se que para o IVU, fica evidente um maior esforço de controle no sistema compensado, em média 107,73% maior, o que contribui para a redução média de 92,14% no IVY e 98,05% no IAE. A partir da avaliação quantitativa dos índices utilizados, é possível comprovar o desem-

Tabela 1: Índices de desempenho máximos

Índice	Sistema compensado	Sistema não compensado
$IVU_{\max}$	$43,05 \times 10^{-6}$	$22,07 \times 10^{-6}$
$IVY_{\max}$	$1,4126 \times 10^{-3}$	$21,78 \times 10^{-3}$
$IAE_{\max}$	0,4157	23,38

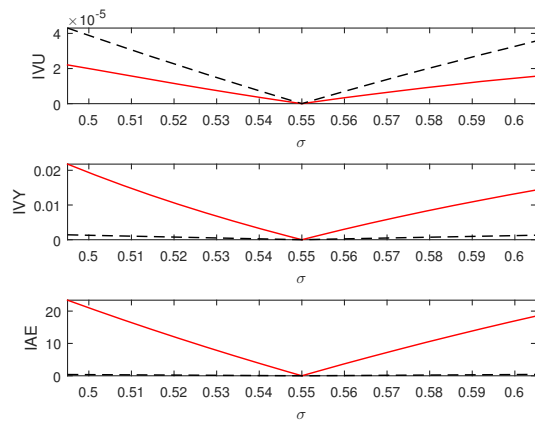


Figura 5: Índices de desempenho, sistema sem compensação (linha contínua), sistema com compensação (linha tracejada).

penho do sistema compensado em mitigar os efeitos das incertezas paramétricas no modelo do sistema, o que evidencia as qualidades da compensação IDR e também da eficácia do método proposto neste trabalho para selecionar os ganhos K e k_c .

5 Conclusão

Neste trabalho foi apresentada uma nova maneira para computar os ganhos de realimentação de estados e de uma malha de compensação associada à topologia IDR para estabilizar e melhorar o desempenho de sistemas não lineares incertos linearizados por realimentação via modelo nominal. O procedimento de síntese é feito por meio de passos convexos e assegura a estabilidade para todo o conjunto de incertezas considerado. Foi apresentado um estudo de caso associado a um processo não linear de controle de nível — auto-regulável. As simulações realizadas demonstram uma melhora substancial no desempenho do sistema em malha fechada. Essa melhora foi atestada pela avaliação quantitativa de índices de desempenho como IAE, IVU e IVY.

Referências

Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. & Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Vol. 15 of *Studies in Applied Mathematics*, SIAM.

Braga, A. R. (2015). *Metodologia e métricas para gerenciamento de desempenho de processos com amostragem irregular*, Qualificação de doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

de Oliveira, M. C. & Skelton, R. E. (2001). Stability tests for constrained linear systems, in S. O. Reza Moheimani (ed.), *Perspectives in Robust Control*, Vol. 268 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, Springer-Verlag, New York, pp. 241–257.

Esfandiari, F. & Khalil, H. K. (1992). Output feedback stabilization of fully linearizable systems, *International Journal of Control* **56**(5): 1007–1037.

Franco, A. L. D., Boulès, H., De Pieri, E. R. & Guillard, H. (2006). Robust nonlinear control associating robust feedback linearization and $\mathcal{H}_\infty$ control, *IEEE Trans. Automatic Control* **51**: 1200 – 1207.

Haddad, W. M. & Bernstein, D. S. (1992). Controller design with regional pole constraints, *IEEE Transactions on Automatic Control* **37**(1): 54 – 69.

Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*, 3 edn, Springer.

Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*, 3 edn, Prentice Hall.

Lavergne, F. (2005). *Méthodologie de synthèse de lois de commandes non-linéaires et robustes : Application au suivi de trajectoire des avions de transport*, Tese de doutorado, Université Paul Sabatier - Toulouse III.

Lavergne, F. & Fauvel, T. (2011). Device for balancing a simulation platform, and associated method, Patent US 2011/0295574 A1.

Lavergne, F., Garcia, G., Tarbouriech, S., Villaume, F. & Jeanneau, M. (2000). Robust multi-inversion: Theory and application to aircraft angular rate control.

Leite, V. J. S. & Peres, P. L. D. (2005). Pole location control design of an active suspension system with uncertain parameters, *Vehicle System Dynamics* **43**(8): 561 – 579.

Leite, V. J. S., Tarbouriech, S. & Garcia, G. (2013). Energy-peak evaluation of nonlinear control systems under neglected dynamics, *9th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, Toulouse, France, pp. 646–651.

Menon, P., Herrmann, G., Turner, M., Lowenberg, M., Bates, D. & Postlethwaite, I. (2008). Nonlinear dynamic inversion based anti-windup - an aerospace application, *World IFAC Congress*, Seoul, Korea.

Oliveira, L. S., Franco, A. E. O. & Leite, V. J. S. (2015). Estratégia para síntese do ganho da malha de controle robusto em sistemas com realimentação linearizante via algoritmo diferencial evolutivo, *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, Natal, RN, pp. 1824 – 1829.

Silva, F. P., Leite, V. J. S. & Nepomuceno, E. G. (2014). Heuristic to tune the compensation gain of modeling uncertainties through the robust multi inversion, *19th International Conference on Methods & Models in Automation & Robotics (MMAR)*, Miedzyzdroje, Poland, pp. 100–105.

Soares, S. J. P. (2011). *Controle de um robô móvel utilizando realimentação linearizante robusta*, Dissertação de mestrado, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.