

SINCRONIZAÇÃO DE REDES DE SEMÁFOROS VIA MODELOS MAX-PLUS LINEARES: APLICAÇÃO AO CONTROLE DE FLUXO EM CRUZAMENTOS

ALAN M. MAROTTA, CARLOS A. MAIA

Depto. de Engenharia Mecatrônica, CEFETMG
Rua Álvares de Azevedo, 400 Bela Vista, CEP 35503822 Divinópolis-MG
alan@div.cefetmg.br

Depto. de Engenharia Elétrica, UFMG
Av Antônio Carlos, 6627 Pampulha, CEP 31270-010 Belo Horizonte-MG
maia@cpdee.ufmg.br

Abstract— This work deals with the modeling and synchronization of urban traffic systems using techniques of Timed Discrete Event Systems (TDES), based on Timed Events Graphs and Max-plus algebra. In traffic control, one defines the traffic signal times for the green, yellow and red lights, and the sequencing and synchronization of traffic lights of the same intersection, intersections in different routes and in complex routes. The Max-plus algebra allows linearization of the system and the application of Max-plus matrix tools. Through the matrix computation, the use of eigenvalues and eigenvectors and Kleene Star function, one defines optimal times for stages. The used model allows the graphics analysis and the evolution of the controller system, in addition it allows making the interface and inference to the parameters more transparent and user friendly. In complex systems, where an approach in the time domain is quite complex, the elegance and power of modeling event-driven presents a great mathematical tool in the control and timing of urban traffic systems, as shown and illustrated in the case study.

Keywords— Discret Events, Traffic Signal Control, Maxplus Algebra, Spectral Theory of Matrices

Resumo— Este trabalho trata da modelagem e sincronização de sistemas de tráfego urbano utilizando técnicas de Sistemas a Eventos Discretos Temporizados (SED), tendo como base os Grafos a Eventos Temporizados (GETs) e a álgebra Max-plus. No controle de tráfego, definem-se os tempos semafóricos para os sinais verde, amarelo e vermelho, bem como o sequenciamento e sincronismo entre semáforos de um mesmo cruzamento e de diversos cruzamentos em uma via e em um complexo de vias. A álgebra Max-plus permite a linearização do sistema e a possibilidade da aplicação de ferramentas matriciais. Através da computação matricial, o uso de autovalores e autovetores, e do processamento da função Estrela de Kleene, definem-se tempos ótimos para os estágios. A modelagem utilizada permite a interpretação gráfica e da evolução do sistema do controlador, além de tornar mais transparente e simples a inferência dos parâmetros para o operador do sistema. Em complexos sistemas, onde uma abordagem no domínio do tempo seria muito complexa, a transparência e compacticidade da modelagem orientada a eventos mostra-se uma ótima ferramenta matemática no controle e sincronismo de sistemas de tráfego urbano, conforme apresentado e ilustrado no estudo de casos.

Palavras-chave— Sistemas a Eventos Discretos, Controle Semafórico, Álgebra Max-plus, Teoria Espectral de Matrizes

1 Introdução

Os sistemas de controle de tráfego urbano são fundamentais para a melhoria do uso das vias públicas, tendo implicações diretas na vida de grande parte da população. Melhorias das condições das vias, bem como sua expansão são imprescindíveis e demandam investimentos. Todavia, os sistemas de controle de redes de semáforos influenciam de forma direta no trânsito da maneira em que a estrutura se encontra. Este artigo investiga o uso de SEDT (Sistemas a Eventos Discretos Temporizados) para modelagem de sistemas de controle semafórico em complexos de vias utilizando Grafos a Eventos Temporizados e Álgebra Max-plus (Cassandras & Lafortune 2008).

A modelagem utilizando a álgebra Max-plus torna o sistema linear em contrapartida à não linearidade desses sistemas no tratamento algébrico convencional (Maia, 2011). Outras abordagens, no domínio de tempo contínuo, podem levar a cenários de otimização inviáveis (Göttlich, 2015). Além disso, permite a fácil parametrização do sistema com a

modelagem utilizada, permitindo ajustes e o possibilitando o uso de ferramentas matriciais, a fim de garantir condições proporcionais à demanda de fluxo de veículos.

Simplificações e aproximações foram feitas a fim de tornar a implementação capaz de suportar o processamento de numerosos complexos de cruzamentos urbanos.

2 Ferramentas utilizadas

Nesta seção serão apresentadas as ferramentas matemáticas utilizadas na modelagem proposta para o sistema de controle de tráfego urbano.

2.1 Sistemas a Eventos Discretos

Os SEDs – Sistemas a Eventos Discretos são caracterizados por apresentarem estados definidos e serem orientados por eventos que levam à transição entre esses estados, as quais também podem ser ponderadas, acarretando pesos.

Os formalismos que modelam os SEDs podem ser não-temporizados, temporizados ou estocásticos, de acordo com o nível de abstração de interesse. Dois são os formalismos mais conhecidos na literatura: os autômatos (Hopcroft et. al, 1979) e as redes de Petri (Murata, 1989). Neste trabalho são utilizadas as redes de Petri, mais especificamente os Grafos a Eventos Temporizados aplicados ao contexto de controle de tráfego urbano (Farchi et. al., 2010), os quais podem ser equacionados e manipulados através da Álgebra Max-plus.

2.2 Grafos de Eventos Temporizados (GET)

Os Grafos a Eventos Temporizados – GETs são apropriados para representação semafórica, conforme a definição (Baccelli et al, 1992):

Um grafo de eventos temporizado é uma Rede de Petri temporizada na qual cada lugar p_i tem um tempo de espera associado e somente uma transição de entrada e somente uma transição e saída.

Contextualizando com o tema desse projeto, a Figura 1 apresenta um GET para o modelo de um semáforo em GET.

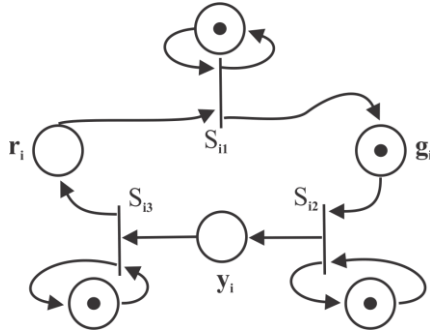


Figura 1. Modelo de semáforo em GET

No caso do modelo de semáforo da Figura 1, as transições S_{i1} , S_{i2} e S_{i3} são associadas aos eventos de abertura do sinal verde, laranja e vermelho, respectivamente, no semáforo i . Os valores g_i , y_i e r_i estão relacionados às temporizações dos respectivos lugares de mesmo nome: g_i , y_i e r_i . O auto-lazo em cada transição é geralmente inserido quando da modelagem desses sistemas, com o objetivo de se garantir que os sucessivos tempos de disparo de cada transição sejam crescentes.

O comportamento dinâmico dos GETs é usualmente descrito por equações não-lineares que envolvem os operadores $\max$ e $+$ (ou $\min$ e $-$) na álgebra convencional. Entretanto, este comportamento não-linear pode ser linearizado quando se utiliza a álgebra de dióides (Garcia, 2007). Um exemplo de dióide utilizado é a álgebra Max-plus.

2.3 Álgebra Max-plus

Os SEDs podem ser modelados através de vários formatos. Devido à natureza do problema da sincro-

nização de semáforos, será estudada, neste trabalho, a álgebra Max-plus.

Para entender o princípio dessa álgebra, começaremos com o exemplo do semáforo da Figura 1, tem-se, na álgebra convencional, o valor de da transição $S_{i1}(k)$ dado por:

$$S_{i1}(k) = \max(r_i + S_{i3}(k), S_{i1}(k-1)) \quad (1)$$

Sendo k relativo ao ciclo atual e $k-1$ o anterior. A equação 1 constitui um sistema não-linear. Tal fato não ocorre caso se utilize a álgebra Max-plus para descrever o sistema. Essa álgebra é composta de duas operações: a adição e a multiplicação. A adição, denotada pelo símbolo " $\oplus$ ", equivale à operação de maximização na álgebra convencional. A multiplicação, denotada pelo símbolo " $\otimes$ ", equivale à operação de adição na álgebra convencional. Assim a equação 1 é escrita na álgebra Max-plus por:

$$S_{i1}(k) = (r_i \otimes S_{i3}(k)) \oplus S_{i1}(k-1) \quad (2)$$

Define-se, nessa álgebra, o elemento neutro da adição como $\varepsilon = -\infty$, e o elemento neutro da multiplicação, como $e = 0$, e denota-se por $R_{\max}$ o conjunto $(R \cup \{\varepsilon\}, \max, +)$, sendo que R é o conjunto dos números reais. Há, também, uma operação importante definida para qualquer dióide, com que se depara frequentemente ao modelar SEDs utilizando essa álgebra. É a operação Estrela de Kleene, simbolizada por um asterisco, e definida por:

$$a^* = a^0 \oplus a^1 \oplus \dots, \quad (3)$$

$$\text{com } a^* = a \oplus a^{(i-1)} \text{ e } a^0 = e$$

Esse sistema, não-linear na álgebra convencional, passa a ser linear na álgebra Max-plus. Trabalhando-se com sistemas lineares, propriedades advindas da Teoria Espectral de Matrizes podem ser aplicadas (Maia et. al, 2013). Por exemplo, neste trabalho, as propriedades referentes a autovalores e autovetores são bastante exploradas quando da utilização de estratégias de sincronização de semáforos, atestando a utilidade da álgebra Max-plus nesse contexto, o qual será abordado na seção subsequente.

Como dito, as matrizes também podem ser definidas na álgebra Max-plus, e são de grande utilidade na modelagem dos sistemas abordados neste projeto. Define-se a soma e o produto de duas matrizes A e B em Max-plus num processo inteiramente análogo ao feito na álgebra convencional. A seguir, ilustra-se, com um exemplo, a adição e a multiplicação de duas matrizes em Max-plus.

Sejam A e B as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Então a soma na álgebra Max-plus dessas matrizes é dada por:

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 3 \oplus 2 & 2 \oplus 2 \\ 6 \oplus 5 & 1 \oplus 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

E o produto:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} (3 \otimes 2) \oplus (2 \otimes 5) & (3 \otimes 2) \oplus (2 \otimes 4) \\ (6 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 5) & (6 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Assim, com o uso de matrizes, é possível representar SEDs sujeitos a restrições de sincronização e de atraso, restrições essas, frequentemente no contexto da coordenação semafórica. Tais sistemas se apresentam na forma:

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k) \quad (7)$$

O vetor $x(k)$ representa o estado do sistema e $u(k)$ uma entrada externa, utilizada como entrada de controle. Também, alguns sistemas podem ser modelados na forma:

$$x(k) = A_0 x(k) \oplus A_1 x(k-1) \oplus Bu(k) \quad (8)$$

Em um grafo $G(A)$, observa-se o teorema 2.3.1:

Teorema 2.3.1 (Baccelli 1992) *Se existirem somente circuitos com peso não positivo em $G(A)$, existem soluções para $x = A_0 x \oplus A_1 a$ qual é dado por $x = A_0^* A_1$. Todavia, se os pesos do circuito são negativos, a solução é única.*

Conforme o teorema 2.3.1, e observando a equação 9, se $A_0^* A_1$ existir a solução é única de fato.

$$A_0 (A_0^* A_1) \oplus A_1 = (e \oplus A_0 A_0^*) A_1 = A_0^* A_1 \quad (9)$$

De tal forma a equação 8 pode ser reduzida a equação 10:

$$x(k) = A_0^* A_1 x(k-1) \oplus A_0^* B u(k) \quad (10)$$

A mesma forma da equação 7. Essa é a forma dita padrão (Maia, 2011), e a partir da qual são desenvolvidas estratégias de modelagem e controle para esses sistemas, bem como suas respectivas análises de desempenho. No caso específico deste projeto, os sistemas são tratados como sistemas autônomos, e, portanto, não é feito uso de entradas de controle. Assim, o instantes para o próximo ciclo $k+1$ podem ser definidos conforme a equação 11:

$$x(k+1) = A_0^* A_1 x(k) \quad (11)$$

2.4 Teoria Espectral de Matrizes

Conforme Baccelli (1992), um grafo dirigido G é definido por um conjunto de nós interconectados por arcos orientados. Um grafo é denominado ponderado se os arcos que ligam os nós i e j possuem pesos associados a eles. Este arco é denotado por (i,j) e o peso $w(i,j)$ desse arco é igual ao termo A_{ij} de uma matriz A associada ao grafo.

Um caminho em um grafo é uma sequência de arcos $(p_0, p_1), (p_1, p_2), \dots, (p_{t-1}, p_t)$, também representado por $p = p_0 \rightarrow p_1 \rightarrow \dots \rightarrow p_t$, e o comprimento d o caminho p é dado pelo número de nós percorridos, denotado por $|p|_t$. O peso de um caminho p , representado por $|p|_d$ é dado pela soma dos pesos de seus arcos.

Quando um caminho é fechado, ou seja, $p_0 = p_t$, denomina-se esse caminho de circuito. Conforme (Baccelli et. al 1992) temos as seguintes definições:

Definição 2.4.1 (Ciclo médio) *O peso médio de um caminho é dada pela divisão do peso pelo comprimento $|p|_d / |p|_t$. Se esse caminho é um circuito, seu peso médio é chamado de ciclo médio.*

Definição 2.4.2 (Grafo de precedência) *Seja $A \in D^{n \times n}$ uma matriz quadrada com coeficientes no dióide D . Denota-se $G(A)$ o grafo de precedência de A onde existem n nós e os arcos (i,j) são ponderados com A_{ij} . Se $A_{ij} \neq \varepsilon$ existe um arco que liga os nós i e j , caso contrário a ligação não existe.*

Definição 2.4.3 (Grafo fortemente conexo) *Um grafo $G(A)$ é dito fortemente conexo se para todo par de nós $(i,j) \in G(A)$ o nó alcançável a partir do nó i .*

Definição 2.4.4 (Matriz irredutível). *Uma matriz $A \in D^{n \times n}$ é considerada irredutível se o grafo de precedência $G(A)$ é fortemente conexo.*

As matrizes $n \times n$ com coeficientes definidos sobre dióides apresentam algumas propriedades. Uma delas é a possibilidade de associar um grafo orientado e ponderado, chamado grafo de precedência, a cada matriz quadrada, ou seja, existe uma representação gráfica para as matrizes. Além disso, se esse grafo é fortemente conexo é possível afirmar que sua matriz correspondente é fortemente conexa.

Para uma matriz A irredutível existe um inteiro c que garante a seguinte propriedade de ciclicidade:

$$A^{k+c} = \lambda^c \otimes A^k, \quad (12)$$

Sendo que k é superior a um número inteiro K e λ representa o autovalor da matriz A .

Definição 2.4.5 (Autovalor e autovetor) (Baccelli, 1992) *Seja $A \in R_{max}$ uma matriz quadrada. Se $\lambda \in R_{max}$ é um escalar e $v \in R_{max}$ um vetor que contém ao menos um elemento finito de modo que:*

$$A \otimes v = \lambda \otimes v, \quad (13)$$

Então λ é chamado de autovalor de A e v é um autovetor de A associado ao autovalor λ .

Para o caso de matrizes irredutíveis, a solução λ é única e calculada através da seguinte expressão:

$$\lambda = \bigoplus_{k=1}^n (\text{traço}(A^k))^{1/k}, \quad (14)$$

Sendo o $\text{traço}(A^k) = \bigoplus_{i=1}^n (A^k)_{ii}$ e n corresponde à ordem da matriz A .

Em Baccelli et. al. (1992) prova-se que se A é irredutível o autovalor também é dado pelo máximo ciclo médio de $G(A)$:

$$\lambda = \bigoplus_{i=1}^r \frac{|p|_d}{|p|_t}, \quad (15)$$

Sendo r o número de circuitos de $G(A)$.

3 Técnicas e estratégias de modelagem SED na álgebra Max-plus aplicadas à sincronização de redes de semáforos

Nesta seção, são apresentadas técnicas de SEDs para modelar um sistema de tráfego urbano a fim de equacioná-lo de forma a permitir a busca pelo menor tempo de espera e tendo em vista garantir uma sequência sucessiva de sinais para dada via preferencial, criando as chamadas “ondas verdes”.

Alguns modelos básicos da álgebra Max-plus são encontrados em (Farchi et. al, 2010) e (Katz, 2007). Para complexos sistemas de cruzamentos e o controle de redes de semáforos, abordagens no domínio do tempo podem levar ao estouro computacional, ao passo que a abordagem orientada à eventos viabiliza a modelagem e implementação do sistema.

Existem dois grandes grupos de estratégias, as que buscam maximizar a largura de banda e as que otimizam algum critério de tráfego. Uma técnica conhecida se baseia em dados geométricos das vias, tempos de verde e defasagens (Morgan e Little, 1964).

Egmond (Egmond e Olsdem, 1998) afirmou: “Não deixe os veículos esperando no semáforo, mas os semáforos esperando os veículos”. A estratégia utilizada em seu trabalho foi o uso de autovetores e autovetores a partir da álgebra Max-plus para a obtenção das matrizes associadas, na obtenção de planos semafóricos ideais. Uma regra importante também é que o tempo entre estágios sucessivos devem ter um mínimo.

Utilizando essas estratégias, então supomos um sistema composto por quatro cruzamentos, conforme ilustrado na Figura 2.

As distâncias entre os cruzamentos definem os tempos médios de deslocamento entre um cruzamento e outro, sendo $t_{13}=t_{31}=t_{24}=t_{42}$ e $t_{12}=t_{21}=t_{34}=t_{43}$.

O primeiro passo na modelagem consiste em definir o plano semafórico. A Figura 3 ilustra os plano semafórico para os 4 cruzamentos, cada qual com as suas respectivas sequências referenciadas por letras, na ordem em que devem ocorrer.

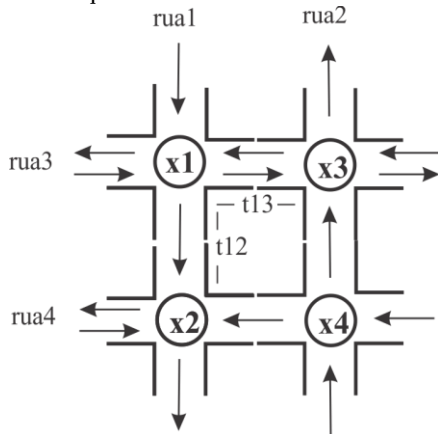


Figura 2. Complexo de 4 cruzamentos: x1, x2, x3, x4.

Com base no plano semafórico e em conformidade com as vias que se pretende que se gere as “ondas de verdes”. Para o exemplo foram consideradas as vias de maior demanda, rua 1 e rua 2, que em conformidade como é comum o projetista utilizarem-se das vias de maior fluxo, que geralmente são as possuem mais faixas.

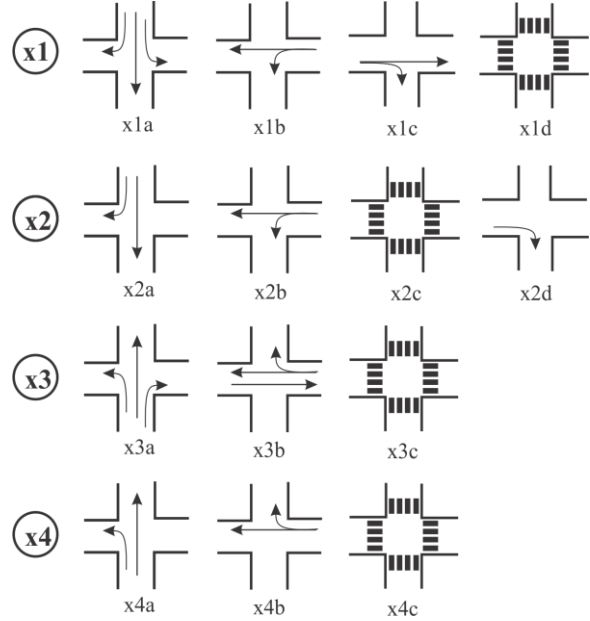


Figura 3. Plano Semafórico para cada um dos 4 cruzamentos

Definimos então as equações Max-plus, buscando relações de sincronismo que permitam fluxo preferencial entre dois semáforos na mesma rua:

$$x_{1a}(k+1) = t_p x_{1d}(k) \quad (16)$$

$$x_{1b}(k+1) = t_v x_{1a}(k+1) \quad (17)$$

$$x_{1c}(k+1) = t_v x_{1b}(k+1) \quad (18)$$

$$x_{1d}(k+1) = t_v x_{1c}(k+1) \quad (19)$$

$$x_{2a}(k+1) = t_v x_{2d}(k) \oplus t_{12} x_{1a}(k+1) \quad (20)$$

$$x_{2b}(k+1) = t_v x_{2a}(k+1) \oplus t_{42} x_{4b}(k) \quad (21)$$

$$x_{2c}(k+1) = t_v x_{2b}(k+1) \quad (22)$$

$$x_{2d}(k+1) = t_p x_{2c}(k+1) \quad (23)$$

$$x_{3a}(k+1) = t_p x_{3c}(k) \oplus t_{43} x_{4a}(k+1) \quad (24)$$

$$x_{3b}(k+1) = t_v x_{3a}(k+1) \oplus t_{13} x_{1c}(k) \quad (25)$$

$$x_{3c}(k+1) = t_v x_{3b}(k+1) \quad (26)$$

$$x_{4a}(k+1) = t_p x_{4c}(k) \quad (27)$$

$$x_{4b}(k+1) = t_v x_{4a}(k+1) \quad (28)$$

$$x_{4c}(k+1) = t_v x_{4b}(k+1) \quad (29)$$

Substituindo os valores parametrizados teremos o seguinte sistema linear Max-plus:

$$x(k+1) = A_0 x(k+1) \oplus A_1 x(k) \quad (30)$$

Segundo a Teoria Espectral de Matrizes (Baccelli, 1992), que se podem utilizar para se obter as matrizes A_0 e A_1 a partir equações de 16 a 29, ou a partir do grafo da Figura 4, que mostra o modelo GET para tal sistema.

Obtendo as matrizes A_0 , para os termos que contém relação com o próximo estágio $k+1$, e A_1 , para os termos do estágio atual k , podemos então definir a matriz de tempos de transição dos estágios calculando a matriz X_0 .

$$X_0 = A_0^* A_1 x(k) \quad (31)$$

Para fins de processamento numérico, foram utilizados tempos mínimo para pedestres t_p igual a 15 segundos e tempos mínimo para veículos t_v igual a 18 segundos. O tempo de deslocamento entre um cruzamento e outro foi calculado em função das distâncias entre os cruzamentos, com uma velocidade média de 50km/h e tempo de resposta da fila igual a 2 segundos. Assim, para o t_{ij} , onde i e j são dois semáforos subsequentes, utilizou-se $t_{12}=t_{21}=t_{34}=t_{43}=26$ segundos e $t_{13}=t_{31}=t_{24}=t_{42}=22$ segundos.

Uma vez definidos os parâmetros iniciais, pode-se calcular a estrela de Kleene da matriz A_0 . Foi utilizado a ferramenta de código aberto Scicoslab versão 4.4.2, disponível na página web de mesmo nome, com extensão “org”. A função utilizada foi implementada pela sintaxe: `star(A0)`.

A matriz X_0 contém um possível plano de transição dos estágios, porém é sabido que quanto maior o tempo de verde, maior será o comboio e maior será o fluxo ((Egmond e Olsdem, 1998), característica desejada).

A fim de ajustar o período λ para o maior possível de espera pelo usuário e admitindo-se os vetores de demanda de fluxo para cada cruzamento em cada estágio, tem-se então um exemplo mostrado em (32):

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & D_2 &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ D_3 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} & D_4 &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (32)$$

Considerando os tempos dos planos semafóricos calculados em X_0 , (equação 31) através dos quais temos os períodos mínimos de período para cada semáforo ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e λ_4).

Então para um período λ máximo, parametrizado conforme o máximo valor admissível de espera pelo usuário e igual para todos os semáforos para que haja sincronismo e garantia de sequenciamento nas vias desejadas. O ajuste dos tempos conforme o período λ em função dos períodos mínimos pode ser calculado através dos termos τ_{ij} associado a cada tempo de estágio j para cada cruzamento i , podendo as equações Max-plus serem reescritas conforme o coeficiente de demanda associado ao estágio anterior, ficando as equações de (16) a (20) da seguinte forma:

$$x_{1a}(k+1) = \tau_{14} t_p x_{1d}(k) \quad (33)$$

$$x_{1b}(k+1) = \tau_{11} t_v x_{1a}(k+1) \quad (34)$$

$$x_{1c}(k+1) = \tau_{12} t_v x_{1b}(k+1) \quad (35)$$

$$x_{1d}(k+1) = \tau_{13} t_v x_{1c}(k+1) \quad (36)$$

$$x_{2a}(k+1) = \tau_{24} [t_v x_{2d}(k) \oplus t_{12} x_{1a}(k+1)] \quad (37)$$

O mesmo pode ser aplicado às demais equações. Para o cálculo dos tempos de ajuste τ , é considerado a demanda total em cada semáforo, como sendo o somatório das demandas:

$$\Delta D_i = \sum_{j=1}^n D_i[j] \quad (38)$$

Onde i é o número do cruzamento e j o estágio para o dado cruzamento. Para τ_{ij} , o tempo a ser acrescentado a cada estágio conforme a demanda do mesmo, ter-se-á:

$$\tau_{ij} = \frac{D_i[j]}{\Delta D_i} \quad (39)$$

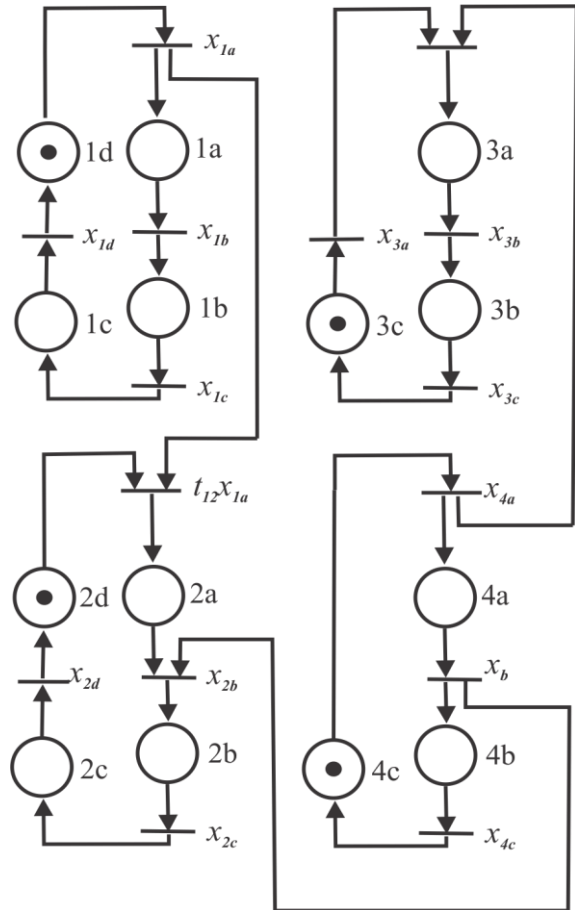


Figura 4. GET para o sistema de 4 cruzamentos

Para fins de exemplificação numérica, com os parâmetros definidos, obteve-se através de X_0 (equação 30) os períodos mínimos, $\lambda_1=69$, $\lambda_2=69$, $\lambda_3=51$ e $\lambda_4=51$. Assim, os tempos de disparo para cada semá-

foro, definindo-se um período λ igual a 100 segundos ficarão:

$$x_1(k) = 100k[15 \quad 51,6 \quad 75,8 \quad 100] \quad (40)$$

$$x_2(k) = 100k[24,2 \quad 60,8 \quad 85 \quad 100] \quad (41)$$

$$x_3(k) = 100k[15 \quad 51,6 \quad 100] \quad (42)$$

$$x_4(k) = 100k[15 \quad 56,25 \quad 100] \quad (43)$$

Assim, o objetivo da modelagem foi atingido, permitindo que os tempos de verde fossem distribuídos proporcionalmente entre os estágios a partir da indicação das demandas de fluxo. Uma vez que não foram definidas funções de absorção de veículos nos cruzamentos, esse trabalho permite o refinamento da modelagem e aplicação de estratégias de otimização nesse sentido.

4 Conclusão

O desenvolvimento deste artigo levou-nos a concluir que a modelagem utilizando as ferramentas de SEDTs, os GETs e a álgebra Max-plus, permitem implementar um modelo robusto, compacto e transparente, através do qual é possível parametrizar e evoluir para um sistema de planos semaforicos que garantem o sincronismo e a análise da possibilidade da distribuição dos tempos proporcionais às demandas de fluxo e à geração do sequenciamento de verdes para dadas vias.

O uso de autovetores e autovalores permite a análise e ponderação da distribuição dos tempos de verdes proporcional às demandas de fluxo de tráfego, permitindo ao operador do sistema a possibilidade da inferência de valores colhidos *in loco* e reajuste do sistema. Aproximações foram feitas e foi objetivo propor uma modelagem direta e clara.

Conforme o estudo de caso apresentado para um complexo de 4 cruzamentos demonstrou-se a possibilidade da implementação em sistemas com complexidade superior, com capacidade de processamento robusta o suficiente para controlar numerosos subsistemas, garantindo o sincronismo e inter-relacionamento entre os pontos de controle e o sequenciamento de estágios, bem como a garantia das condições impostas.

Tendo como base a proposta apresentada, a modelagem pode ser aprimorada para o desenvolvimento de trabalhos envolvendo a otimização do sistema de temporização dos semáforos.

Agradecimentos

Agradecimentos às instituições fomentadoras, a Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG e o Centro Federal Tecnológico de Minas Gerais – CEFETMG, e às agências de financiamento: Fape- mig, Capes e CNPq.

Referências Bibliográficas

- Andrade, R. A. (2008) Controle de Sistemas Max-Plux Lineares Sujeitos a Restrições no Estado: Aplicação a Sistemas de Transporte, dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais
- Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J. & Quadrat, J. P. (1992) Synchronization and Linearity, Wiley.
- Basile, F., Chiacchio P., Teta D. (2012), A hybrid model for real time simulation of urban traffic, Control Engineering Practice, Elsevier, Volume 20, Issue 2, February 2012, Pages 123-137
- Cassandras, C. G. e Lafontaine, S., (2008). Introduction to Discrete Event Systems, 2nd edition, ed. Springer, New York, USA.
- Egmond, R. J. e Olsder, G. J. (1998). The (max,+) algebra applied to synchronization of traffic light processes. Algèbres Max-plus et applications en informatique et automatique : ("Ile de Noirmoutier", 4-7 mai 1998) Ecole de printemps d'informatique théorique No26, FRANCE (04/05/1998), pp. 193-198.
- Farchi N., Goursat M., Quadrat J. P. (2010) Fundamental Traffic Diagrams: a Max-plus point of view, ILAS Max-plus mini symposium, Pise, June 2010.
- Garcia, T. R. (2007) Modelagem e controle da coordenação do tráfego urbano através de formalismos para sistemas a eventos discretos e híbridos, PhD thesis, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Göttlich S., Hertyb M, Ziegler U. (2015) Modeling and optimizing traffic light settings in road networks, Elsevier Computers & Operations Research 55, p 36-51
- Hopcroft J. E., Ullman J. D., Jeffrey D. (1979), Introduction to Automata Theory Language, and Computation, (1st ed.). Addison-Wesley. ISBN 81-7808-347-7.
- Katz, R. D. (2007) Max-plus (a; b)-invariant spaces and control of timed discrete-event systems, IEEE Transactions on Automatic Control 52(2): 229-241
- Maia, C. A., Hardouin, L. e Cury, J. E. R. (2013) Some Results on the Feedback Control of Max-plus Linear Systems under State Constraints, 52nd IEEE Conference on Decision and Control December 10-13, 2013, Firenze, Italy
- Maia, C. A., Andrade C. R., Hardouin (2011) On the control of Max-plus linear system subject to state restriction, Elsevier, Automatica 47: 998-992
- Morgan, J. T. e Little, J. D. C. (1964) Synchronizing Traffic Signals for Maximal Bandwidth, Operations Research, 12(6): 896-912
- Murata, T. (1989). Petri Nets: Properties, Analysis and Applications. Proceedings of the IEEE. Vol. 77 n. 4, p. 541-580.