

## CONSTRUÇÃO E CONTROLE DIGITAL DE UM PÊNDULO INVERTIDO TRANSLACIONAL

GABRIEL PEREIRA DAS NEVES\*, BRUNO AUGUSTO ANGÉLICO\*

*\*Dept. de Eng. de Telecomunicações e Controle  
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brazil*

Emails: gabriel.pereira.neves@usp.br, angelico@lac.usp.br

**Abstract**— This paper presents the development, modeling and control of a translational inverted pendulum. The mechanical system was developed with recycled materials of a dot matrix printer, which made the final cost very reduced. A swing-up algorithm was developed to raise the pendulum. Hence, close to equilibrium point, a LQR digital control is designed to stabilize the system. The final results were very satisfactory in terms of prototype construction, performance and robustness of the controller.

**Keywords**— Digital Control, Inverted Pendulum, LQR, Swing-Up.

**Resumo**— Este artigo apresenta o desenvolvimento, modelagem e controle de um pêndulo invertido translacional. O sistema mecânico foi desenvolvido com materiais reaproveitados de uma impressora matricial, o que tornou o custo final bem reduzido. Um algoritmo swing-up foi desenvolvido para levantar o pêndulo. Então, próximo ao ponto de equilíbrio, um controle digital LQR foi projetado para estabilizar o sistema. Os resultados finais foram muito satisfatórios em termos da construção do protótipo e do desempenho e robustez do controlador.

**Palavras-chave**— Controle Digital, Pêndulo Invertido, LQR, Swing-Up.

### 1 Introdução

O pêndulo invertido é um dos problemas de controle mais utilizados com exemplo em textos didáticos de Engenharia de Controle (Franklin et al., 2013; Ogata, 2003). Trata-se de um sistema naturalmente instável. Há diversas aplicações práticas onde o sistema a ser controlado possui características semelhantes ao pêndulo invertido, como lançamento de foguetes, veículos de duas rodas auto-equilibrados (ex.: Segway) e robôs bípedes.

Dois modelos de pêndulo invertido são comumente estudados em cursos de controle: o pêndulo translacional e o pêndulo rotacional, este último proposto em (Masaki YAMAKITA, 1999). Outra variação é o pêndulo com roda de reação (Jepsen et al., 2009). Robôs autoequilibrados com duas rodas (W. An, 2013) e monociclos (S. I. Ha, 2015) são exemplos de sistemas baseados em pêndulo invertido.

Para estabilizar o pêndulo na posição invertida, geralmente considera-se um controlador com característica de avanço de fase projetado no domínio da frequência, como o PID (proporcional-integral-derivativo), rede de avanço-atraso de fase. Outra abordagem consiste no controle por realimentação de estados, por alocação de polos ou o regulador linear quadrático (LQR).

Para o pêndulo sair da posição de repouso, utiliza-se um algoritmo de swing-up, sendo o mais comum baseado em energia (K. J. Astrom, 1996). O trabalho apresentado em (Debasish Chatterjee, 2002) faz uma variação do swing-up para sistemas com restrição de deslocamento do carro.

Para projetar um controlador digital existem duas formas: projetar o controle contínuo e achar uma aproximação discreta ou discretizar

a planta e projetar o controle discreto (Franklin et al., 2006).

O controle LQR (Sigurd Skogestad, 2005) é considerado um controle ótimo pois é construído para minimizar uma função custo. Tal controle é muito estudado e aplicado em diversos sistemas dinâmicos. Este trabalho mostrará o projeto de um controlador LQR discreto com e sem integrador.

Será apresentada a construção de um pêndulo de baixo custo em que foi aplicado o controle LQR discreto. Também é proposta uma nova abordagem para o swing-up aplicada a esse pêndulo.

### 2 Construção

O pêndulo foi construído utilizando carcaça de uma impressora matricial. O motor de passo (originalmente presente na impressora) foi trocado por um motor CC, também reutilizado. Foram colocados duas chaves de fim de curso como uma medida de segurança para equipamento. O ângulo do pêndulo é medido através de um encoder incremental e a posição do carro (por consequência a velocidade do eixo do motor) é obtida através de um sensor óptico de posição. O sistema construído apresenta uma excursão máxima de 34 [cm] (17 [cm] para a direita e 17 [cm] para a esquerda). A construção final pode ser vista na Figura 1.

O driver de acionamento é uma ponte H, com sinal PWM na frequência de chaveamento de 15 kHz. O hardware de controle utilizado foi o kit FRDM K64F da Freescale.

Os parâmetros reais desse pêndulo, que serão utilizados no projeto do controlador, estão presente na Tabela 1.

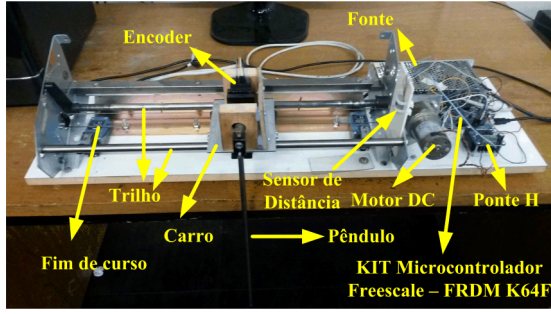


Figura 1: Sistema construído.

Tabela 1: Parâmetros do Pêndulo

|        | Parâmetro                         | valor  |
|--------|-----------------------------------|--------|
| $M$    | Massa do carro $[Kg]$             | 0,6242 |
| $m$    | Massa do pêndulo $[Kg]$           | 0,1722 |
| $b$    | Atrito $[Ns^2/m]$                 | 1,0    |
| $J$    | Momento de inércia $[Ns^2/rad]$   | 0,0006 |
| $g$    | Aceleração da gravidade $[m/s^2]$ | 9,8    |
| $\ell$ | Distancia até o CM $[m]$          | 0,2050 |
| $n$    | Redução do motor                  | 5,9    |
| $r$    | Raio do rotor $[m]$               | 0,0141 |
| $R_m$  | Resistência do motor $[\Omega]$   | 1,4    |
| $K_e$  | Cte. de f.c.e.m. $[Vs^2/m]$       | 0,0194 |
| $K_t$  | Cte. de torque $[Nm/A]$           | 0,0164 |

### 3 Modelagem

Considerando a Figura 2, as equações da dinâmica do pêndulo são

$$(M + m)\ddot{x}_p + b\dot{x}_p + m\ell\ddot{\theta} \cos \theta - m\ell\dot{\theta}^2 \sin \theta = F, \quad (1)$$

$$(J + m\ell^2)\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = -m\ell\ddot{x}_p \cos \theta. \quad (2)$$

Como nesse protótipo o carro é puxado por um cabo de aço preso em um motor CC, a força  $F$  é calculada dada por:

$$F = \frac{nK_t}{rR_m}(12PWM - \frac{K_e\dot{x}_p}{nr}), \quad (3)$$

onde  $PWM$  é a entrada do sistema  $u$  que repre-

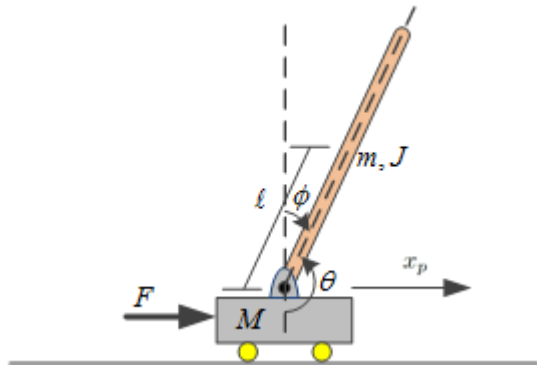


Figura 2: Desenho esquemático.

senta porcentagem do *duty cycle* da técnica de modulação por largura de pulso.

O ângulo que se deseja controlar é o aquele entre o pêndulo e a linha vertical, defini-se então  $\phi = \theta - \pi$ .

Substituindo os valores da Tabela 1 nas equações (1), (2) e (3) e linearizando em torno do ponto  $(x_p = 0, \dot{x}_p = 0, \phi = 0 \text{ e } \dot{\phi} = 0)$ , obtém-se o seguinte sistema descrito em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \ddot{x}_p \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_p \\ \dot{x}_p \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + Bu, \quad (4)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3,3516 & 2,4437 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15,0918 & 55,1312 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 91,9629 \\ 0 \\ 414,0919 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Discretizando o sistema a um período de amostragem  $T_s = 1/100[s]$ , considerando o efeito do segurador de ordem zero (ZOH), e definindo o vetor de estados como  $x[k]$  obtém-se:

$$x[k+1] = \Phi x[k] + \Gamma u[k], \quad (7)$$

onde

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0098 & 0,0001 & 0,0000 \\ 0 & 0,9670 & 0,0241 & 0,0001 \\ 0 & -0,0007 & 1,0028 & 0,0100 \\ 0 & -0,1486 & 0,5500 & 1,0028 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

e

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0,0045 \\ 0,9046 \\ 0,0205 \\ 4,0761 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Assim, tem-se o modelo discreto do sistema.

### 4 Controle LQR Discreto

O controle LQR digital (Franklin et al., 2006) é aquele que minimiza a função custo

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]^T Q x[k] + u[k]^T R u[k], \quad (10)$$

onde  $x[k]$  é o vetor de estados,  $u[k]$  é o vetor de entrada e  $Q$  e  $R$  são matrizes semi-positivas de ponderação.

Sabe-se que a solução é do tipo

$$u[k] = -Kx[k], \quad (11)$$



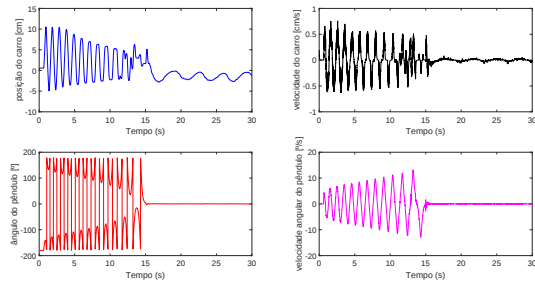


Figura 5: Dados medidos com o controlador LQR sem integrador e com Swing-up.

para  $|\theta| < 150^\circ$ . Após  $|\theta|$  atingir o valor de  $150^\circ$  pela primeira vez,

$$u = -0,3 \cos(\theta) \operatorname{sgn}(\dot{\theta}), \text{ para } |\theta| \leq 143^\circ, \quad (23)$$

$$u = 0, \text{ para } |\theta| > 143^\circ. \quad (24)$$

## 6 Resultados Práticos

Para realizar o swing-up é considerado o ângulo  $\theta$  e no controle estabilizante utiliza-se o ângulo  $\phi$ . A relação entre eles é dada por

$$\phi = \theta - \pi \cdot \operatorname{sgn}(\theta), \quad (25)$$

dessa forma, se o pendulo entrar pela direita ( $\theta < 0$ ) ou pela esquerda ( $\theta > 0$ ) não fará diferença para o controle. O swing-up implementado funciona até que  $|\phi| < 5^\circ$ , a partir disso, o controle LQR é habilitado.

Considerando o controlador LQR sem integrador (15), como pode ser visto na Figura 5, o algoritmo proposto para o swing-up funcionou perfeitamente. A Figura 7 é o mesmo gráfico porém apenas mostrando o funcionamento do controlador estabilizante. Pode-se observar que o LQR funcionou como esperado, pois as variações do ângulo do pêndulo (visto na Figura 7) são, no máximo,  $0,4^\circ$ , o que está muito próximo de zero.

As Figuras 6 e 8 correspondem aos esforços de controle, gerados multiplicando-se o *duty-cycle* do PWM por 12 [V] (tensão nominal).

Considerando agora o LQR com integrador (19) e aplicando uma onda quadrada como trajetória a ser seguida pelo carrinho, os resultados obtidos são apresentados na Figura 9. Como o algoritmo de swing-up é o mesmo do LQR sem integrador, os gráficos são mostram o funcionamento do controle. Observa-se que o pêndulo continua estável junto com o movimento do carrinho.

A Figura 10 mostra a posição do carro junto com a referência. Observa-se que o carrinho seguiu a referência, porém, há pequenas variações menores que 2 [cm]. Isso é devido a efeitos não modelados como o atrito seco entre o carrinho e o trilho. O esforço de controle pode ser visto na

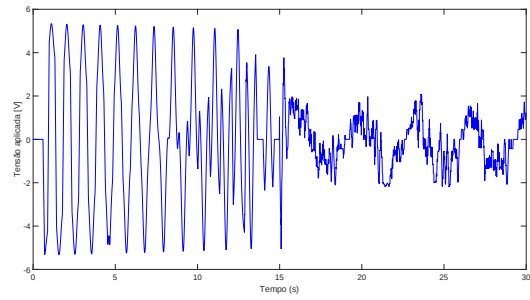


Figura 6: Esforço de controle com o LQR sem integrador e com Swing-up.

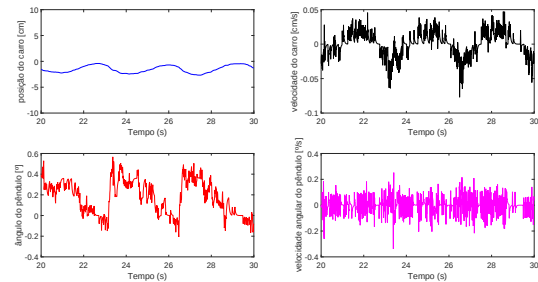


Figura 7: Dados medidos com o controlador LQR sem integrador e sem Swing-up.

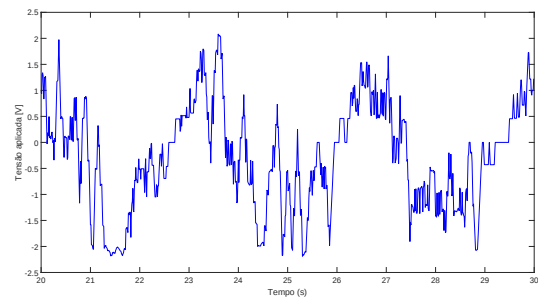


Figura 8: Esforço de controle com o LQR sem integrador e sem Swing-up.

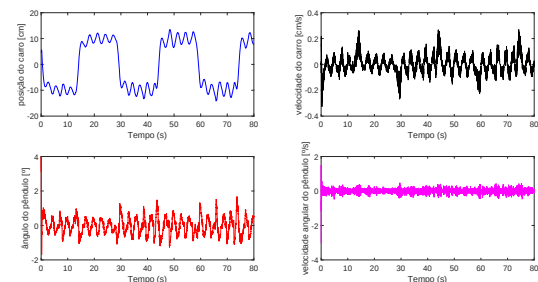


Figura 9: Dados medidos com o controlador LQR com integrador e sem Swing up.

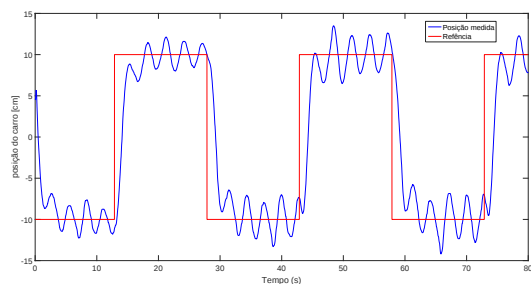


Figura 10: Posição medida do carro e a referência.

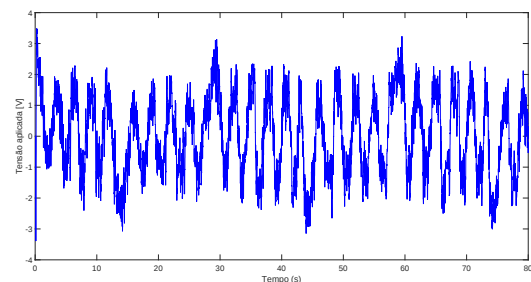


Figura 11: Esforço de controle com o LQR com integrador.

Figura 11. Pode-se ver que o esforço está bem abaixo da saturação do controle (12 [V]).

## 7 Conclusões

O sistema construído é de baixo custo e tem grande potencial para ser utilizado em laboratórios didáticos de controle. O algoritmo swing-up conseguiu levar o pêndulo para a região próxima ao ponto de equilíbrio, mesmo com a excursão reduzida do trilho do carro. O algoritmo LQR digital conseguiu estabilizar o pêndulo e ainda possibilitar que o carro seguisse uma referência na forma de pulso retangular. O resultado final do projeto foi bem satisfatório. O protótipo será convertido em um produto com melhor acabamento para ser utilizado no laboratório didático da Escola Politécnica da USP.

## Agradecimentos

Os autores agradecem a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo processo 2016/00729-9 e a Freescale pela doação da placa FRDM-K64F.

## Referências

Debasish Chatterjeea, Amit Patraa, H. K. J. (2002). Swing-up and stabilization of a cart-pendulum system under restricted cart track length, *Systems e Control Letters* **47**: 355–364.

Franklin, G., Powell, J. and Emami-Naeini, A. (2013). *Sistemas de Controle para Engenharia - 6ed*, Bookman Editora, Porto Alegre, RS.

Franklin, G., Powell, J. and Workman, M. (2006). *Digital Control of Dynamic Systems*, 3rd ed. (reprint) edn, Ellis-Kagle Press.

Jepsen, F., A. Soborg, A. R. P. and Yang, Z. (2009). Development and control of an inverted pendulum driven by a reaction wheel, pp. 2829–2834.

K. J. Astrom, K. F. (1996). Swinging up a pendulum by energy control, *13th IFAC World Congress* pp. 1–15.

Masaki YAMAKITA, Tasuku HOSHINO, K. F. (1999). Control practice using pendulum, *American Control Conference* pp. 490–494.

Ogata, K. (2003). *Engenharia de Controle Moderno*, 4 ed. edn, Prentice-Hall, São Paulo, SP.

S. I. Ha, J. M. L. (2015). Balancing and velocity control of a unicycle robot based on the dynamic model, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **62**(1): 405–413.

Sigurd Skogestad, I. P. (2005). *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, 2nd edn, Wiley.

W. An, Y. L. (2013). Simulation and control of a two-wheeled self-balancing robot, pp. 456–461.