

ALGORITMO DE PAIGE PARA FILTRAGEM DE SISTEMAS LINEARES SUJEITOS A SALTOS MARKOVIANOS

GILDSON Q. DE JESUS*

*Departamento de Ciências Exatas e Tecnol gicas - Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC
Ilh us, BA, 45662-900, Brasil

Email: gildsonj@gmail.com

Abstract— This paper deals with Paige algorithm for filtering of Markovian jump linear systems. This algorithm is more efficient numerically compared with the existing algorithms in the literature. Numerical examples are presented to illustrate the effectiveness of the proposed algorithm.

Keywords— Filtering, Markovian, Paige, Discrete-Time.

Resumo— Este artigo trata do algoritmo de Paige para filtragem de sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos. Este algoritmo é mais eficiente numericamente se comparado com os algoritmos existentes na literatura. Exemplos numéricos são apresentados para ilustrar a efetividade do algoritmo proposto.

Palavras-chave— Filtragem, Markoviano, Paige, Discreto no Tempo.

1 Introdução

Filtragem para sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos (SLSM) tem sido um assunto amplamente estudado nas últimas décadas (Ackerson and Fu, 1970), (Chang and Athans, 1978), (Costa, 1994), (Gonçalves et al., 2010), (Matei and Baras, 2012), (Li and Jia, 2013), (Yin et al., 2014). Dentre as várias abordagens adotadas na literatura, pode-se destacar aqui o estimador linear mínimo médio quadrático (LMMSE), baseado na equação de Riccati, desenvolvido em (Costa and Guerra, 2002). Este filtro possui características muito úteis para implementações on-line. Apesar das inegáveis vantagens, desta abordagem, alguns inconvenientes foram detectados nos cálculos da equação de Riccati como, por exemplo, erros de arredondamento que tornam a equação de Riccati instável numericamente. Para resolver estes problemas, foram propostos algoritmos alternativos para o cálculo do filtro LMMSE, a saber: os algoritmos *array* raiz quadrada (Terra et al., 2009) e os algoritmos *array* rápido (Terra et al., 2012). Estes métodos tem sido aplicados como um recurso para aliviar problemas computacionais, associado   equação de Riccati usada no filtro.

Neste sentido, outro método que surge como uma alternativa computacional, é o algoritmo de Paige. Este, primeiramente, foi desenvolvido para filtragem no espaço de estados (Paige, 1985). O algoritmo de Paige   uma variante do filtro de Kalman, ou seja, possui uma característica recursiva, porém este é útil quando existe uma perda potencial de exatidão em produto de matrizes da forma $\mathcal{F}_i \tilde{Z}_i^{1/2}$ e $\mathcal{H}_i \tilde{Z}_i^{1/2}$ que aparecem nos algoritmos *array*, mas não aparecem explicitamente no algoritmo de Paige. Outra característica interessante deste algoritmo, é que este propaga o fator raiz quadrada da covariância do erro de estimativa $\tilde{Z}_i^{1/2}$, como $\tilde{Z}_i^{1/2} = A_i^{-1} B_i$ com as variáveis A_i e

B_i sendo propagadas separadamente. Além disso, o algoritmo de Paige é um algoritmo *backward stable*, ou seja, com este tipo de algoritmo pode-se obter estimativas exatas para sistemas com parâmetros levemente perturbados.

De acordo com o conhecimento dos autores, o algoritmo de Paige para filtragem de SLSM não foi desenvolvido na literatura. Este trabalho pretende preencher esta lacuna.

2 Preliminares

O algoritmo de Paige desenvolvido neste trabalho está baseado sobre o seguinte SLSM discreto no tempo

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= F_{i,\Theta_i} x_i + G_{i,\Theta_i} u_i, \quad i = 0, 1, \dots \\ y_i &= H_{i,\Theta_i} x_i + D_{i,\Theta_i} v_i. \end{aligned} \quad (1)$$

sendo $x_i \in \mathbb{R}^n$ a variável de estado, $u_i \in \mathbb{R}^p$ a variável de d st rbio do estado, $y_i \in \mathbb{R}^m$ a variável de saída, e $v_i \in \mathbb{R}^q$ a variável de d st rbio da saída; $\{\Theta_i\}$ é a cadeia de Markov discreta no tempo com espaço de estados finito $\{1, \dots, N\}$ e a matriz de transição de probabilidade $P = [p_{jk}]$. Seja $\pi_{i,j} := P(\Theta_i = j)$; $F_{i,k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_{i,k} \in \mathbb{R}^{n \times q_1}$, $H_{i,k} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, e $D_{i,k} \in \mathbb{R}^{m \times q_2}$ ($k = 1, \dots, N$) as matrizes de parâmetros variantes no tempo de dimensões apropriadas. Os d st rbios aleatórios $\{u_i\}$ and $\{v_i\}$ são assumidos como tendo média nula, são estacionários e mutuamente independentes com matrizes de covariância iguais a U_i e V_i respectivamente. $x_0 1_{\{\Theta_0=k\}}$, $k = 1, \dots, N$, são vetores aleatórios com $\mathcal{E}\{x_0 1_{\{\Theta_0=k\}}\} = \mu_k$ (sendo que $1_{\{\cdot\}}$ denota a medida de Dirac) e $\mathcal{E}\{x_0 x_0^T 1_{\{\Theta_0=k\}}\} = V_k$; x_0 , $\{\Theta_i\}$ são independentes de $\{u_i\}$ e $\{v_i\}$.

As estimativas foram desenvolvidas considerando a seguinte variável de estado aumentada

$$\begin{aligned} z_i &:= [z_{i,1}^T \quad \dots \quad z_{i,N}^T]^T \in \mathbb{R}^{Nn}, \\ z_{i,k} &:= x_i 1_{\{\Theta(i)=k\}} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Conforme (Costa and Guerra, 2002), o modelo aumentado de (1) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} z_{i+1} &:= \mathcal{F}_i z_i + \psi_i, \quad i = 0, 1, \dots \\ y_i &:= \mathcal{H}_i z_i + \varphi_i \end{aligned} \quad (2)$$

sendo as matrizes de parâmetros dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i &:= \begin{bmatrix} p_{11}F_{i,1} & \dots & p_{N1}F_{i,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N}F_{i,1} & \dots & p_{NN}F_{i,N} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}, \\ \mathcal{H}_i &:= [H_{i,1} \quad \dots \quad H_{i,N}] \in \mathbb{R}^{m \times Nn}, \end{aligned} \quad (3)$$

as variáveis de distúrbio de saída e estado φ_i e ψ_i são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \varphi_i &:= D_{i,\Theta_i} w_i, \\ \psi_i &:= \mathcal{M}_{i+1} z_i + \vartheta_i. \end{aligned} \quad (4)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{i+1} &:= \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{i+1,1} \\ \vdots \\ \mathcal{M}_{i+1,N} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{M}_{i+1,k} &:= [(1_{\{\Theta_{i+1}=k\}} - p_{1k})(F_{i,1})1_{\{\Theta_i=1\}} \\ &\dots (1_{\{\Theta_{i+1}=k\}} - p_{Nk})(F_{i,N})1_{\{\Theta_i=N\}}], \\ \vartheta_i &:= \begin{bmatrix} 1_{\{\Theta_{i+1}=1\}} G_{i,\Theta_i} u_i \\ \vdots \\ 1_{\{\Theta_{i+1}=N\}} G_{i,\Theta_i} u_i \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

As matrizes de segundo momento associada às variáveis de distúrbio φ_i e ψ_i são

$$\begin{aligned} \Pi_i &:= \mathcal{E}\{\varphi_i \varphi_i^T\} = \mathcal{D}_i \mathcal{D}_i^T, \\ \Gamma_i &:= \mathcal{E}\{\psi_i \psi_i^T\} \\ &= \text{diag} \left[\sum_{j=1}^N p_{jk} F_{i,j} Z_{i,j} F_{i,j}^T \right] - \mathcal{F}_i Z_i \mathcal{F}_i^T \\ &+ \text{diag} \left[\sum_{j=1}^N p_{jk} \pi_{i,j} G_{i,j} U_i G_{i,j}^T \right], \end{aligned} \quad (6)$$

sendo

$$\begin{aligned} Z_i &:= \text{diag}[Z_{i,k}], \quad Z_{i,k} := \mathcal{E}\{z_{i,k} z_{i,k}^T\}, \\ Z_{i+1,k} &:= \sum_{j=1}^N p_{jk} F_{i,j} Z_{i,j} F_{i,j}^T \\ &+ \sum_{j=1}^N p_{jk} \pi_{i,j} G_{i,j} U_i G_{i,j}^T, \\ Z_{0,k} &:= V_k, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\mathcal{D}_i := [D_{i,1} \pi_{i,1} W_i^{1/2} \quad \dots \quad D_{i,N} \pi_{i,N} W_i^{1/2}]. \quad (8)$$

3 Algoritmo de Paige para Filtragem de SLSM

O algoritmo de Paige foi deduzido baseado nos seguintes resultados fundamentais.

Lema 1 (Kailath et al., 2000) Dada duas matrizes A e B , $n \times m$ ($n \leq m$), com posto completo. Então $AA^T = BB^T$ se, e somente se, existe uma matriz unitária $m \times m$ Θ ($\Theta\Theta^T = I = \Theta^T\Theta$) tal que $A = B\Theta$.

Lema 2 (Kailath et al., 2000) Sejam A e B matrizes $n \times m$ (com $n \leq m$), e seja $J = \text{diag}(I_p, -I_q)$ uma matriz assinatura com $p+q = m$. Se $AJA^T = BJB^T$ é não-nula, então existe uma matriz J -unitária Ξ tal que $A = B\Xi$.

O algoritmo de Paige para SLSM pode ser calculado recursivamente de uma maneira numericamente estável como segue:

Algoritmo de Paige para SLSM

Passo 0: Iniciando com $A_0 = I$, $B_0 = P_0^{1/2}$, $d_0 = 0$ e repetindo para $i \geq 0$

Passo 1: Escolha a matriz unitária $\mathcal{K}_i$, que executa a triangularização superior:

$$\mathcal{K}_i \begin{bmatrix} A_i \\ \mathcal{H}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

e calcule

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \mathcal{K}_i \begin{bmatrix} d_i \\ y_i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} = \mathcal{K}_i \begin{bmatrix} B_i & 0 \\ 0 & \Pi_i^{1/2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Passo 2: Escolha a matriz unitária Υ_i que executa a triangularização superior:

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} \Upsilon_i = \begin{bmatrix} C_5 & C_6 \\ 0 & C_7 \end{bmatrix} \quad (11)$$

e determine a variável v via $C_7 v = b_1$. Defina também $b_2 = b_0 + C_6 v$.

Passo 3: Escolha a matriz unitária T_i que executa a triangularização superior:

$$T_i \begin{bmatrix} C_0 & 0 \\ -\mathcal{F}_i & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_8 & C_9 \\ 0 & A_{i+1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

e seja

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{13} & C_{14} \end{bmatrix} = T_i \begin{bmatrix} C_5 & 0 \\ 0 & \Gamma_0^{1/2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

e

$$\begin{bmatrix} b_3 \\ d_{i+1} \end{bmatrix} = T_i \begin{bmatrix} b_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Passo 4: Escolha a matriz unitária V_i que executa a triangularização superior:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{13} & C_{14} \end{bmatrix} V_i = \begin{bmatrix} C_{15} & C_{16} \\ 0 & B_{i+1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Passo 5: Então $\hat{z}_{i+1|i} = A_{i+1}^{-1} d_{i+1}$. Além do mais, $P_{i+1}^{1/2} = A_{i+1}^{-1} B_{i+1}$.

Prova: O sistema (2) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} z_{i+1} &:= \mathcal{F}_i z_i + \Gamma_i^{1/2} \bar{\psi}_i, \quad i = 0, 1, \dots \quad (16) \\ y_i &:= \mathcal{H}_i z_i - \Pi_i^{1/2} \bar{\varphi}_i. \end{aligned}$$

sendo que as variáveis aleatórias de distúrbio $\bar{\varphi}_i$ e $\bar{\psi}_i$ são dadas por

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_i &:= -\Pi_i^{-1/2} \varphi_i, \quad (17) \\ \bar{\psi}_i &:= \Gamma_i^{-1/2} \psi_i, \end{aligned}$$

a condição inicial do sistema é definida como $\bar{z}_0 = P_0^{1/2} z_0$.

Se o sistema (16) for expandido no tempo de 0 até $i + 1$, tem-se

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} I & & & & & \\ \mathcal{H}_0 & & & & & \\ -\mathcal{F}_0 & I & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \mathcal{H}_i & & \\ & & & -\mathcal{F}_i & I & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ \vdots \\ z_i \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_0^{1/2} & & & & & \\ & \Pi_0^{1/2} & & & & \\ & & \Gamma_0^{1/2} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \Pi_i^{1/2} & \\ & & & & & \Gamma_i^{1/2} \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{\varphi}_0 \\ \bar{\psi}_0 \\ \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\psi}_1 \\ \vdots \\ \bar{\varphi}_i \\ \bar{\psi}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y_0 \\ 0 \\ y_1 \\ 0 \\ \vdots \\ y_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18) \end{aligned}$$

O sistema (18) pode ser reescrito compactamente como

$$\mathcal{A}z = \mathcal{W}u + y. \quad (19)$$

Considerando um subproblema de (19) somente com os vetores de estado $\{z_0, z_1\}$, tem-se

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{H}_0 & 0 \\ -\mathcal{F}_0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_0^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_0^{1/2} \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{\varphi}_0 \\ \bar{\psi}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (20) \end{aligned}$$

O primeiro passo é pré-multiplicar (20) por

$$\Omega_0 = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (21)$$

sendo que $\mathcal{K}_0$ é uma matriz unitária.

$$\mathcal{K}_0 \begin{bmatrix} I \\ \mathcal{H}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

A dimensão de C_0 é dada por $Nn \times Nn$, com C_0 triangular superior e também invertível. Aplicando Ω_0 em (20) isto conduz a igualdade equivalente

$$\begin{bmatrix} C_0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\mathcal{F}_0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & 0 \\ C_3 & C_4 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_0^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{\varphi}_0 \\ \bar{\psi}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

fazendo as seguintes definições

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} &:= \mathcal{K}_0 \begin{bmatrix} P_0^{1/2} & 0 \\ 0 & \Pi_0^{1/2} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} &:= \mathcal{K}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ y_0 \end{bmatrix}. \quad (24) \end{aligned}$$

As dimensões de C_1, C_2, C_3, C_4, b_0 e b_1 são dadas por $Nn \times Nn, Nn \times p, p \times Nn, p \times p, Nn \times 1$ e $p \times 1$, respectivamente.

O segundo passo é triangularizar superiormente as submatrizes

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Considere

$$\Lambda_0 = \begin{bmatrix} \Upsilon_0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (26)$$

sendo que Υ_0 é uma matriz unitária tal que

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} \Upsilon_0 = \begin{bmatrix} C_5 & C_6 \\ 0 & C_7 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

sendo as dimensões de C_5, C_6 e C_7 dadas por $Nn \times Nn, Nn \times p$ e $p \times p$, respectivamente.

Definindo

$$\begin{bmatrix} \bar{z}_0^{(1)} \\ \bar{\varphi}_0^{(1)} \end{bmatrix} := \Upsilon_0^* \begin{bmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{\varphi}_0 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

cujas dimensões de $\bar{z}_0^{(1)}$ e $\bar{\varphi}_0^{(1)}$ são dadas por $Nn \times 1$ e $p \times 1$, respectivamente.

A variável aleatória $\bar{z}_0^{(1)}$ é não correlacionada com y_0 . Além do mais, C_7 é invertível. A expressão em (23) agora é dada por

$$\begin{bmatrix} C_0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\mathcal{F}_0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_5 & C_6 & 0 \\ 0 & C_7 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_0^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_0^{(1)} \\ \bar{\varphi}_0^{(1)} \\ \bar{\psi}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

O segundo bloco linha de (29) mostra que $\bar{\varphi}_0^{(1)}$ pode ser determinado em termos de b_1 . Obtém-se

$$C_7 \bar{\varphi}_0^{(1)} = b_1. \quad (30)$$

Assim (29) pode ser reduzido, para a seguinte forma

$$\begin{bmatrix} C_0 & 0 \\ -\mathcal{F}_0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_5 & 0 \\ 0 & \Gamma_0^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_0^{(1)} \\ \bar{\psi}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

sendo que a variável aleatória b_2 é definida por

$$b_2 := b_0 + C_6 \bar{\varphi}_0^{(1)} \quad (32)$$

e conseqüentemente é determinado por y_0 . Calculando agora $\hat{z}_{0|0}$ notando que

$$C_0 z_0 = C_5 \bar{z}_0^{(1)} + b_2. \quad (33)$$

Dado que $\bar{z}_0^{(1)}$ é n o correlacionado com y_0 , e o estimador linear mínimo médio quadr tico de b_2 dado y_0 é o próprio b_2 , obt m-se

$$\mathcal{E}\{C_0 z_0 | y_0\} = \mathcal{E}\{C_5 \bar{z}_0^{(1)} + b_2 | y_0\} \quad (34)$$

$$C_0 \mathcal{E}\{z_0 | y_0\} = C_5 \mathcal{E}\{\bar{z}_0^{(1)} | y_0\} + \mathcal{E}\{b_2 | y_0\} \quad (35)$$

$$C_0 \hat{z}_{0|0} = b_2. \quad (36)$$

Procedendo para calcular $\hat{z}_{1|0}$. Pré-multiplicando (31) com a matriz unitária T_0 que triangulariza superiormente a matriz coeficiente sobre o lado esquerdo, tem-se

$$T_0 \begin{bmatrix} C_0 & 0 \\ -\mathcal{F}_0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_8 & C_9 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}, \quad (37)$$

as dimensões de C_8 , C_9 e A_1 são dadas por $Nn \times Nn$.

A invertibilidade de C_0 garante a invertibilidade de A_1 . Aplicando esta transformação em ambos os lados de (31) obt m-se

$$\begin{bmatrix} C_8 & C_9 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{13} & C_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_0^{(1)} \\ \bar{\psi}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_3 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

sendo

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{13} & C_{14} \end{bmatrix} = T_0 \begin{bmatrix} C_5 & 0 \\ 0 & \Gamma_0^{1/2} \end{bmatrix}, \quad (39)$$

as dimensões de C_{11} e C_{13} são dadas por $Nn \times Nn$ e de C_{12} e C_{14} são dadas por $Nn \times q$. E as variáveis b_3 e d_1 , de dimensões $n \times 1$, são definidas por

$$\begin{bmatrix} b_3 \\ d_1 \end{bmatrix} := T_0 \begin{bmatrix} b_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

e são funções lineares da observação y_0 . Agora   necessário reduzir a matriz

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{13} & C_{14} \end{bmatrix} \quad (41)$$

numa forma triangular superior. Usando uma transformação unitária V_0 tal que

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{13} & C_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_0^{(1)} \\ \bar{\psi}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{13} & C_{14} \end{bmatrix} V_0 V_0^* \begin{bmatrix} \bar{z}_0^{(1)} \\ \bar{\psi}_0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{13} & C_{14} \end{bmatrix} V_0 = \begin{bmatrix} C_{15} & C_{16} \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}, \quad (43)$$

sendo as dimensões de C_{15} dada por $Nn \times q$ e de C_{16} e B_1 dadas por $Nn \times Nn$.

E definindo

$$\begin{bmatrix} \bar{z}_0^{(2)} \\ \bar{z}_1 \end{bmatrix} := V_0^* \begin{bmatrix} \bar{z}_0^{(1)} \\ \bar{\psi}_0 \end{bmatrix}, \quad (44)$$

sendo as dimensões de $\bar{z}_0^{(2)}$ e $\bar{z}_1$ dadas por $q \times 1$ e $Nn \times 1$, respectivamente.

Então pode-se escrever (38) como

$$\begin{bmatrix} C_8 & C_9 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{15} & C_{16} \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_0^{(2)} \\ \bar{z}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_3 \\ d_1 \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Segue de (45) que

$$A_1 z_1 = B_1 \bar{z}_1 + d_1 \quad (46)$$

$$\mathcal{E}\{A_1 z_1 | y_0\} = \mathcal{E}\{(B_1 \bar{z}_1 + d_1) | y_0\} \quad (47)$$

$$A_1 \mathcal{E}\{z_1 | y_0\} = B_1 \mathcal{E}\{\bar{z}_1 | y_0\} + \mathcal{E}\{d_1 | y_0\} \quad (48)$$

$$A_1 \hat{z}_{1|0} = d_1 \quad (49)$$

que completamente determina $\{\hat{z}_{0|0}, \hat{z}_{1|0}\}$. Em particular, $\hat{z}_{1|0} = A_1^{-1} d_1$.

Note de (46) e (49), que

$$A_1 z_1 = B_1 \bar{z}_1 + d_1 \quad (50)$$

$$A_1 z_1 = B_1 \bar{z}_1 + A_1 \hat{z}_1 \quad (51)$$

$$A_1 (z_1 - \hat{z}_1) = B_1 \bar{z}_1. \quad (52)$$

Dado que $\{\bar{z}_0, \bar{\varphi}_0, \bar{\psi}_0\}$ são variáveis aleatórias não correlacionadas com matrizes de covariância unitária, e dado que Υ_0 e V_0 são matrizes unitárias, conclui-se de

$$\begin{bmatrix} \bar{z}_0^{(1)} \\ \bar{\varphi}_0^{(1)} \end{bmatrix} = \Upsilon_0^* \begin{bmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{\varphi}_0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

e

$$\begin{bmatrix} \bar{z}_0^{(2)} \\ \bar{z}_1 \end{bmatrix} = V_0^* \begin{bmatrix} \bar{z}_0^{(1)} \\ \bar{\psi}_0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

que $\|\bar{z}_1\|^2 = I$. Conseqüentemente, $A_1 P_1 A_1^* = B_1 B_1^*$, isto mostra que pode-se tomar $P_1^{1/2} =$

$A_1^{-1}B_1$. Retornando ao problema completo (18), temos que

$$\begin{bmatrix} C_8 & C_9 & & & & \\ 0 & A_1 & & & & \\ & \mathcal{H}_1 & & & & \\ & & -\mathcal{F}_1 & I & & \\ & & & & \mathcal{H}_i & \\ & & & & -\mathcal{F}_i & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ \vdots \\ z_i \\ z_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{15} & C_{16} \\ 0 & B_1 & \Pi_1^{1/2} & & & \\ & & & \Gamma_1^{1/2} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \Pi_i^{1/2} \\ & & & & & & \Gamma_i^{1/2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \bar{z}_0^{(2)} \\ \bar{z}_1 \\ \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\psi}_1 \\ \vdots \\ \bar{\varphi}_i \\ \bar{\psi}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_3 \\ d_1 \\ y_1 \\ 0 \\ \vdots \\ y_i \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Estas equações mostram que agora pode-se considerar o subproblema

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ \mathcal{H}_1 & 0 \\ -\mathcal{F}_1 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_1^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_1^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\psi}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ y_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

que tem a mesma estrutura do problema anterior (20). Pode-se agora repetir o mesmo procedimento de triangularização como anteriormente. Isto conduz a

$$\begin{bmatrix} C'_8 & C'_9 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_{1|1} \\ \hat{z}_{2|1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_3 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (57)$$

para as novas $\{C'_8, C'_9, b'_3\}$ e $\{A_2, B_2\}$, e o procedimento pode ser continuado. Cada passo fornece $\hat{z}_{i|i}$ e $\hat{z}_{i|i-1}$.

□

Após o cálculo de $\hat{z}_{i|i}$ pelo algoritmo de Paige, a estimativa $\hat{x}_{i|i}$ é calculada como

$$\hat{x}_{i|i} = \sum_{j=1}^N \hat{z}_{i,j|i}. \quad (58)$$

4 Exemplo Numérico

Para simular numericamente o algoritmo desenvolvido neste artigo, utiliza-se como exemplo o SLSM (1) com dois estados cujos parâmetros são os seguintes

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix},$$

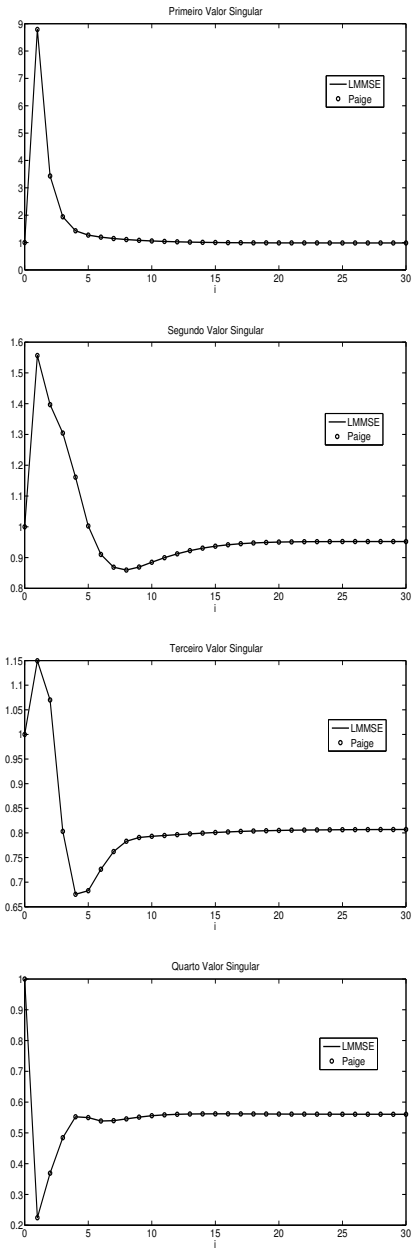


Figura 1: Valores Singulares de $\tilde{Z}_{i|i-1}$.

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0.975 & 0 \\ 0 & 1.35 \end{bmatrix}, D_1 = 1.6.$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0.975 & 0 \\ 0 & 1.35 \end{bmatrix}, D_2 = 1.6.$$

Matriz de Probabilidade de Transição:

$$P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

e $\pi_{i,1} = 0.05$, $\pi_{i,2} = 0.95$ para $i = 1, \dots, 30$. A condição inicial de x_0 foi considerada com

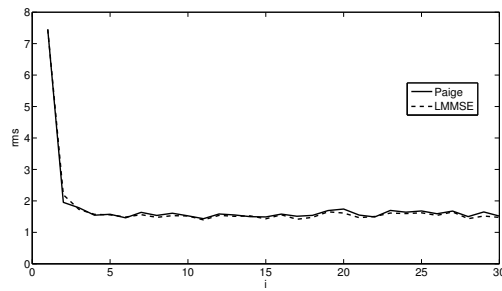


Figura 2: RMS do filtro LMMSE e do algoritmo de Paige para SLSM

m dia Gaussiana $[5 \ 6]^T$ e variância $\begin{bmatrix} 25 & 30 \\ 30 & 36 \end{bmatrix}$, $\theta(i) \in \{1, 2\}$, v_i e u_i são seq ncias de ruídos independentes. Foram calculados os valores singulares de $\tilde{Z}_{i|i-1}$ para equação de Riccati explícita do filtro LMMSE desenvolvido em (Costa and Guerra, 2002) e para o algoritmo de Paige. Foram calculados também a raiz do erro médio quadrático (rms) do filtro LMMSE e do algoritmo de Paige, foram executadas 1000 simulações Monte Carlo com $i = 0, \dots, 30$ e Θ_i sendo gerado aleatoriamente. Essas implementações foram feitas através do software MatLab. Pode-se notar nas Figuras (1) e (2), que o algoritmo de Paige tem o mesmo comportamento que o filtro LMMSE para este exemplo, porém o algoritmo de Paige possui maior estabilidade numérica devido ao uso de transformações ortogonais nos cálculos.

5 Conclusões

Neste artigo, foi desenvolvido o algoritmo de Paige para SLSM. Este algoritmo é numericamente mais estável. Graças ao modelo aumentado definido para tratar com a cadeia de Markov desconhecida, esta técnica foi desenvolvida. Exemplos numéricos foram apresentados mostrando a eficiência deste algoritmo.

Refer ncias

- Ackerson, A. G. and Fu, K. S. (1970). On state estimation in switching environments, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-15**(1): 10–17.
- Chang, C. B. and Athans, M. (1978). State estimation for discrete systems with switching parameters, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **AES-14**(3): 418–425.
- Costa, O. L. V. (1994). Linear minimum mean square error estimation for discrete-time markovian jump linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**(8): 1685–1689.
- Costa, O. L. V. and Guerra, S. (2002). Stationary filter for linear minimum mean square error estimation for discrete-time markovian jump linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **47**(8): 1351–1356.
- Gonçalves, A. P. C., Fioravanti, A. R. and Geromel, J. C. (2010). Markov jump linear systems and filtering through network transmitted measurements, *Signal Processing* **90**(10): 2842–2850.
- Kailath, T., Sayed, A. H. and Hassibi, B. (2000). *Linear Estimation*, Prentice-Hall.
- Li, W. and Jia, Y. (2013). Adaptive filtering for jump markov systems with unknown noise covariance, *IET Control Theory and Applications* **7**(13): 1765–1772.
- Matei, I. and Baras, J. S. (2012). A linear distributed filter inspired by the markovian jump linear system filtering problem, *Automatica* **48**(12): 1924–1928.
- Paige, C. C. (1985). Covariance matrix representation in linear filtering, In *Linear algebra and its role in systems theory*, pp. 309–321.
- Terra, M. H., Ishihara, J. Y. and Jesus, G. (2009). Information filtering and array algorithms for discrete-time markovian jump linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **54**(1): 158–162.
- Terra, M. H., Ishihara, J. Y. and Jesus, G. (2012). Fast array algorithm for filtering of markovian jump linear systems, *Int. J. Adapt. Control Signal Process.* **26**(1): 84–94.
- Yin, Y., Shiand, P., Liu, F. and Teo, K. L. (2014). Filtering for discrete-time nonhomogeneous markov jump systems with uncertainties, *Information Sciences* **259**(14): 118–127.