

CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA PARA SISTEMAS LINEARES INCERTOS COM ATRASO ARBITRÁRIO

IONARA OLIVEIRA MARQUES*, JOSÉ PAULO V. S. DA CUNHA*, TIAGO ROUX OLIVEIRA*

**Departamento de Eletrônica e Telecomunicações — Faculdade de Engenharia
Universidade do Estado do Rio de Janeiro — Rua São Francisco Xavier 524, sala 5001E — 20550-900*

Emails: ionara.o.marques@gmail.com, jpaulo@ieee.org, tiagoroux@uerj.br

Abstract— In this paper we develop an output-feedback control system for uncertain single-input-single-output linear systems with arbitrary delay in the output signal. The state of the system is estimated by observers connected in cascade. Differently from previous works, parametric uncertainties in the plant are allowed. Their effects are analyzed by using the Small Gain Theorem. The proposed control strategy guarantees global stability of the closed-loop system. A numerical example illustrates the effectiveness of the proposed control strategy applied to compensate arbitrary delays and bounded uncertainties.

Keywords— Linear Systems, Time-delay Systems, Output-feedback, Cascade Observers, Global Stabilization.

Resumo— Neste artigo propõe-se o desenvolvimento de um sistema de controle por realimentação de saída para sistemas lineares incertos monovariáveis com atraso arbitrário no sinal de saída. O estado do sistema é estimado por observadores conectados em cascata. Distintamente de trabalhos anteriores, as incertezas paramétricas presentes na planta são consideradas e seus efeitos na estabilidade são analisados aplicando-se o Teorema de Pequenos Ganhos. A estratégia de controle proposta garante a estabilidade global do sistema em malha fechada. Um exemplo numérico ilustra a eficácia da abordagem proposta para compensar atrasos arbitrários e incertezas limitadas nos parâmetros do sistema.

Palavras-chave— Sistemas lineares, Sistemas com atraso, Realimentação de saída, Observadores em Cascata, Estabilização global.

1 Introdução

Atrasos e incertezas paramétricas são frequentemente causadoras de instabilidade e baixo desempenho de sistemas de controle. Por isso, há um crescente interesse no estudo de sistemas incertos com atrasos (Niculescu et al., 1998; Fridman et al., 2001; Liu et al., 2006; Yan et al., 2010; Jeong et al., 2012; Coutinho et al., 2013; Hui, Zhang, Kong and Zhou, 2015; Hui, Zhang and Kong, 2015).

Uma alternativa para o controle de sistemas com atraso em que nem todas as variáveis de estado são medidas é o uso de observadores de estado (Yan et al., 2010; Coutinho et al., 2014). No entanto, incertezas paramétricas e a presença do atraso arbitrário no sinal de saída dificultam a convergência do valor estimado das variáveis para o valor real e, consequentemente, prejudicam o controle do sistema.

Por outro lado, algumas abordagens para sistemas com incertezas paramétricas consideram uma compensação para o atraso, por exemplo assumindo incertezas limitadas em norma (Fridman et al., 2001; Zhong and Rees, 2005). Yan et al. (2010) e Coutinho et al. (2013) aplicaram controle por modo deslizante em sistemas incertos com atraso no estado. Técnicas de projeto baseadas em desigualdades lineares matriciais (LMIs) para garantir a estabilidade robusta de sistemas incertos estão entre as mais utilizadas (Hui, Zhang and Kong, 2015; Hui, Zhang, Kong and Zhou, 2015).

Assim, motivado pela discussão acima, neste

artigo é desenvolvido um controlador para sistemas monovariáveis com atraso arbitrário na saída em que se utilizam observadores em cascata adaptados de (Ahmed-Ali et al., 2012) para estimação do estado. Esse observador foi utilizado na estratégia de controle a estrutura variável desenvolvida por Coutinho et al. (2014) para sistemas não-lineares sem incertezas. A principal diferença em relação aos trabalhos (Ahmed-Ali et al., 2012; Coutinho et al., 2014) é que agora são analisados os efeitos de incertezas paramétricas no observador e no sistema de controle em malha fechada (Marques, 2016).

A estabilidade do sistema perante incertezas paramétricas é analisada com auxílio do Teorema de Pequenos Ganhos (Isidori, 1999), que permite determinar limites das magnitudes das incertezas para garantir a estabilização global do sistema.

1.1 Notação

Ao longo do texto, a norma Euclidiana de um vetor x e a norma induzida de uma matriz A são denotadas por $\|x\|$ e $\|A\|$, respectivamente. Além disso, c_i 's e λ_i 's denotam constantes escalares estritamente positivas.

2 Formulação do Problema

Considera-se a estabilização por realimentação da saída atrasada ($y(t) \in \mathbb{R}$) de sistemas lineares, invariantes no tempo, observáveis e controláveis,

descritos pela equação de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t), \\ y(t) &= Cx(t - d),\end{aligned}\quad (1)$$

na qual $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado e $u(t) \in \mathbb{R}$ é o sinal de controle. A condição inicial é definida por (Gu et al., 2003, Seção 1.2):

$$x(\theta) = x_0(\theta), \quad \theta \in [-d, 0]. \quad (2)$$

As seguintes hipóteses devem ser satisfeitas:

- (H1) As matrizes A , B e C são conhecidas.
- (H2) O atraso $d > 0$ é arbitrário, conhecido e constante.
- (H3) As normas das incertezas paramétricas satisfazem as desigualdades

$$\|\Delta A\| \leq \delta_a, \quad \|\Delta B\| \leq \delta_b, \quad (3)$$

para valores suficientemente pequenos de $\delta_a \geq 0$ e $\delta_b \geq 0$.

3 Observadores em Cascata

Nesta seção é revisado o uso de observadores em cascata desenvolvidos por Ahmed-Ali et al. (2012) e Coutinho et al. (2014) para sistemas não-lineares com atraso, mas sem incertezas. Aqui, são aplicados à estimação do estado de sistemas lineares incertos descritos pela equação de estado (1).

Dessa forma, para estimar o estado atual $x(t)$ do sistema com atraso na saída (1), serão utilizados observadores conectados em cascata. Assim sendo, quanto maior for o atraso d , maior será o número m de observadores necessários, de forma que m satisfaça a seguinte desigualdade:

$$m \geq \frac{d}{d_1}, \quad (4)$$

na qual d_1 é o máximo atraso admissível por observador único (Ahmed-Ali et al., 2012). Cada observador estimará um vetor de estado atrasado, cujo valor do atraso é dado por d/m , ou seja, o atraso é dividido em partes iguais para cada observador.

Deste modo, considera-se a seguinte notação para representar o estado do sistema e o sinal de controle, ambos atrasados, em cada observador $j \in \{1, \dots, m\}$:

$$x_j(t) = x\left(t - d + j\frac{d}{m}\right), \quad (5)$$

$$u_j(t) = u\left(t - d + j\frac{d}{m}\right), \quad (6)$$

e para o estado do observador:

$$\hat{x}_j(t) = \hat{x}\left(t - d + j\frac{d}{m}\right). \quad (7)$$

O observador de estado é da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1(t) &= A\hat{x}_1(t) + Bu_1(t) - L\left[C\hat{x}_1\left(t - \frac{d}{m}\right) - y(t)\right], \\ \hat{y}_1(t) &= C\hat{x}_1(t), \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_j(t) &= A\hat{x}_j(t) + Bu_j(t) - L\left[C\hat{x}_j\left(t - \frac{d}{m}\right) - \hat{y}_{j-1}(t)\right], \\ \hat{y}_j(t) &= C\hat{x}_j(t), \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_m(t) &= A\hat{x}_m(t) + Bu(t) - L\left[C\hat{x}_m\left(t - \frac{d}{m}\right) - \hat{y}_{m-1}(t)\right], \\ \hat{y}_m(t) &= C\hat{x}_m(t).\end{aligned}\quad (8)$$

O vetor $\hat{x}_j(t)$ é uma estimativa do estado atrasado $x_j(t)$ do sistema (1). O vetor de estado do último observador, $\hat{x}_m(t) = \hat{x}(t)$, é uma estimativa para o estado atual $x(t)$ do sistema (1). Nota-se que todos os observadores (8) têm a mesma estrutura.

Após provar a convergência do estado de um observador único para um pequeno atraso d_1 e um vetor $L \in \mathbb{R}^n$ de realimentação do erro de observação escolhido adequadamente, Ahmed-Ali et al. (2012) demonstraram que uma quantidade m suficientemente grande de observadores conectados em cascata (8) é capaz de reconstruir o estado do sistema (1), para um atraso longo, constante mas sem incertezas. Assim, pode-se admitir a presença de atraso com valor arbitrário na saída.

4 Lei de Controle

Uma forma de controle por realimentação de saída consiste em utilizar as variáveis medidas para estimar o estado por meio de um observador e construir o sinal de controle pela realimentação do estado estimado. Assim sendo, se $\hat{x}(t)$ é uma estimativa de $x(t)$, a lei de controle será:

$$u(t) = -K\hat{x}(t) = -K\hat{x}_m(t), \quad (9)$$

na qual $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ é o vetor de ganhos da realimentação de estado.

5 Erros de Estimação de Estado

A análise da estabilidade do sistema de controle em malha fechada composto pelo sistema (1), pelos observadores em cascata (8) e pela lei de controle (9) é iniciada pela análise dos erros de estimação de estado. Conforme demonstrado em (Ahmed-Ali et al., 2012, Teorema 1), há uma quantidade m de observadores em cascata suficiente para que o erro de estimação definido como

$$\tilde{x}(t) := x(t) - \hat{x}(t), \quad (10)$$

convirja exponencialmente para zero quando não há incertezas.

A convergência dos observadores em cascata será provada passo a passo pelo método de indução matemática. Assim, considere $\tilde{x}_1(t) := x_1(t) - \hat{x}_1(t)$ como o primeiro erro de estimação para o passo $i = 1$, obtido da diferença entre as equações (1) e (8):

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = (A + \Delta A)x_1(t) + (B + \Delta B)u_1(t) - A\hat{x}_1(t) - Bu_1(t) + L \left[C\hat{x}_1 \left(t - \frac{d}{m} \right) - y(t) \right], \quad (11)$$

na qual $\dot{x}_1(t) = (A + \Delta A)x_1(t) + (B + \Delta B)u_1(t)$ é a representação do sistema (1) com sinais atrasados que foi representado com o índice $i = 1$, para propósitos de análise. Assim, obtém-se:

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = A\tilde{x}_1(t) + LC \left[\hat{x}_1 \left(t - \frac{d}{m} \right) - x(t-d) \right] + \Delta Ax_1(t) + \Delta Bu_1(t). \quad (12)$$

A lei de controle (9) para o passo $i = 1$ é reescrita como

$$u_1(t) = -K\hat{x}_1(t) = -K[x_1(t) - \tilde{x}_1(t)]. \quad (13)$$

Da equação (5) pode-se concluir que

$$x_1 \left(t - \frac{d}{m} \right) = x(t-d). \quad (14)$$

Dessa forma, a equação (12) se torna:

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = (A + \Delta BK)\tilde{x}_1(t) - LC\tilde{x}_1 \left(t - \frac{d}{m} \right) + (\Delta A - \Delta BK)x_1(t). \quad (15)$$

A convergência exponencial neste caso é enunciada no seguinte lema obtido de (Niculescu et al., 1998, Teorema 2).

Lema 1 Considere o sistema (15), assumindo-se que a matriz $(A + \Delta BK - LC)$ seja Hurwitz tal que a desigualdade:

$$\left\| e^{[(A + \Delta BK) - LC]t} \right\| \leq k e^{-\eta t}, \quad \forall t \geq 0, \quad (16)$$

seja satisfeita para $k \geq 1$ e $\eta > 0$ conhecidos. Dessa forma, para um atraso $d_1 (= d/m)$ se a desigualdade:

$$\frac{k}{\eta} d_1 (\|LC(A + \Delta BK)\| + \|(LC)^2\|) < 1, \quad (17)$$

for atendida, então o ponto de equilíbrio $\tilde{x}_1 = 0$ da equação (15) homogênea ($x_1(t) \equiv 0$) será globalmente exponencialmente estável.

As desigualdades (16) e (17) permitem a determinação do atraso máximo admissível (d_1) e a escolha do número máximo de observadores (m)

tais que a desigualdade (4) seja satisfeita para um atraso arbitrário d .

A solução da equação diferencial (15) pode ser expressa para $t \geq 0$ por:

$$\tilde{x}_1(t) = \Phi_1(t, \tilde{x}_{1_0}) + \int_0^t G_1(t, \tau)(\Delta A - \Delta BK)x_1(\tau)d\tau, \quad (18)$$

na qual $\Phi_1(t, \tilde{x}_{1_0}) \in \mathbb{R}^n$ é a solução homogênea ($x_1(t) \equiv 0$) com condição inicial $\tilde{x}_1(\theta) = \tilde{x}_{1_0}(\theta)$, $\theta \in [-d, 0]$. A resposta impulsiva $G_1(t, \tau) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a solução da equação diferencial homogênea $\dot{\tilde{x}}_1(t) = (A + \Delta BK)\tilde{x}_1(t) - LC\tilde{x}_1(t-d)$ com condição inicial $\tilde{x}_1(\tau) = I$, $\tilde{x}_1(t) = 0$ ($t \leq \tau$) e τ é o instante no qual o impulso é aplicado.

Para analisar a dinâmica da equação (18), considera-se os majorantes (Coutinho et al., 2013, Seção 3.3):

$$\|\Phi_1(t, \tilde{x}_{1_0})\| \leq c_1 e^{-\lambda_1 t} \tilde{x}_{1_0}^*, \quad \forall t \geq 0, \quad (19)$$

$$\|G_1(t, \tau)\| \leq c_2 e^{-\lambda_2(t-\tau)}, \quad \forall t \geq \tau, \quad (20)$$

$$\|(\Delta A - \Delta BK)x_1(t)\| \leq c_3 \|x_1(t)\|, \quad \forall t \geq 0, \quad (21)$$

nos quais $\tilde{x}_{1_0}^* := \sup_{\theta \in [-d, 0]} \|\tilde{x}_{1_0}(\theta)\|$ e

$$c_3 = \delta_a + \delta_b \|K\| \geq \|\Delta A - \Delta BK\|. \quad (22)$$

Dessa forma baseando-se nas equações (19), (20), (21) e na relação acima definida, reescreve-se uma nova equação para (18):

$$\|\tilde{x}_1(t)\| \leq c_1 e^{-\lambda_1 t} \tilde{x}_{1_0}^* + c_2 e^{-\lambda_2 t} * c_3 \|x_1(t)\|, \quad (23)$$

na qual para a convolução pode ser afirmado, conforme (Desoer and Vidyasagar, 1975):

$$\|c_2 e^{-\lambda_2 t} * c_3 \|x_1(t)\|\|_{\infty} \leq \|c_2 e^{-\lambda_2 t}\|_1 c_3 \|x_1(t)\|_{\infty}, \quad (24)$$

na qual

$$\|c_2 e^{-\lambda_2 t}\|_1 = \int_0^{+\infty} |c_2 e^{-\lambda_2 t}| dt = \frac{c_2}{\lambda_2}. \quad (25)$$

Dessa forma, a equação (23) poderá ser reescrita na forma:

$$\|\tilde{x}_1(t)\| \leq c_1 e^{-\lambda_1 t} \tilde{x}_{1_0}^* + \frac{c_2}{\lambda_2} c_3 \|x_1(t)\|_{\infty}. \quad (26)$$

De forma a validar a recorrência da convergência do erro, baseado em (10) considere $\tilde{x}_j(t) := x_j(t) - \hat{x}_j(t)$ como o erro de estimação para o passo $i = j$. Assim, o erro de estimação $\dot{\tilde{x}}_j(t)$ é obtido da diferença das equações (1) e (8):

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = (A + \Delta A)x_j(t) + (B + \Delta B)u_j(t) - A\hat{x}_j(t) - Bu_j(t) + L \left[C\hat{x}_j \left(t - \frac{d}{m} \right) - \hat{y}_{j-1}(t) \right], \quad (27)$$

na qual $\dot{x}_j(t) = (A + \Delta A)x_j(t) + (B + \Delta B)u_j(t)$ é a representação do sistema (1) com o índice $i = j$,

para propósitos de análise. A condição inicial   $\tilde{x}_j(\theta) = \tilde{x}_{j_0}(\theta)$, $\theta \in [-d, 0]$. Assim, obt m-se:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_j(t) &= A\tilde{x}_j(t) + LC\hat{x}_j\left(t - \frac{d}{m}\right) - LC\hat{x}_{j-1}(t) \\ &+ \Delta Ax_j(t) + \Delta Bu_j(t). \end{aligned} \quad (28)$$

A lei de controle (9) para o passo $i = j$ é reescrita como $u_j(t) = -K\hat{x}_j(t) = -K[x_j(t) - \tilde{x}_j(t)]$. Assim,   possível reescrever (28):

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_j(t) &= A\tilde{x}_j(t) - LC\tilde{x}_j\left(t - \frac{d}{m}\right) \\ &+ LCx_j\left(t - \frac{d}{m}\right) - LC\hat{x}_{j-1}(t) \\ &+ \Delta Ax_j(t) - \Delta BK[x_j(t) - \tilde{x}_j(t)]. \end{aligned} \quad (29)$$

Baseado em (5) tem-se:

$$x_j\left(t - \frac{d}{m}\right) = x\left(t - \frac{d}{m} - d + j\frac{d}{m}\right) = x_{j-1}(t). \quad (30)$$

Por outro lado, o erro de estimação para o passo $i = j - 1$ é definido por $\tilde{x}_{j-1}(t) := x_{j-1}(t) - \hat{x}_{j-1}(t)$. Dessa forma, a equação (29) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_j(t) &= (A + \Delta BK)\tilde{x}_j(t) - LC\tilde{x}_j\left(t - \frac{d}{m}\right) \\ &+ LC\tilde{x}_{j-1}(t) + (\Delta A - \Delta BK)x_j(t). \end{aligned} \quad (31)$$

Então, pode-se concluir que o erro de estimação satisfaz:

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_j(t)\| &\leq c_1 e^{-\lambda_1 t} \tilde{x}_{j_0}^* \\ &+ \frac{c_2}{\lambda_2} (c_4 \|\tilde{x}_{j-1}(t)\|_\infty + c_3 \|x_j(t)\|_\infty), \end{aligned} \quad (32)$$

na qual $c_4 \geq \|LC\|$ e $\tilde{x}_{j_0}^* := \sup_{\theta \in [-d, 0]} \|\tilde{x}_{j_0}(\theta)\|$.

Assume-se a seguinte hipótese adicional para o projeto do observador:

(H4) Baseado na hipótese **(H3)**, onde assume-se que a incerteza $\delta_b \geq \|\Delta B\|$ seja pequena o suficiente, escolhe-se a matriz L para que a matriz $(A + \Delta BK - LC)$ seja Hurwitz.

Se a quantidade escolhida m de observadores em cascata resultar num atraso fracionado $d_1 \geq d/m$ que satisfaça a condição (17) para aplicação do Lema 1, então $\exists \lambda_1 > 0$ tal que os termos transit rios $c_1 e^{-\lambda_1 t} \tilde{x}_{j_0}^*$, $\forall j \in \{1, \dots, m\}$, em (26) e (32) converjam para a origem.

A partir de (26) e (32),   possível obter por indução um majorante para a solução da equação do erro de estimação total, dado por:

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq c_a e^{-\lambda_a t} \tilde{x}_0^* + c_3 c_b \|x(t)\|_\infty, \quad (33)$$

com constantes $c_a, c_b, \lambda_a > 0$ apropriadas. Nota-se que a constante c_3 dada por (22) tende a zero na medida que as incertezas paramétricas são reduzidas (vide hipótese **(H3)**).

6 Análise da Estabilidade em Malha Fechada

De forma a garantir a estabilização do sistema, utiliza-se a lei de controle de realimentação do estado estimado (9), que pode ser reescrita usando-se o erro de estimação (10):

$$u(t) = -Kx(t) + K\tilde{x}(t), \quad (34)$$

que, aplicada ao sistema (1), resulta na equação de estado:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) - (BK + \Delta BK)[x(t) - \tilde{x}(t)], \quad (35)$$

sendo reduzida a:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - BK + \Delta A - \Delta BK)x(t) \\ &+ (BK + \Delta BK)\tilde{x}(t). \end{aligned} \quad (36)$$

A correta escolha da matriz de realimentação K permitirá que este sistema dinâmico seja exponencialmente estável quando $\tilde{x}(t) \equiv 0$. Para isto, considere a hipótese:

(H5) Baseado na hipótese **(H3)**, onde assume-se que as incertezas $\delta_a \geq \|\Delta A\|$ e $\delta_b \geq \|\Delta B\|$ sejam pequenas o suficiente, a matriz de realimentação K deverá ser projetada adequadamente de forma que a matriz $(A + \Delta A - BK - \Delta BK)$ seja Hurwitz.

Dessa forma, para a condição inicial do estado x_0 , a solução para a equação dinâmica (36) pode ser expressa como:

$$x(t) = \Phi_2(t, x_0) + \int_0^t G_2(t, \tau) \tilde{x}(\tau) d\tau, \quad (37)$$

na qual $\Phi_2(t, x_0) = e^{(A - BK + \Delta A - \Delta BK)t} x_0(0)$, $t \geq 0$, é a solução homogênea do sistema para condição inicial x_0 e $G_2(t, \tau) = e^{(A - BK + \Delta A - \Delta BK)(t - \tau)} (BK + \Delta BK)$, $t > \tau$, $G_2(t, \tau) = 0$, $t \leq 0$, é a resposta a um impulso aplicado no instante τ .

De forma a obter um majorante para a solução da equação (37), considere:

$$\begin{aligned} \|\Phi_2(t, x_0)\| &\leq c_c e^{-\lambda_c t} x_0^*, \quad \forall t \geq 0, \\ \|G_2(t, \tau)\| &\leq c_d e^{-\lambda_c(t - \tau)}, \quad \forall t \geq \tau \geq 0, \end{aligned} \quad (38)$$

na qual $c_c, c_d, \lambda_c > 0$ são constantes apropriadas. Então, um majorante para a solução $x(t)$ da equação (37)   dado por:

$$\|x(t)\| \leq c_c e^{-\lambda_c t} x_0^* + c_d e^{-\lambda_c t} * \|\tilde{x}(t)\|, \quad (39)$$

da qual se obt m:

$$\|x(t)\| \leq c_c e^{-\lambda_c t} x_0^* + \frac{c_d}{\lambda_c} \|\tilde{x}(t)\|_\infty. \quad (40)$$

Dessa forma, conclui-se a partir das desigualdades (33) e (40), aplicando-se a versão do Teorema de Pequenos Ganhos de (Isidori, 1999, Seção 10.6), que o estado do sistema terá um decaimento exponencial para a origem se a seguinte desigualdade for satisfeita:

$$\frac{c_3 c_b c_d}{\lambda_c} = \frac{(\delta_a + \delta_b \|K\|) c_b c_d}{\lambda_c} \leq 1, \quad (41)$$

o que deve ser possível em vista da hipótese **(H3)**. Finalmente, pode-se enunciar o seguinte Teorema:

Teorema 1 *Considere o sistema linear com atraso (1) e a lei de controle por realimentação de estado estimado (9) que utiliza os observadores de estado em cascata (8). Assuma que as hipóteses **(H1)** a **(H5)** sejam satisfeitas. Assim, o erro de saída converge exponencialmente a zero e o sistema em malha fechada será globalmente exponencialmente estável, ou seja, $\exists c_z, \lambda_z > 0$ tais que*

$$\|z(t)\| \leq c_z e^{-\lambda_z t} z_0^*, \quad \forall t \geq 0, \quad (42)$$

na qual o estado do sistema completo   $z(t) := [\tilde{x}_1^T(t), \dots, \tilde{x}_m^T(t), x^T(t)]$, $z_0^* := \sup_{\theta \in [-d, 0]} \|z_0(\theta)\|$ e a condição inicial   $z_0(\theta) = [\tilde{x}_{10}^T(\theta), \dots, \tilde{x}_{m0}^T(\theta), x_0^T(\theta)]$, $\forall \theta \in [-d, 0]$.

7 Exemplo Numérico

Considere o seguinte sistema linear de segunda ordem, com atraso na saída $d = 0,17$ s e que satisfaz as hipóteses **(H1)** a **(H3)** :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + \Delta A \right) x(t) + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \Delta B \right) u(t), \\ y(t) &= [1 \quad 0] x(t-d). \end{aligned} \quad (43)$$

com incertezas

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0,06 & 0,06 \end{bmatrix}, \quad \Delta B = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,06 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Foram utilizadas as matrizes $K = [-2 \quad -1]$ e $L = [1, 16 \quad 4]^T$ escolhidas de forma que as hipóteses **(H4)** e **(H5)** sejam satisfeitas.

Pode-se verificar pelo método numérico de (Cunha et al., 2008), que a desigualdade (16)   satisfeita para $k = 1,05$ e $\eta = 0,84 \text{ s}^{-1}$. Isso resulta num atraso máximo $d_1 = 0,085$ s para satisfazer a desigualdade (17) do Lema 1. Assim, o número de observadores $m = 2$ foi escolhido para satisfazer a desigualdade (4).

Nas simulações, as condições iniciais do sistema e dos observadores em cascata são

$$x(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall t \in [-d, 0]. \quad (45)$$

As Figuras 1 a 3 apresentam os resultados da simulação deste sistema de controle. As variáveis

de estado x_1 e x_2 e os erros de estimação $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$ convergem a zero, conforme a Figura 1. O sinal de saída atrasado e suas estimativas antecipadas pelos observadores em cascata podem ser apreciados na Figura 2. Nota-se que o sinal de controle também converge para zero, conforme a Figura 3.

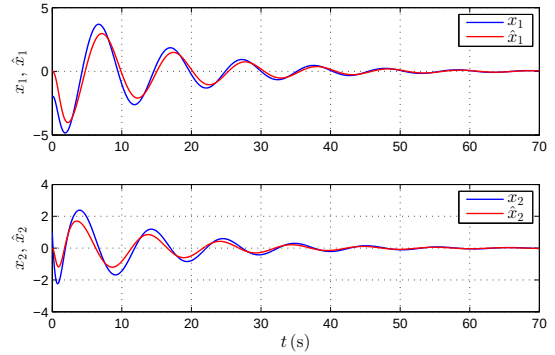


Figura 1: Estado $x(t)$ e sua estimativa $\hat{x}(t)$.

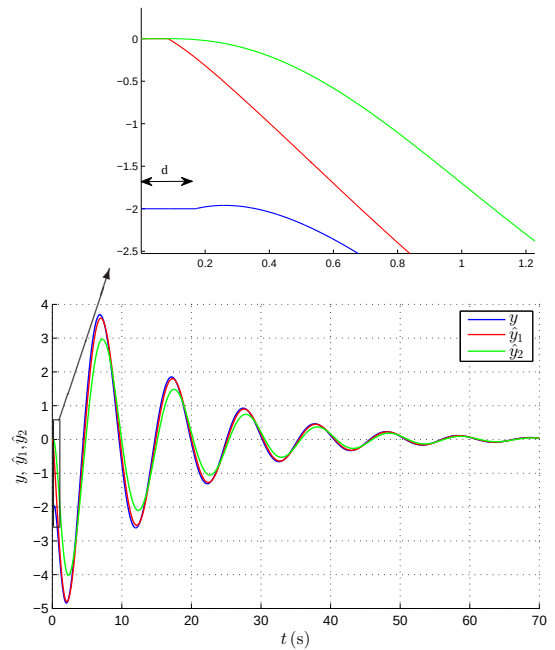


Figura 2: Sinal de saída $y(t)$ e suas estimativas antecipadas $\hat{y}_1(t)$ e $\hat{y}_2(t)$.

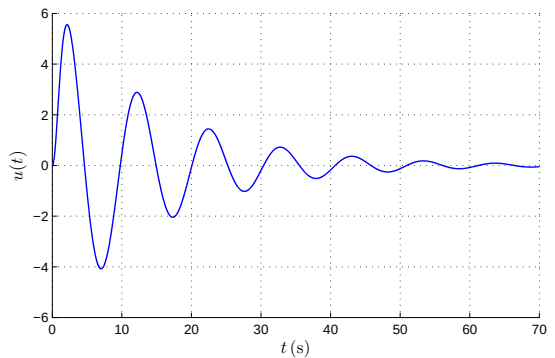


Figura 3: Sinal de controle $u(t)$.

8 Conclusões

Foi desenvolvido um controlador para sistemas lineares incertos, com atraso arbitrário na saída, conhecido e constante. O controle é baseado em realimentação de estado estimado por observadores conectados em cascata.

Cada estágio do observador em cascata permite estimar assintoticamente o estado de sistemas com atraso pequeno no sinal de saída. O atraso pode ser estendido arbitrariamente por meio do fracionamento do atraso total nos observadores conectados em cascata.

A estabilidade com incertezas paramétricas presentes na planta foi provada com base no Teorema de Pequenos Ganhos. Assim, o controlador garante a estabilidade global do sistema e a convergência assintótica do estado para a origem.

Este trabalho foi desenvolvido para sistemas monovariáveis. Entretanto, sua extensão para sistemas multivariáveis pode ser direta no caso do atraso ser uniforme para todos os sinais de saída.

Uma sequência deste trabalho é avaliar a implementação e a fragilidade do controlador proposto em problemas reais, tais como redes de comunicação e sistemas com atraso de transporte.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq, FAPERJ e CAPES.

Referências

- Ahmed-Ali, T., Cherrier, E. and Lamnabhi-Lagarigue, F. (2012). Cascade high gain predictors for a class of nonlinear systems, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **57**(1): 224–229.
- Coutinho, C. L., Oliveira, T. R. and Cunha, J. P. V. S. (2013). Output-feedback sliding-mode control of multivariable systems with uncertain time-varying state delays and unmatched non-linearities, *IET Control Theory Appl.* **7**(12): 1616–1623.
- Coutinho, C. L., Oliveira, T. R. and Cunha, J. P. V. S. (2014). Output-feedback sliding-mode control via cascade observers for global stabilisation of a class of nonlinear systems with output time delay, *Int. J. Contr.* **87**(11): 2327–2337.
- Cunha, J. P. V. S., Costa, R. R. and Hsu, L. (2008). Design of first-order approximation filters for sliding-mode control of uncertain systems, *IEEE Trans. Ind. Electronics* **55**(11): 4037–4046.
- Desoer, C. A. and Vidyasagar, M. (1975). *Feedback Systems: Input-Output Properties*, Academic Press.
- Fridman, L., Acosta, P. and Polyakov, A. (2001). Robust eigenvalue assignment for uncertain delay control systems, *Proc. 3rd IFAC Workshop on Time Delay Systems*, Santa Fe, New Mexico, pp. 239–244.
- Gu, K., Kharitonov, V. L. and Chen, J. (2003). *Stability of Time-Delay Systems*, Birkhäuser.
- Hui, J.-J., Zhang, H.-X. and Kong, X.-Y. (2015). Delay-dependent non-fragile H_∞ control for linear systems with interval time-varying delay, *Int. J. Automation and Computing* **12**(1): 109–116.
- Hui, J.-J., Zhang, H.-X., Kong, X.-Y. and Zhou, X. (2015). On improved delay-dependent robust stability criteria for uncertain systems with interval time-varying delay, *Int. J. Automation and Computing* **12**(1): 102–108.
- Isidori, A. (1999). *Nonlinear Control Systems II*, Springer-Verlag, London.
- Jeong, C., Park, P. and Kim, S. H. (2012). Improved approach to robust stability and H_∞ performance analysis for systems with an interval time-varying delay, *Applied Mathematics and Computation* **218**(21): 10533–10541.
- Liu, P.-L., Lu, T.-Y. and Chen, I. C. (2006). Robust stabilization for uncertain time-delay systems with delay-dependence, *First Int. Conf. Innovative Computing, Information and Control (ICICIC'06)*, Vol. 1, Beijing, pp. 595–598.
- Marques, I. O. (2016). *Controle de sistemas lineares com incertezas, perturbações e atraso na saída*, Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, UERJ, Rio de Janeiro.
- Niculescu, S.-I., Souza, C. E., Dugard, L. and Dion, J.-M. (1998). Robust exponential stability of uncertain systems with time-varying delays, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **43**(5): 743–748.
- Yan, X.-G., Spurgeon, S. K. and Edwards, C. (2010). Sliding mode control for time-varying delayed systems based on a reduced-order observer, *Automatica* **46**(8): 1354–1362.
- Zhong, Q.-C. and Rees, D. (2005). Control of uncertain LTI systems based on an uncertainty and disturbance estimator, *ASME J. Dynamics Systems Measur. and Contr.* **126**(4): 905–910.