

CONTROLE ROBUSTO DE SISTEMAS LINEARES CHAVEADOS USANDO UM COMPENSADOR DINÂMICO NA SAÍDA DA PLANTA

LEONARDO A. CARNIATO*, ALEXANDRE A. CARNIATO*, EDSON I. M. JÚNIOR†, MARCELO
CARVALHO M. TEIXEIRA‡, EDVALDO ASSUNÇÃO‡, RODRIGO CARDIM‡

*IFSP - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Departamento de Indústria - Câmpus Presidente Epitácio
Avenida: José Ramos Júnior, 27-50, 19470-000, Presidente Epitácio, São Paulo, Brasil

†IFMS - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Mato Grosso do Sul
Campus Três Lagoas
Rua Antônio Estevão Leal, 790 - 79641-162, Três Lagoas, Mato Grosso do Sul, Brasil

‡Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC), Departamento de Engenharia Elétrica, Faculdade de
Engenharia, Univ Estadual Paulista (UNESP), Campus Ilha Solteira, Avenida José Carlos Rossi, 1370,
Ilha Solteira, SP 13385-000, Brasil

Emails: leonardo@ifsp.edu.br, carniato@ifsp.edu.br, edson.mainardi@ifms.edu.br,
marcelo@dee.feis.unesp.br, edvaldo@dee.feis.unesp.br, rcardim@dee.feis.unesp.br

Abstract— This paper deals with the analysis and control of continuous-time uncertain switched linear systems considering a switching strategy using only the plant output. The presented procedure considers that the state vector is not completely available. Furthermore, the insertion of a dynamic output compensator is proposed. Hence, the set of state variables is increased. The design is based on Linear Matrix Inequalities (LMIs). An illustrative example shows that when the conditions of the proposed theorem are feasible, this approach increases the feasible region when compared to similar results available in the literature.

Keywords— Robust Control, Switched Linear Uncertain Systems, Dynamic Output Compensator.

Resumo— Este trabalho trata da análise e controle de sistemas lineares chaveados incertos e contínuos no tempo com chaveamento dependente da saída da planta. Considera-se que o vetor de estado do sistema não está completamente disponível. Além disto, é proposta a inserção de um compensador dinâmico na saída controlada da planta. Deste modo, aumenta-se o conjunto de variáveis de estado. Os projetos são baseados em LMIs (*Linear Matrix Inequalities*). Um exemplo ilustrativo mostra que, quando as condições do teorema proposto são factíveis, esta abordagem aumenta a região de factibilidade, se comparado com resultados similares disponíveis na literatura.

Palavras-chave— Controle Robusto, Sistemas Lineares Chaveados Incertos, Compensador Dinâmico de Saída.

1 Introdução

Recentemente, o desenvolvimento de leis de controle para sistemas chaveados tem recebido grande atenção por parte dos pesquisadores da área de controle de sistemas (Mainardi Júnior et al., 2015), (Riedinger and Vivalda, 2015) e (Zhang et al., 2016). Dentre os motivos, pode-se citar: redução no tempo de assentamento da resposta transitória e também que os subsistemas não necessitam apresentar as mesmas características (Lin and Antsaklis, 2009). Adicionalmente, a partir da escolha correta da regra ou lei de chaveamento é possível estabilizar um sistema formado por dois ou mais subsistemas instáveis (Liberzon, 2003).

Além destas características, pode-se citar uma vasta possibilidade de descrever sistemas físicos, tais como: controle de tráfego urbano (Papageorgiou et al., 2003), controle de conversores CC-CC (Deaecto et al., 2010), (Cardim et al., 2011), (Mainardi Júnior et al., 2012), (Noori et al., 2016), dentre outros. Com relação à comutação, os sistemas lineares chaveados podem ser classificados em: comutação dependente do ve-

tor de estado ($\sigma(x)$) e comutação dependente do tempo ($\sigma(t)$). Com relação à estabilidade de sistemas chaveados, resultados importantes podem ser encontrados em (DeCarlo et al., 2000) e (Geromel and Colaneri, 2006).

Em (Wicks et al., 1994), os autores demonstraram que se existir uma combinação convexa *Hurwitz* entre as matrizes dos subsistemas dinâmicos, isto implica na existência de uma regra de chaveamento estabilizante que depende das variáveis de estado. A partir destes resultados, (Feron, 1996) provou que as condições propostas em (Wicks et al., 1994) são necessárias e suficientes para um sistema chaveado com dois subsistemas dinâmicos. A partir destes conceitos, em (Deaecto et al., 2010) os autores propuseram a generalização deste resultado para N subsistemas dinâmicos.

Um tópico desafiador e de grande interesse da comunidade científica é a utilização da realimentação de saída, seja, estática ou dinâmica (Geromel et al., 2008), (Riedinger and Vivalda, 2015) pois, em muitas aplicações práticas, o vetor de estado pode não estar completamente disponível. Deste

modo, é importante estudar e projetar estratégias de chaveamento entre os subsistemas que não dependam do vetor de estado.

Em (Mainardi Júnior et al., 2015) os autores propuseram uma estratégia de chaveamento dependente apenas da saída da planta para sistemas lineares chaveados incertos. A partir destes resultados, propõe-se a principal contribuição deste trabalho. Inicialmente insere-se um filtro na saída da planta. A partir disto, consideram-se os elementos do vetor de saída filtrada como novas variáveis de estado no projeto da regra de chaveamento. Este sistema novo, denominado, sistema aumentado leva em consideração além da saída do sistema original, a saída do filtro.

Em seguida, compara-se esta técnica com as disponíveis na literatura por meio de estudos sobre a factibilidade para sistemas lineares chaveados incertos para diferentes condições de alocação dos polos do compensador dinâmico.

Por conveniência, a seguir são definidas algumas notações que serão utilizadas ao longo do trabalho. A matriz I_p representa a matriz identidade de ordem p . Para matrizes ou vetores reais $(\cdot)'$ indica o transposto. O conjunto formado pelos N primeiros inteiros $\{1, \dots, N\}$ é denotado por $\mathbb{K}_N$. O conjunto de todos os vetores $\lambda = [\lambda_1 \dots \lambda_N]'$ tais que $\lambda_i \geq 0$, $i \in \mathbb{K}_N$ e $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N = 1$ é denotado por Λ . A combinação convexa de um conjunto de matrizes $(A_1, \dots, A_N)$ é denotada $A_\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i A_i$, sendo $\lambda \in \Lambda$. Além disso, o símbolo $(*)$ será usado em expressões matriciais para denotar o transposto de um elemento simétrico. Para expressões em linha, este símbolo denotará o transposto dos termos do lado esquerdo, como mostrado nos exemplos a seguir:

$$\begin{bmatrix} A & B' \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & (*) \\ B & C \end{bmatrix},$$

$$A + B + A' + B' = A + B + (*).$$

2 Sistema Linear Chaveado com Incertezas Politópicas

Considere o sistema linear chaveado incerto com a seguinte realização em espaço de estados (Mainardi Júnior et al., 2015):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\sigma, \alpha)x(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (1)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída controlada, x_0 é a condição inicial e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ a matriz de saída do sistema, constante para todo $t \geq 0$ e $\sigma(t)$ a regra ou lei de chaveamento, que seleciona em cada instante de tempo $t \geq 0$, um subsistema disponível $A(i, \alpha)$, $i \in \mathbb{K}_N$. Na matriz $A(\sigma, \alpha)$, o vetor $\alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r]'$ representa as incertezas politópicas da planta. A matriz $A(\sigma, \alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pode ser descrita por meio da

combinação convexa de seus vértices, como mostrado abaixo:

$$A(\sigma, \alpha) = \sum_{j=1}^r \alpha_j A_{\sigma j}, \quad \sum_{j=1}^r \alpha_j = 1,$$

$$\alpha_j \geq 0, \quad \sigma(t) \in \mathbb{K}_N, \quad (2)$$

sendo r o número de vértices do politopo. Para mais detalhes sobre incertezas politópicas, veja (Boyd et al., 1994). Os resultados apresentados a seguir, servirão de base para o desenvolvimento teórico deste trabalho. Deste modo, tem-se o seguinte problema de controle:

Problema 1 *Determine uma função $u(\cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ tal que a regra de chaveamento*

$$\sigma(t) = u(y(t)), \quad (3)$$

torne o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema linear chaveado definido em (1) globalmente assintoticamente estável.

Em (Mainardi Júnior et al., 2015) os autores propuseram uma solução para o problema de controle supracitado.

Teorema 1 (Mainardi Júnior et al., 2015) *Se existirem, um escalar $\lambda \in \Lambda$, matrizes $X_{1_{ik}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{2_{ik}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $Q_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e matrizes simétricas positiva definidas $P_{jk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que*

$$\frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} X_{1_{ik}} A_{ij} + X_{1_{ij}} A_{ik} + (*) \\ P_{jk} - X'_{1_{ik}} + X_{2_{ik}} A_{ij} + P_{kj} - X'_{1_{ij}} + X_{2_{ij}} A_{ik} \\ P_{jk} - X_{1_{ik}} + A'_{ij} X'_{2_{ik}} + P_{kj} - X_{1_{ij}} + A'_{ik} X'_{2_{ij}} \\ - X_{2_{ik}} - X_{2_{ij}} - (*) \end{bmatrix}$$

$$< \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} + Q_{0_{kj}} + 2C'Q_iC & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$Q_{0_{jk}} + C'Q_\lambda C < 0, \quad (5)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $j \in \mathbb{K}_r$ e $k \in \mathbb{K}_r$, então a regra de chaveamento,

$$\sigma(y) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} (y'Q_i y) \quad (6)$$

torna a origem $x = 0$ do sistema linear chaveado incerto (1) e (2) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Prova: Para mais detalhes, veja (Mainardi Júnior et al., 2015). $\square$

3 Principais contribuições deste artigo

Nas análises anteriores, considerou-se que as variáveis de estado não estavam disponíveis para realimentação. Desta maneira, o chaveamento entre os subsistemas dependia somente da saída controlada $y(t) \in \mathbb{R}^p$.

Neste artigo propõe-se acrescentar novas variáveis de estado, aumentando-se a ordem do sistema por intermédio de um compensador dinâmico de primeira ordem na saída controlada da planta, conforme mostrado na Figura 1.

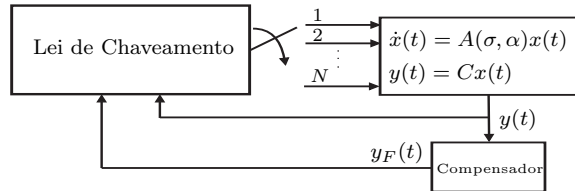


Figura 1: Diagrama de Controle Proposto.

Neste estudo, considerou-se a seguinte dinâmica do compensador:

$$Y_F(s) = [Y_{F1}(s) \ Y_{F2}(s) \ \dots \ Y_{Fp}(s)] \\ = \left[\frac{w}{s+w} Y_1(s) \ \frac{w}{s+w} Y_2(s) \ \dots \ \frac{w}{s+w} Y_p(s) \right] \quad (7)$$

ou

$$\dot{y}_F(t) = wy(t) - wy_F(t) \quad (8)$$

sendo $w > 0$ uma constante especificada no projeto.

Note que como apresentado na Figura 1, a escolha da função de transferência do compensador é critério do projetista. Deste modo, a partir de (1), considere o sistema aumentado descrito a seguir:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \hat{A}(\sigma, \alpha)\xi(t), & \xi(0) = \xi_0 \\ v(t) = \hat{C}\xi(t), \end{cases} \quad (9)$$

sendo $\hat{A} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $\hat{C} \in \mathbb{R}^{z \times q}$, $q = n + p$, $z = 2p$, $\xi(t) = [x(t)' \ y_F(t)']'$ e $v = [y(t)' \ y_F(t)']'$.

As matrizes do sistema aumentado são descritas em função dos parâmetros do sistema original e também da saída filtrada ($y_F(t)$):

$$\hat{A}(\sigma, \alpha) = \begin{bmatrix} A(\sigma, \alpha) & 0_{n \times p} \\ wC & -wI_p \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} C & 0_{p \times p} \\ 0_{p \times n} & I_p \end{bmatrix}, \quad (11)$$

Objetiva-se generalizar os resultados anteriores apresentados na literatura criando-se um sistema aumentado a partir das variáveis de estado e também da saída filtrada, conforme apresentado na Figura 2. A partir dos conceitos apresentados, propõe-se o Teorema 2.

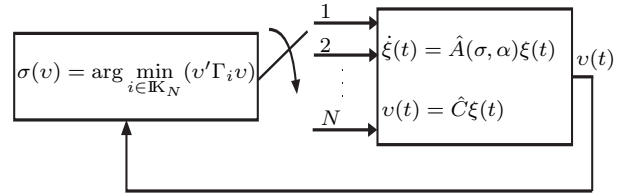


Figura 2: Diagrama do Sistema de Controle proposto considerando o sistema aumentado

Teorema 2 Se existirem, um escalar $\lambda \in \Lambda$, matrizes $\Psi_{1ik} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $\Psi_{2ik} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, matrizes simétricas $\Gamma_{0jk} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{z \times z}$ e matrizes simétricas positiva definidas $P_{Njk} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, tais que

$$\frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} \Psi_{1ik}\hat{A}_{ij} + \Psi_{1ij}\hat{A}_{ik} + (*) \\ P_{Njk} - \Psi'_{1ik} + \Psi_{2ik}\hat{A}_{ij} + P_{Nkj} - \Psi'_{1ij} + \Psi_{2ij}\hat{A}_{ik} \\ -\Psi_{2ik} - \Psi_{2ij} - (*) \end{bmatrix}$$

$$< \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} \Gamma_{0jk} + \Gamma_{0kj} + 2\hat{C}'\Gamma_i\hat{C} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\Gamma_{0jk} + \hat{C}'\Gamma_\lambda\hat{C} < 0, \quad (13)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $j \in \mathbb{K}_r$ and $k \in \mathbb{K}_r$, então a regra de chaveamento,

$$\sigma(v) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} (v'\Gamma_i v) \quad (14)$$

torna a origem $x = 0$ do sistema linear chaveado incerto (2) e (9) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Prova: Vide Anexo I. $\square$

O teorema a seguir compara as condições dos Teoremas 1 e 2.

Teorema 3 Se as condições dispostas no Teorema 1 são satisfeitas, então as condições dispostas no Teorema 2 também são atendidas.

Prova: Suponha que as condições do Teorema 1 são satisfeitas. Então, existem $\lambda \in \Lambda$, X_{1ik} , X_{2ik} , $Q_{0jk} = Q'_{0jk}$, $Q_i = Q'_i$ e $P_{jk} = P'_{jk}$ que tornam as condições (4) e (5) factíveis para $i \in \mathbb{K}_N$, $j, k \in \mathbb{K}_r$. Objetiva-se mostrar que existem matrizes, $\Psi_{1ik} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $\Psi_{2ik} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $\Gamma_{0jk} = \Gamma'_{0jk} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $\Gamma_i = \Gamma'_i \in \mathbb{R}^{z \times z}$ e $P_{Njk} = P'_{Njk} > 0 \in \mathbb{R}^{q \times q}$, descritas abaixo:

$$\Psi_{1ik} = \begin{bmatrix} X_{1ik} & 0 \\ 0 & \delta I \end{bmatrix}, \quad \Psi_{2ik} = \begin{bmatrix} X_{2ik} & 0 \\ 0 & \delta I \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{0jk} = \begin{bmatrix} Q_{0jk} & 0 \\ 0 & -\delta I \end{bmatrix}, \quad \Gamma_i = \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & -\delta I \end{bmatrix},$$

$$P_{N_{jk}} = \begin{bmatrix} P_{0_{jk}} & 0 \\ 0 & \delta I \end{bmatrix}, \quad (15)$$

sendo um escalar $\delta > 0$, que tornem factíveis as condições dispostas no Teorema 2, dadas em (12) e (13). A prova é dividida em duas etapas. No primeiro passo, prova-se que a LMI (12) é factível. Em seguida, a análise segue para a condição (13).

Passo I

Substituindo as matrizes dispostas em (15) na condição (12) do Teorema 2, considerando (9)-(11) e multiplicando à esquerda por T e à direita T' , obtém-se:

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} Z_{1_{ijk}} & Z'_{2_{ijk}}\delta \\ \delta Z_{2_{ijk}} & \delta Z_{3_{ijk}} \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

sendo que, $Z_{1_{ijk}} < 0$ é equivalente à condição (4) disposta no Teorema 1. Além disso, verifique que:

$$Z_{2_{ijk}} = \begin{bmatrix} 2CwI & 0 \\ 2CwI & 0 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$Z_{3_{ijk}} = \begin{bmatrix} -4wI & -2wI \\ -2wI & -4I \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Aplicando o complemento de Schur em (17), note que:

$$-Z_{1_{ijk}} - \delta Z_{2_{ijk}}(\delta Z_{3_{ijk}})^{-1}\delta Z'_{2_{ijk}} > 0. \quad (20)$$

Como $-Z_{1_{ijk}} > 0$, então existe um $\delta > 0$ suficientemente pequeno, tal que:

$$\rho_{\min}(-Z_{1_{ijk}}) > \rho_{\max}(\delta Z_{2_{ijk}}(Z_{3_{ijk}})^{-1}Z'_{2_{ijk}}), \quad (21)$$

sendo que ρ representa os autovalores, a expressão (20) é satisfeita. Desta forma, (17) é atendida.

Passo II

Verifica-se que, a partir de (15), utilizando $\lambda \in \Lambda$ obtido no Teorema 1, e utilizando as equações que descrevem o sistema aumentado (9)-(11), a expressão (13) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \Gamma_{0_{jk}} + \hat{C}'\Gamma_{\lambda}\hat{C} &= \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} & 0 \\ 0 & -\delta I \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} C' & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{\lambda} & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} + C'Q_{\lambda}C & 0 \\ 0 & -\delta I + \tilde{Q}_{\lambda} \end{bmatrix}, \quad (22) \end{aligned}$$

sendo que $\tilde{Q}_{\lambda}$ será definida a seguir. A partir de (5), verifique que $Q_{0_{jk}} + C'Q_{\lambda}C < 0$.

Desta maneira, para que $\Gamma_{0_{jk}} + \hat{C}'\Gamma_{\lambda}\hat{C} < 0$, basta que, $-\delta I + \tilde{Q}_{\lambda} < 0$, sendo que, de (15), $\tilde{Q}_{\lambda} = -\sum_{i=1}^N \lambda_i \delta I$. Deste modo, como $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N = 1$, tem-se que, para um escalar $\delta > 0$, $-\delta I + \tilde{Q}_{\lambda} = -2\delta I < 0$.

Segundo as demonstrações explicitadas nos passos I e II, a prova está concluída. $\square$

4 Exemplo Ilustrativo

Nesta seção é apresentado um exemplo visando demonstrar a eficácia da proposta apresentada neste artigo. O exemplo abaixo foi retirado de (Mainardi Júnior et al., 2015), considerando os mesmo valores de $\lambda_1 = 0,1$, $\lambda_2 = 0,7$ e $\lambda_3 = 0,2$. Considere os sistemas (1), (2) e (9), com $r = 2$, $N = 3$, $i \in \{1,2,3\}$, $j \in \{1,2\}$ e as seguintes matrizes:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} h_1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -5 & -6 & 1 \\ -3 & h_2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & h_3 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As matrizes A_{12} , A_{22} e A_{32} são dependentes dos parâmetros h_1 , h_2 e h_3 , respectivamente. Note que as matrizes A_{12} e A_{32} não são Hurwitz para todos valores de $h_1 \in [0, 20]$ e $h_3 \in [-10, 25]$, respectivamente, e A_{22} é Hurwitz para todos valores pertencentes ao intervalo $h_2 \in [-50, 0]$. Além disso, verifica-se que A_{11} e A_{31} não são Hurwitz e A_{21} é Hurwitz.

Este exemplo apresenta um estudo comparativo de factibilidade para alguns pares de h_1 , h_2 , sendo $h_1 \in [0, 20]$, $h_2 \in [-50, 0]$ e $h_3 = -(h_1 + h_2)/2$. Adotou-se incrementos de 1 e 2, para as variáveis h_1 e h_2 , respectivamente, tendo portanto um total de 546 pontos analisados.

Foram considerados vários casos para alocação de polos do compensador dinâmico, ou seja, $1 \leq w \leq 81$. A Figura 3 apresenta o resultado de factibilidade considerando a variação do parâmetro do compensador dinâmico ($1 \leq w \leq 81$), a qual possibilita observar a influência do aumento do parâmetro w na região de factibilidade.

A partir do valor $w = 21$ a influência do aumento deste parâmetro na região de factibilidade não produziu um aumento significativo no número de pontos factíveis. Para fim de comparação com os resultados apresentados na literatura (Mainardi Júnior et al., 2015) considerou-se $w = 81$, tendo

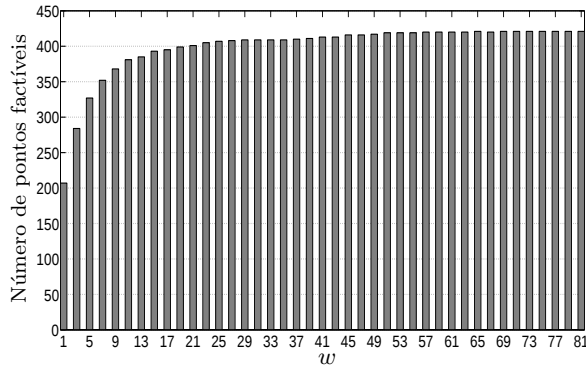


Figura 3: Número de pontos factíveis considerando a variação do parâmetro do compensador dinâmico ($1 \leq w \leq 81$).

em vista que para o intervalo $57 \leq w \leq 81$ o método utilizado neste trabalho resultou em uma região de factibilidade maior para que os outros valores considerados de w . A Figura 4 apresenta a comparação entre as regiões de factibilidade obtidas pelo Teorema 1 e pelo teorema proposto neste artigo (Teorema 2). Por meio da Figura 4 é possível observar que a região de factibilidade obtida pelo Teorema 2 em comparação ao obtido em (Mainardi Júnior et al., 2015) - (Teorema 1) foi consideravelmente expandida. Sendo assim, a metodologia proposta generaliza os resultados apresentados na literatura.

Destaca-se que a configuração do compensador dinâmico ou parâmetro do mesmo a ser considerado é de escolha do projetista, podendo este atribuir valores que auxiliem consideravelmente para ampliar a região de factibilidade.

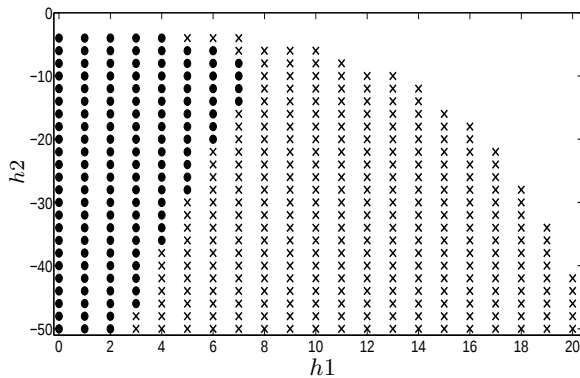


Figura 4: Regiões de factibilidade obtidas com o Teorema 1, representada por ($\bullet$), e com o Teorema 2, representada por ($\bullet$) e ($\times$).

5 Conclusões

Neste artigo, a proposta foi acrescentar uma nova variável de estado, aumentando a ordem do sistema através de um compensador dinâmico inserido na saída controlada da planta. Cabe ressaltar que, a escolha da função de transferência do com-

pensador é critério do projetista. A partir disto, considerou-se esta nova variável para o projeto da lei de chaveamento do sistema aumentado. Resultados numéricos de simulação foram obtidos para diferentes valores de alocação de polos do compensador dinâmico. Uma análise teórica (Teorema 3) demonstrou que se as condições propostas em (Mainardi Júnior et al., 2015) são factíveis, então, as novas condições dispostas no Teorema 2 também são satisfeitas. Finalmente, um exemplo ilustrativo mostrou que, quando as condições do teorema proposto são factíveis, a generalização proposta neste trabalho apresentou maiores regiões de factibilidade quando comparados com os resultados apresentados em (Mainardi Júnior et al., 2015).

Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES, ao CNPq e a FAPESP (2011/17610-0) pelo apoio financeiro.

Anexo I

Prova do Teorema 2

Considere que (12) e (13) são factíveis. A partir de (14) e (13), note que:

$$\begin{aligned} 0 &> \xi'(\Gamma_{0_{jk}} + \hat{C}'\Gamma_{\lambda}\hat{C})\xi \geq \xi'\Gamma_{0_{jk}}\xi + \min_{i \in \mathbb{K}_N} v'\Gamma_i v \\ &= \xi'(\Gamma_{0_{jk}} + \hat{C}'\Gamma_{\sigma}\hat{C})\xi \end{aligned} \quad (22)$$

Observe que, (22) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} 0 &> \frac{1}{2} \times \xi' \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}' \\ &\quad \begin{bmatrix} \Gamma_{0_{jk}} + \hat{C}'\Gamma_{\sigma}\hat{C} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \xi, \\ 0 &> \xi' \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}' \\ &\quad \begin{bmatrix} \Gamma_{0_{jk}} + \Gamma_{0_{kj}} + 2\hat{C}'\Gamma_{\sigma}\hat{C} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \xi. \end{aligned} \quad (23)$$

Deste modo, a partir de (23) e (12), obtém-se:

$$\begin{aligned} 0 &> \frac{1}{2} \times \xi' \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}' \\ &\quad \begin{bmatrix} \Psi_{1ik}\hat{A}_{ij} + \Psi_{1ij}\hat{A}_{ik} + (*) \\ P_{N_{jk}} - \Psi'_{1ik} + \Psi_{2ik}\hat{A}_{ij} + P_{N_{kj}} - \Psi'_{1ij} + \Psi_{2ij}\hat{A}_{ik} \\ -\Psi_{2ik} - \Psi_{2ij} - (*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \xi. \end{aligned} \quad (24)$$

Note que de (24) tem-se que:

$$0 > \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j \xi' \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \Psi_{1ik} \hat{A}_{ij} + \hat{A}'_{ij} \Psi'_{1ik} \\ P_{N_{jk}} - \Psi'_{1ik} + \Psi_{2ik} \hat{A}_{ij} \\ P_{N_{jk}} - \Psi_{1ik} + \hat{A}'_{ij} \Psi'_{2ik} \\ -\Psi_{2ik} - \Psi'_{2ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \xi. \quad (25)$$

Definindo-se $P_N(\alpha) = (\alpha_1 \alpha_1 P_{N_{11}} + \alpha_1 \alpha_2 P_{N_{12}} + \dots + \alpha_r \alpha_r P_{N_{rr}})$, $\Psi_1(\sigma, \alpha) = (\alpha_1 \Psi_{1\sigma 1} + \alpha_2 \Psi_{1\sigma 2} + \dots + \alpha_r \Psi_{1\sigma r})$, $\Psi_2(\sigma, \alpha) = (\alpha_1 \Psi_{2\sigma 1} + \alpha_2 \Psi_{2\sigma 2} + \dots + \alpha_r \Psi_{2\sigma r})$, note que (25) pode ser reescrita como:

$$0 > \xi' \begin{bmatrix} I_n & \hat{A}'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & P_N(\alpha) \\ P_N(\alpha) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_1(\sigma, \alpha) \\ \Psi_2(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}(\sigma, \alpha) & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{A}'(\sigma, \alpha) \\ -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi'_1(\sigma, \alpha) & \Psi'_2(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \xi,$$

$$0 > \begin{bmatrix} I_n & \hat{A}'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P_N(\alpha) \\ P_N(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Considerando uma função candidata de Lyapunov $V(x) = x' P_N(\alpha) x$, note que de (2), $V(x) > 0$ para $x \neq 0$ e de (9) e (26), segue que $\dot{V}(x) < 0$. Deste modo, a prova está concl ida.

Referências

- Boyd, S. P., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*, Vol. 15, SIAM.
- Cardim, R., Teixeira, M. C., Assunção, E., Covacic, M. R., De Seixas, F. J., Faria, F. A. and Júnior, E. I. M. (2011). Design and implementation of a dc-dc converter based on variable structure control of switched systems, *IFAC Proceedings Volumes* **44**(1): 11048–11054.
- Deaecto, G. S., Geromel, J. C., Garcia, F. and Pomilio, J. (2010). Switched affine systems control design with application to DC-DC converters, *IET control theory & applications* **4**(7): 1201–1210.
- DeCarlo, R. A., Branicky, M. S., Pettersson, S. and Lennartson, B. (2000). Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems, *Proceedings of the IEEE* **88**(7): 1069–1082.
- Feron, E. (1996). *Quadratic stabilizability of switched systems via state and output feedback*, Center for Intelligent Control Systems.
- Geromel, J. C. and Colaneri, P. (2006). Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems, *SIAM Journal on Control and Optimization* **45**(5): 1915–1930.
- Geromel, J., Colaneri, P. and Bolzern, P. (2008). Dynamic output feedback control of switched linear systems, *Automatic Control, IEEE Transactions on* **53**(3): 720–733.
- Liberzon, D. (2003). *Switching in systems and control*, Springer Science & Business Media.
- Lin, H. and Antsaklis, P. J. (2009). Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results, *IEEE Transactions on Automatic Control* **54**(2): 308–322.
- Mainardi Júnior, E. I., Assun  o, E., Teixeira, M., Moreira, M., Cardim, R. and Yoshimura, V. L. (2012). *On Control Design of Switched Affine Systems with Application to DC-DC Converters*, INTECH Open Access Publisher.
- Mainardi Júnior, E. I., Teixeira, M. C. M., Cardim, R., Assun  o, E., Moreira, M. R., de Oliveira, D. R. and Carniato, A. A. (2015). Robust control of switched linear systems with output switching strategy, *Journal of Control, Automation and Electrical Systems* pp. 1–11.
- Noori, A., Farsi, M. and Esfanjani, R. M. (2016). Design and implementation of a robust switching strategy for DC-DC converters, *IET Power Electronics* **9**: 316–322(6).
- Papageorgiou, M., Diakaki, C., Dinopoulou, V., Kotsialos, A. and Wang, Y. (2003). Review of road traffic control strategies, *Proceedings of the IEEE* **91**(12): 2043–2067.
- Riedinger, P. and Vivalda, J.-C. (2015). Dynamic output feedback for switched linear systems based on a LQG design, *Automatica* **54**: 235 – 245.
- Wicks, M. A., Peleties, P. and DeCarlo, R. A. (1994). Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switched systems, *Decision and Control, 1994., Proceedings of the 33rd IEEE Conference on*, Vol. 4, IEEE, pp. 3492–3497.
- Zhang, L., Zhuang, S. and Braatz, R. D. (2016). Switched model predictive control of switched linear systems: Feasibility, stability and robustness, *Automatica* **67**: 8 – 21.