

O USO DE GIROSCÓPIOS E ACELERÔMETROS PARA A MODELAGEM MATEMÁTICA DE UMA PLATAFORMA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

VINÍCIUS NUNES LAGE, ALAN KARDEK RÊGO SEGUNDO

*Departamento de Engenharia de Controle e Automação e de Técnicas Fundamentais-DECAT
Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto-UFOP
Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil*

E-mails: viniciusop@gmail.com, alankardek2@gmail.com

Abstract— This paper shows the assembly of a servo-controlled platform, with two degrees of freedom, in order to identify empirically the mathematical model of the system. For that, the step response has been parsed, and were found first and second-order models. The MATLAB software was used to provide the step response of the model obtained empirically and so, compare it with the experimental data. The measurement of the angular position of the platform was performed by means of accelerometers and gyroscopes from MPU-6050 sensor. To obtain more accurate measuring results and eliminate the noise effect, we implemented the Complementary filter to the firmware of the system, which uses the Arduino platform for controlling servomotors and perform data acquisition.

Keywords— balanced platform, MPU6050 sensor, Complementary filter, Kalman filter, Arduino.

Resumo— Neste trabalho foi realizado a montagem de uma plataforma servo-controlada, com dois graus de liberdade, com o objetivo de identificar de forma empírica o modelo matemático do sistema. Para isso, a resposta ao degrau foi analisada, e foram encontrados modelos de primeira e segunda ordem. O software MATLAB foi utilizado para fornecer a resposta ao degrau do modelo obtido empiricamente e, assim, compará-la com os dados experimentais. A medição da posição angular da plataforma foi realizada por meio de acelerômetros e giroscópios do sensor MPU-6050. Para se obter resultados de medição mais precisos e eliminar o efeito de ruídos, foi implementado o filtro Complementar no firmware do sistema, que utiliza a plataforma Arduino para controlar os servomotores e realizar a aquisição de dados.

Palavras-chave— plataforma equilibrada, sensor MPU-6050, filtro Complementar, filtro de Kalman, Arduino.

1 Introdução

Sistemas de controle de posição e estabilidade são vastamente encontrados nos dias de hoje. Existem desde veículos modernos, que utilizam suspensões inteligentes para manter os passageiros sempre em posição horizontal, como também aeronaves não tripuladas (*drones*), que possuem câmeras instaladas em sistemas inteligentes em suas bases (conhecidos como *gimbals*), para manter a câmera sempre estabilizada, o que torna a filmagem estável e muito mais atraente para os telespectadores.

O Google, recentemente, adquiriu a startup *Levante Lab*, que criou o *Liftware* - colher que usa uma série de algoritmos e conta com tecnologia que estabiliza o acessório quando a mão da pessoa está tremendo. Essa ferramenta é muito útil para pessoas com Parkinson. Segundo o Google, o uso do dispositivo reduziu em 76% a queda de alimentos em testes próprios (EXAME, 2015).

Para que tais sistemas de controle sejam desenvolvidos de forma eficaz, é essencial que se identifique o modelo matemático do mecanismo. O cálculo desses modelos podem se tornar muito complexos quando o sistema é composto por diferentes partes e peças, cada uma com diversas propriedades distintas e difíceis de se medir, como por exemplo: momento de inércia, atrito, peso, volume, entre outras.

Existem métodos práticos para o cálculo do modelo matemático de sistemas dinâmicos complexos sem a necessidade de se estudar cada parte separadamente, pois se estuda o sistema como um todo. Esses métodos calculam modelos teóricos que representam muito bem a dinâmica real dos sistemas, e se tornam excelentes técnicas práticas e aplicáveis (NISE, 2011).

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento do modelo matemático de uma plataforma de dois graus de liberdade por meio de experimentos práticos e da avaliação das respostas do sistema.

2 Teoria

2.1 Acelerômetros e Giroscópios

O circuito integrado MPU-6050 é um sensor fabricado pela empresa IvenSense Inc., que reúne três sensores giroscópio (1 para cada eixo X, Y e Z), três sensores acelerômetros (também um para cada eixo) e um Processador Digital de Movimentos (*Digital Motion Processor* ou DMP) em um único chip (DATASHEET MPU-6050, 2015). Ele utiliza a comunicação I2C para a transmissão dos dados, possui internamente três conversores analógico/digital de 16 bits para a discretização dos valores dos acelerômetros e dos giroscópios internos. O sensor possui boa

precisão para movimentos rápidos ou lentos. O giroscópio possui escalas de ± 250 , ± 500 , ± 1000 ou ± 2000 graus por segundo (muitas vezes chamados de dps - *degrees per second*). Já os acelerômetros possuem faixas de medição de $\pm 2g$, $\pm 4g$, $\pm 8g$ ou $\pm 16g$, sendo $1g$ a aceleração da gravidade, que corresponde a aproximadamente $9,81 \text{ m/s}^2$.

Os acelerômetros são equipamentos que medem a aceleração própria de um corpo (TEXAS INSTRUMENTS, 2015). Eles são utilizados principalmente em sistemas de posicionamento, sensores de inclinação, bem como sensores de vibração. Um exemplo prático e bastante conhecido de acelerômetros são as telas dos aparelhos celulares: elas se ajustam de acordo com o ângulo que fazem em relação à aceleração da gravidade.

Quando o acelerômetro é colocado em posição horizontal, em uma mesa, por exemplo, ele irá medir uma força de $1g$ em um dos seus eixos. Porém, quando o sensor está inclinado, a força g é distribuída em dois eixos. Logo, é possível medir os ângulos por meio da trigonometria.

A Figura 1 mostra algumas disposições possíveis para o sensor e, as Equações 1, 2 e 3 são utilizadas para calcular os ângulos, sendo A_x , A_y e A_z os valores fornecidos pelos acelerômetros para os eixos X, Y e Z.

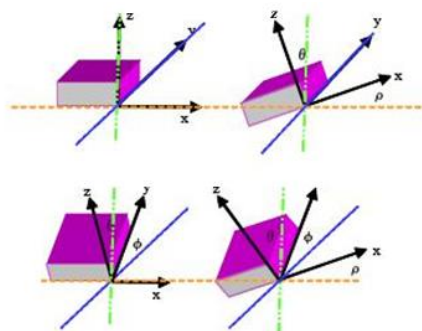


Figura 1. Ângulos através dos acelerômetros para 3 eixos

Fonte: PAULA, F. O, 2015

$$\rho = \arctan\left(\frac{A_x}{\sqrt{A_y^2 + A_z^2}}\right) \quad (1)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_z^2}}\right) \quad (2)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}}{A_z}\right) \quad (3)$$

Para a plataforma serão utilizados apenas os eixos X e Y, algumas vezes chamados de *roll* (ρ) e *pitch* (ϕ).

O MPU-6050 fornece valores adimensionais, chamados *raw values*, que devem ser convertidos para m/s^2 ou em múltiplos de forças “g” ($9,81\text{m/s}^2$). O *datasheet* informa que deve-se dividir o valor medido por 16,384 para uma faixa de medição de $\pm 2g$ de leitura. Logo, se o sensor retorna um valor de 16,384 no eixo X, significa que existe $1g$ naquele eixo. Essa divisão pode ser feita antes ou depois de se calcular os ângulos.

O valor obtido não é real quando se tem um movimento acelerado, por exemplo horizontalmente, mesmo sem modificar a orientação angular, pois o movimento gera novas forças além da gravitacional nos acelerômetros. Utilizam-se os giroscópios como auxílio para minimizar esse efeito.

Os giroscópios são utilizados para manter ou para medir orientação. Um giroscópio mecânico consiste de um disco rotativo no qual os eixos ligados a ele são capazes de se deslocar livremente em qualquer direção (PAULA, F. O, 2015).

Um giroscópio microeletrônico mede a velocidade angular (graus por segundo), a partir da qual se pode calcular o deslocamento angular.

Para processar a orientação, é preciso inicializar o sensor com uma posição conhecida (utilizando o acelerômetro) e, então, medir a velocidade angular nos eixos X, Y e Z por meio dos giroscópios, dentro de um intervalo de tempo conhecido.

O valor do deslocamento angular G_y , calculado por meio do giroscópio, é fornecido pela Equação 4.

$$G_y = \int \omega \, dt \quad (4)$$

O MPU-6050 disponibiliza valores adimensionais para os giroscópios. Para se chegar a medições expressas em graus por segundo, o *datasheet* informa que deve-se dividir os valores obtidos por 131, considerando uma faixa de medição de ± 250 graus por segundo.

O giroscópio sofre um efeito de desvio do valor real, que deveria ser medido ao longo do tempo. Quando ele está em posição estável, sem movimentação, seu valor cresce ou decresce devido aos erros inerentes à integração. Essa taxa de desvio é conhecida como *bias*, que deve ser levada em consideração nos cálculos.

A solução para reduzir os desvios, obter valores mais precisos e diminuir a propagação dos erros de cálculos, é utilizar o acelerômetro e o giroscópio em conjunto. Para isso, utiliza-se o filtro Complementar.

2.2 Filtro Complementar

O Filtro Complementar ou *Complementary Filter* é uma combinação linear matemática simples, na qual se define um peso para cada variável de entrada, neste caso uma para o acelerômetro e outra para o giroscópio, em que a soma desses pesos deve ser

igual a 1. As Equações 5, 6 e 7 expressam as relações matemáticas utilizadas por esse filtro.

$$\theta = \alpha G_y + (1 - \alpha) A_{cc} \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{\beta}{\beta + dt} \quad (6)$$

$$G_y = \theta + \omega dt \quad (7)$$

Sendo: dt o tempo de amostragem, em segundos; β a constante de tempo, em segundos; ω a velocidade angular medida pelo giroscópio, em graus por segundo; e A_{cc} o ângulo medido pelo acelerômetro, em graus.

Para se obter resultados satisfatórios, a constante de tempo β deve ser maior do que a escala de tempo típica do ruído do acelerômetro. Neste trabalho, foi utilizado tempo de amostragem $dt = 0,04s$ e constante de tempo $\tau = 1s$, obtendo-se um valor de $\alpha \approx 0.96$.

2.3 Modelagem Matemática

Um sistema pode ser modelado empiricamente por meio da análise da resposta a um degrau. Se o sistema apresentar comportamento de primeira ordem, ele pode ser descrito pela Equação 8 (OGATA, 2003).

$$T(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (8)$$

Sendo: s a variável de Laplace; e τ a constante de tempo.

A constante de tempo τ de um sistema de primeira ordem corresponde a 63,2% do tempo de subida.

Se o sistema apresentar comportamento de segunda ordem, ele pode ser descrito pela Equação 10 (OGATA, 2003).

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (10)$$

Sendo: ω_n a frequência natural; e δ o fator de amortecimento.

Para calcular os parâmetros do modelo de segunda ordem é necessário determinar o tempo de acomodação T_s , a porcentagem de sobressinal O_s (*overshoot*) e o tempo de pico T_p , de acordo com as Equações 11, 12, e 13, respectivamente. O fator de amortecimento δ é calculado por meio da Equação 14 (OGATA, 2003).

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \quad (11)$$

$$\%Os = 100 e^{\left(\frac{-\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \quad (12)$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (13)$$

$$\zeta = \frac{-\ln\left(\frac{\%Os}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln\left(\frac{\%Os}{100}\right)^2}} \quad (14)$$

3 Materiais e Métodos

A montagem mecânica da plataforma foi feita com materiais de baixo custo e facilmente encontrados no mercado nacional, sendo realizada de forma rápida e com baixa complexidade. Para isso, foram utilizados: uma placa de carbonato alveolar, com dimensões 20cm x 10cm; um tubo de PVC de 5cm de diâmetro e 1m de comprimento; uma cantoneira de alumínio, com 70cm de comprimento; uma barra de alumínio com 70cm de comprimento de 1cm de largura; dois servomotores de 3kg.cm de torque, um sensor MPU-6050; e um Arduino Nano versão 3.0.

Para a medição dos ângulos da plataforma, em tempo real, foi utilizado o sensor MPU-6050. A comunicação com o sensor é feita por meio do protocolo de comunicação I2C para a aquisição dos valores dos acelerômetros e dos giroscópios. Após esse processo é possível fazer o cálculo do ângulo. Para melhorar a precisão das medições e para a rejeição de ruídos e distúrbios, foi utilizado o filtro Complementar.

A posição angular da plataforma é controlada por meio de dois servomotores - um para cada grau de liberdade. Eles são acionados utilizando sinais PWM, que são gerados pelo Arduino Nano.

A modelagem matemática da plataforma foi realizada com o auxílio do software MATLAB. A aquisição dos dados do sensor foi feita por meio da comunicação USB entre o Arduino e um microcomputador.

Com objetivo de estudo e de comparação dos resultados, foram realizados dois ajustes de modelos: um de primeira ordem (desconsiderando-se o *overshoot*); e outro de segunda ordem.

Para a modelagem da plataforma, foi aplicado um degrau de +45 graus, partindo de 0 grau (plataforma na horizontal). Verificou-se a resposta para ambos os eixos, X e Y, de modo independente. Dessa forma, foi possível avaliar se o processo seria melhor representado por um modelo de primeira ou segunda ordem.

A resposta ao degrau no eixo X e Y foram similares. Então, tomou-se como referência para este trabalho apenas a curva obtida para o eixo Y.

4 Resultados e Discussão

A Figura 2 mostra a plataforma após sua montagem, sendo possível visualizar o sensor na parte inferior, os servomotores, bem como um pequeno contra peso na parte lateral esquerda.



Figura 2. Plataforma após a montagem

A Figura 3 mostra que a aplicação do filtro Complementar melhorou os resultados de medição, visto que os dados do acelerômetro e do giroscópio são ruidosos e fornecem valores do ângulo do eixo Y da plataforma com muita variação. Observou-se que o filtro Complementar rejeita muito bem os ruídos e as variações ocorridas. Além disso, também foi implementado e analisado o filtro de Kalman, que é um método matemático criado por Rudolf Kalman, e apareceu na literatura em 1960 (GREWAL, M. S., ANDREWS, A. P., 2008). Trata-se de um conjunto de equações matemáticas em forma de um algoritmo computacional iterativo, com a finalidade de realizar previsões futuras e estimar variâncias de modelos para séries temporais, que podem ser escritas em formas de espaços de estados (HARVEY, A. C., 2001). O filtro de Kalman também se mostrou muito eficiente. Porém, ele não foi adotado durante as medições e ensaios realizados neste trabalho. Embora seu comportamento tenha sido muito próximo ao do filtro Complementar, ele apresenta implementação mais complexa e possui custo computacional maior.

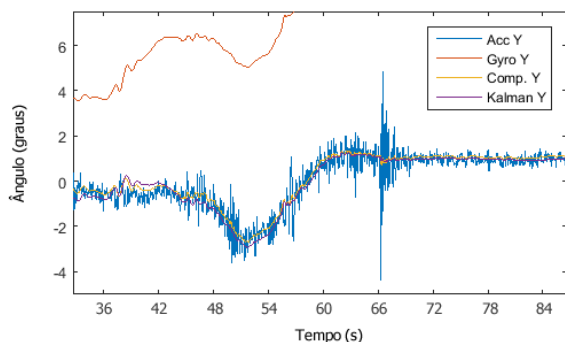


Figura 3. Implementação do filtro complementar

A Figura 4 mostra a resposta real do sistema obtida ao se aplicar um degrau de +45 graus no eixo Y da plataforma.

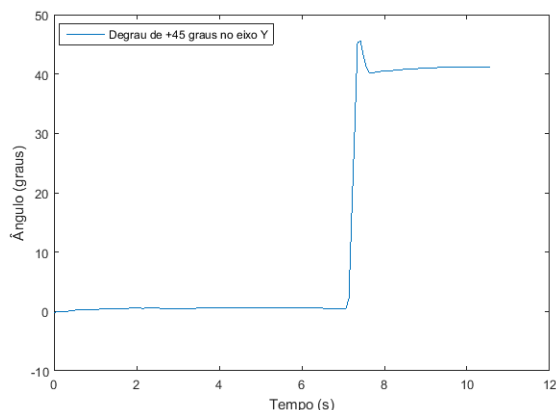


Figura 4. Resposta real ao degrau de +45 graus no eixo Y

Analisando a resposta do sistema a partir da Figura 4, pode-se aproximar o comportamento da plataforma a um modelo de primeira ordem, desconsiderando o *overshoot*. Porém, espera-se que um modelo de segunda ordem represente melhor o sistema.

Para a aproximação de primeira ordem, a curva fornece constante de tempo $\tau = 0.167$ segundos. Obtém-se, então, o modelo matemático para a plataforma, como mostra a Equação 9:

$$T(s) = \frac{1}{0,167s + 1} \quad (9)$$

Então, utilizando o MATLAB, obteve-se a resposta do modelo da Equação 9 a um degrau de +45 graus e com atraso de 7 segundos, com a finalidade de comparar com a resposta obtida no experimento. Vale ressaltar que, na prática, o degrau também foi aplicado com atraso de 7 segundos. A Figura 5 mostra o resultado teórico encontrado.

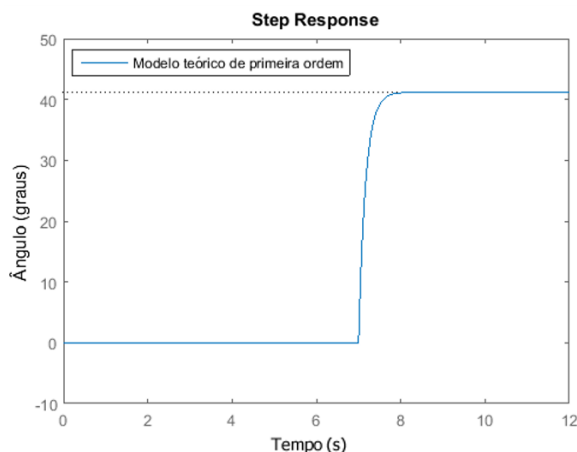


Figura 5. Modelo teórico de primeira ordem

Ao se analisar a Figura 5, percebe-se que o resultado teórico ficou bastante próximo da resposta real, ao se desconsiderar o *overshoot* observado na prática.

Quando a resposta da plataforma ao degrau foi considerada de segunda ordem, foram obtidos os seguintes parâmetros:

- Tempo de acomodação $T_s = 1,61s$;
- *Overshoot* $O_s = 4,43$ graus, ou 10,7%;
- Tempo de pico $T_p = 0,35s$;

Logo, os valores do fator de amortecimento ζ e da frequência natural do sistema ω_n , chega-se aos seguintes resultados:

- $\zeta = 0,59$;
- $\omega_n = 4,20$;

Portanto, o modelo de segunda ordem é dado pela Equação 15:

$$T(s) = \frac{17,66}{s^2 + 4,97s + 17,66} \quad (15)$$

A resposta ao degrau de +45 graus, com atraso de 7 segundos, foi obtido por meio do MATLAB, de acordo com a Figura 6.

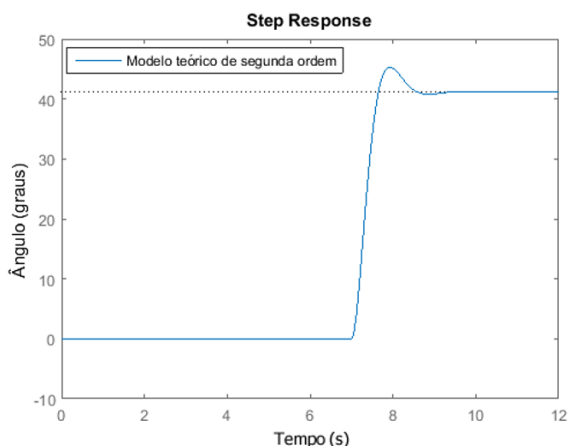


Figura 6. Modelo teórico de segunda ordem

O resultado foi muito satisfatório, visto que o comportamento do modelo teórico de segunda ordem ficou ainda melhor do que o de primeira ordem, já que aquele representa o *overshoot*, assim como verificado na dinâmica real da plataforma.

5 Conclusões

A modelagem matemática a partir de experimentos e análises práticas mostrou-se um método muito eficaz e aplicável em processos reais. Normalmente, os modelos matemáticos de sistemas dinâmicos são calculados a partir de parâmetros nominais, tais co-

mo momento de inércia, peso, entre outros, que são variáveis, muitas vezes, difíceis de mensurar com precisão. Essas medidas ficam ainda mais difíceis de serem aferidas quando um sistema é composto por diversos mecanismos e elementos distintos.

O modelo matemático encontrado neste trabalho mostrou-se muito próximo da dinâmica real do sistema da plataforma, mesmo sem informações precisas dos parâmetros que seriam necessários para se calcular matematicamente o modelo.

Os dois modelos encontrados, principalmente o de segunda ordem, podem ser considerados para descrever o comportamento da plataforma, visto a proximidade de ambos em relação à dinâmica real do sistema.

6 Referências Bibliográficas

- EXAME. Google inventa colher para ajudar pessoas com Parkinson. Disponível em <[HTTP://exame.abril.com.br/tecnologia/noticias/google-inventa-colher-para-ajudar-pessoas-com-parkinson](http://exame.abril.com.br/tecnologia/noticias/google-inventa-colher-para-ajudar-pessoas-com-parkinson)>. Acesso em: 27 de Dez. 2015.
- GREWAL, M. S., ANDREWS, A. P. Kalman Filtering: theory and practice using matlab. 3. Ed. John Wiley & Sons, 2008. 575 p.
- HARVEY, A. C. Forecast, structural time series models and Kalman filter. Cambridge University Press. 2001, 554 p.
- INVENSENSE INC, DATASHEET MPU6050, Revision 3.4, 2013. Disponível em <[HTTP://store.invensense.com/datasheets/invensense/MPU-6050_DataSheet_V3%204.pdf](http://store.invensense.com/datasheets/invensense/MPU-6050_DataSheet_V3%204.pdf)>. Acesso em 22 Dez. 2015.
- NISE, N. S. Control Systems Engineering. 6ª Ed. California State Polytechnic University, Pomona, 2011.
- OGATA, K. Engenharia de Controle Moderno. 5ª Ed. São Paulo: Prentice Hall, 2003.
- PAULA, F. O. Sensores IMU – Uma Abordagem Completa. Disponível em <[HTTP://www.decom.ufop.br/imobilis/sensores-imu-uma-abordagem-completa-parte-1/](http://www.decom.ufop.br/imobilis/sensores-imu-uma-abordagem-completa-parte-1/)>. Acesso em: 23 Dez. 2015.
- TEXAS INSTRUMENTS. Accelerometers and How They Works. Disponível em <[HTTP://www2.usfirst.org/2005comp/Manuals/Acceler1.pdf](http://www2.usfirst.org/2005comp/Manuals/Acceler1.pdf)>. Acesso em: 30 Dez. 2015.