

CONDIÇÕES LMIs PARA ANÁLISE E SÍNTESE DE SISTEMAS LINEARES EM TEMPO DISCRETO SUJEITOS A UMA CLASSE DE PERTURBAÇÕES LIMITADAS

RÔMULO L. MILHOMEM*, EUGÊNIO B. CASTELAN†, MARTÍN J. POMAR†, HECTOR B. SILVEIRA†

**RELAB, Faculdade de Tecnologia SENAI Florianópolis
Florianópolis, Santa Catarina, Brasil*

†*Departamento de Automação e Sistemas - DAS
Universidade Federal de Santa Catarina
Florianópolis, Santa Catarina, Brasil*

Emails: romulo.milhomem@edu.sc.senai.br, (eugenio, mpogar, hector)@ufsc.br

Abstract— The analysis of linear systems subject to bounded disturbances is important in control theory because various physical phenomena can be represented or approximated in such form. In particular, in the case of systems with control inputs subject to certain nonlinearity classes and evolving in a determined region of operation, the control system can be approximated by a linear system with bounded additive disturbances. In this and other cases, the modeling of systems subject to bounded disturbances is fundamental to the development of theoretical and computational tools for the analysis and synthesis of control systems. In this context, in the present work LMI conditions are established for the analysis and synthesis of discrete time linear systems subject to bounded disturbances that are represented in a polytopic form.

Keywords— Stability, Quadratic Lyapunov Function, Atractor set, Linear Matrix Inequality, Polytopic uncertainty.

Resumo— A análise de sistemas lineares sujeitos a perturbações limitadas tem interesse na teoria de controle, pois vários fenômenos físicos podem ser representados ou aproximados sob esta forma. Em particular, no caso de sistemas com entradas de controle sujeitas a uma classe de não-linearidades pertencentes a uma faixa de operação, o sistema de controle pode ser aproximado por um sistema linear com perturbação aditiva limitada. Neste, e em outros casos, a modelagem do sistema sujeito a perturbações limitadas é interessante para o desenvolvimento de ferramentas teóricas e de cálculo para a análise e síntese destes sistemas de controle. Neste contexto, são propostas no trabalho condições LMIs para análise e síntese de sistemas lineares, em tempo discreto, sujeitos a perturbações limitadas representadas de forma politópica.

Keywords— Estabilidade, Função Quadrática de Lyapunov, Conjunto atrator, Desigualdade Matricial Linear, Incerteza politópica.

1 Introdução

As exigências de desempenho, operação e controle dos processos de produção têm crescido significativamente, tornando-se essencial o aprimoramento e/ou desenvolvimento de técnicas de controle que tornem esses sistemas mais eficientes. Nestes casos, durante a modelagem e projeto do controlador, características inerentes ao sistema devem ser consideradas, como perturbações externas e comportamentos não-lineares nos atuadores, por exemplo. Em particular, no caso de sistemas com entradas de controle sujeitas a uma classe de não-linearidades pertencentes a uma faixa de operação, o sistema de controle pode ser aproximado por um sistema linear com perturbação aditiva limitada; veja, por exemplo, Turner (2006) e Dilda et al. (2012). Assim, a consideração de modelos de sistemas sob tal forma é interessante e útil para o desenvolvimento de ferramentas teóricas e de cálculo para a solução dos problemas de análise e síntese de sistemas de controle sujeitos à perturbações aditivas.

Para o caso de sistemas lineares sujeitos à perturbações limitadas, e persistentes, esses problemas foram abordados por diferentes autores, como Abedor et al. (1996), Hao et al. (2003) e, mais re-

centemente, Pomar et al. (2012), no caso de sistemas contínuos no tempo, ou Ji et al. (2007) no caso de sistemas discretos no tempo, dentre outros. Nestes trabalhos, estuda-se a convergência das trajetórias do sistema para conjuntos elipsoidais via a utilização de funções de Lyapunov quadráticas e de conceitos, tais como, o de conjuntos atratores, adotado em Pomar et al. (2012), ou o de estabilidade do tipo *ultimate boundedness*, usado em Tarbouriech et al. (2011) e Dilda et al. (2012).

Dentro do contexto descrito acima, no presente trabalho são considerados os problemas de análise e síntese para sistemas lineares discretos no tempo sujeitos à perturbações limitadas, visando-se explorar, como em Pomar et al. (2012), uma representação politópica para o conjunto de perturbações e conceitos de conjuntos atratores, objetivando-se a proposição de condições sob a forma de LMIs que permitam tratar e solucionar os problemas.

O artigo segue a organização seguinte. Na Seção 2, após a formalização dos problemas de análise e síntese considerados, será apresentado um resultado de base para a análise de convergência de trajetórias e a definição de conjuntos atratores, utilizando funções quadráticas de Lyapunov, assim como será definida a classe de perturbações

considerada neste trabalho. Na Seção 3, serão apresentadas as condições LMIs para a solução do problema de análise e, na Seção 4, será proposta a síntese de uma lei de controle por realimentação de estados. Na Seção 5, serão considerados alguns exemplos para utilização dos resultados propostos, via a síntese de uma realimentação de estados para sistemas lineares sujeitos a não-linearidades na entrada de controle. Estas não-linearidades são consideradas pertencentes a uma faixa de operação, e o problema de controle não-linear é, então, reformulado e tratado como um sistema sujeito a uma perturbação limitada. Por fim, as conclusões sobre o trabalho serão apresentadas.

2 Apresentação do Problema e Preliminares

Considere o sistema linear, em tempo discreto, invariante no tempo e sujeito a perturbações

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k, \quad (1)$$

em que: $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^m$ são os vetores de estados e de entradas de controle, respectivamente, com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$; $w_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de perturbações o qual, por hipótese, pertence a um conjunto compacto $\mathcal{W}$ que contém a origem,

$$w_k \in \mathcal{W}, \quad \forall \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Considerando $u_k = 0$ em (1), e caso este sistema não esteja sujeito a perturbações, uma condição necessária e suficiente para a estabilidade assintótica do sistema autônomo $x_{k+1} = Ax_k$, é que exista uma função de Lyapunov quadrática nos estados do sistema $V(x_k) = x_k' P x_k$, com $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz definida positiva, tal que sua variação seja negativa, isto é: $\Delta V(x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0 \quad \forall \quad x \neq 0$, ou, equivalentemente, que as LMIs a seguir sejam verificadas (Boyd et al., 1994):

$$P \succ 0; \quad A'PA - P \prec 0. \quad (3)$$

Na presença de perturbações w_k limitadas, como em (2), e com $u_k = 0$, não é possível aplicar diretamente os resultados de estabilidade quadrática pois, em geral, a origem não será um ponto de equilíbrio do sistema

$$x_{k+1} = Ax_k + w_k. \quad (4)$$

Consequentemente, não é possível garantir $\Delta V(x_k, \omega_k) < 0$ em uma região em torno da origem. Neste caso, então, o interesse não é verificar a estabilidade assintótica para a origem, mas sim a convergência das trajetórias do sistema (4), em tempo finito, para algum conjunto positivamente invariante $\mathcal{V}_0 \subset \mathbb{R}^n$ que contenha a origem. Assim, consideram-se os seguintes problemas.

Problema 1 - Análise: Considere o sistema (4). Determinar um conjunto $\mathcal{V}_0 \subset \mathbb{R}^n$ tal que para qualquer condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, e para todos os vetores de perturbação que verificam (2), as trajetórias correspondentes x_k atinjam $\mathcal{V}_0$ num tempo finito L , $0 \leq L < \infty$, e permaneçam em $\mathcal{V}_0 \quad \forall \quad k \geq L$.

Um objetivo adicional ao problema acima é que $\mathcal{V}_0$ seja o menor possível, em algum sentido, para poder ser considerado como uma boa aproximação da menor região em torno da origem onde não é possível garantir $\Delta V(x_k, \omega_k) < 0$.

Na definição do problema complementar de síntese a seguir, considera-se uma lei de controle por realimentação de estados

$$u_k = Kx_k, \quad K \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad (5)$$

que aplicada a (1), leva ao sistema em malha fechada sujeito à perturbação¹:

$$x_{k+1} = A_f x_k + w_k. \quad (6)$$

Problema 2 - Síntese de Realimentação de Estados: Determinar uma matriz de realimentação de estados K e um conjunto $\mathcal{V}_0 \subset \mathbb{R}^n$, o menor possível, tais que para qualquer condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e para todos os vetores de perturbação que verificam (2), as trajetórias correspondentes x_k do sistema em malha-fechada (6) atinjam $\mathcal{V}_0$ num tempo finito L , $0 \leq L < \infty$, e permaneçam em $\mathcal{V}_0 \quad \forall \quad k \geq L$.

2.1 Resultado Preliminar

Utilizando-se técnicas de Lyapunov e alguns conceitos usuais em teoria de controle (veja, por exemplo Khalil (2002)), pode-se estabelecer o lema seguinte, fundamental para a proposição de soluções baseadas em LMIs para os problemas de análise e síntese colocados anteriormente. Uma demonstração para este resultado é apresentada no Apêndice ².

Lema 1 : Considere o sistema (4) sujeito à condição (2). Assuma que $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é tal que $P = P'$ e $P \succ 0$. Defina $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por $V(x) = x' P x$, e considere os conjuntos complementares

$$\mathcal{N}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n / V(x) > c\},$$

$$\mathcal{V}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n / V(x) \leq c\}.$$

Suponha que

$$\Delta V(x, \omega) < 0, \quad \forall (x, \omega) \in \mathcal{N}_0 \times \mathcal{W}, \quad (7)$$

$$\Delta V(x, \omega) + V(x) \leq c, \quad \forall (x, \omega) \in \mathcal{V}_0 \times \mathcal{W}, \quad (8)$$

¹Note que A_f é a matriz em malha fechada $A + BK$.

²Na sequência, será omitida a dependência em relação ao tempo discreto k dos vetores de estado, de controle e de perturbação, para simplificar a apresentação.

onde:

$$\Delta V(x, w) = x'(A'PA - P)x + x'A'Pw + w'PAx + w'Pw. \quad (9)$$

Então, $\mathcal{V}_0$   um conjunto positivamente invariante. Além disso, para qualquer trajetória de (4), com condi o inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe $L = L(x_0) \geq 0$ finito tal que $x_k \in \mathcal{V}_0$, $\forall k \geq L$.

Logo, toda trajetória x atinge $\mathcal{V}_0$ em tempo finito e nele permanece, ou seja, $\mathcal{V}_0$   um conjunto atrator do sistema (4), relativo   condi o (2).

Na seq ncia, considera-se que $\mathcal{W}$   um conjunto politópico, representado da seguinte forma:

$$\mathcal{W} = \left\{ w \in \mathbb{R}^n : w = \sum_{j=1}^N \alpha_j w_j, \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0 \right\}, \quad (10)$$

em que $w_j = w_1, \dots, w_N \in \mathbb{R}^n$ são os v rtices do politopo.

3 Análise de Convergência de Trajetórias

A partir do Lema 1 e utilizando a descri o polit pica (10), chega-se ao resultado de análise seguinte, o qual soluciona o Problema 1.

Teorema 1 *As trajetórias do sistema (4) sujeito   condi o (2) convergem em tempo finito a um atrator positivamente invariante $\mathcal{V}_0$ que cont m a origem se existir uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e escalares $c > 0$ e $\nu \in (0, 1)$, tais que*

$$\begin{bmatrix} -(1-\nu)P & \mathbf{0} & A'P \\ \mathbf{0} & -\nu c & w_i'P \\ PA & Pw_i & -P \end{bmatrix} \prec 0, \quad (11)$$

sejam verificadas $\forall i = 1, \dots, N$. Sendo $\mathcal{V}_0$ dado por:

$$\mathcal{V}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n / x'Px \leq c\}. \quad (12)$$

Prova: A partir do Lema 1, deseja-se $\Delta V(x, w) < 0 \quad \forall x \notin \mathcal{V}_0$ (equivalentemente, $\forall x \in \mathcal{N}_0$) e $\forall w \in \mathcal{W}$. Assim, a partir da utiliza o do *S-Procedure* (Boyd et al., 1994) em rela o a $\mathcal{N}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n / x'Px > c\}$, obt m-se

$$\begin{aligned} \Delta V(x, w) - \nu(c - x'Px) &= \\ x'(A'PA - (1-\nu)P)x + x'A'Pw &+ \\ + w'PAx + w'Pw - \nu c &< 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Portanto, se existe $\nu > 0$ que verifica a desigualdade (13), então a desigualdade (7) também será verificada. Note que, ao definir $\gamma = 1 - \nu$, também se verifica a desigualdade (8), pois obt m-se $\Delta V(x, w) - \gamma(x'Px - c) - c + x'Px < 0$ que, por defini o, pode ser reescrita como:

$$\Delta V(x, w) + V(x) - \gamma(x'Px - c) \leq c. \quad (14)$$

Observe que a desigualdade (14)   equivalente a condi o (8) do Lema 1. Na seq ncia, observa-se que a desigualdade (13) pode ser reescrita como:

$$\xi' \begin{bmatrix} A'PA - (1-\nu)P & A'Pw \\ \star & w'Pw - \nu c \end{bmatrix} \xi \prec 0,$$

onde $\xi = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$. Sabe-se que $P \succ 0$, então:

$$\begin{bmatrix} A'PA - (1-\nu)P & A'Pw & \mathbf{0} \\ \star & w'Pw - \nu c & \mathbf{0} \\ \star & \star & -P \end{bmatrix} \prec 0.$$

Aplicando o *Complemento de Schur* (Boyd et al., 1994), de forma a pr -multiplicar a desigualdade acima por

$$J = \begin{bmatrix} I & 0 & -A' \\ 0 & I & -w' \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

e p s multiplicá-la por J' , tem-se:

$$\begin{bmatrix} -(1-\nu)P & \mathbf{0} & A'P \\ \mathbf{0} & -\nu c & w'P \\ PA & Pw & -P \end{bmatrix} \prec 0, \forall w \in \mathcal{W}. \quad (15)$$

Portanto, devido   (10) e   convexidade, (15)   verificada se e somente se (11)   verificada $\forall i = 1, \dots, N$. $\square$

Considerando-se que P, ν, c são as variáveis de busca, observa-se em (11) a presença de termos não lineares devido aos produtos νP e νc . Entretanto, se fixarmos $\nu \in (0, 1)$, então (11) torna-se uma LMI com rela o as variáveis P e c .

Por outro lado, um objetivo complementar na utiliza o de (11)   determinar o menor conjunto elipsoidal $\mathcal{V}_0$ possível, como apresentado na seq ncia. Para tanto, considere os escalares positivos α_i , com $i = 1, \dots, N$, que representam os módulos dos semi-eixos do conjunto elipsoidal: $\alpha_i = \sqrt{\frac{c}{\lambda_i(P)}}$, em que $\lambda_i(P)$ são os autovalores da matriz P . O maior semi-eixo, denotado $\alpha_{max} = \max\{\alpha_i\}$,   dado por:

$$\alpha_{max} = \sqrt{\frac{c}{\lambda_{min}(P)}}, \quad (16)$$

onde $\lambda_{min}(P)$   o menor autovalor da matriz P . Então, a partir da rela o (16) e considerando-se a desigualdade

$$P \succeq \sigma I, \quad \text{com } \sigma > 0, \quad (17)$$

onde σ   um escalar e $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz identidade, propõe-se o problema de programac o semi-definida (SPD) seguinte para determinar o menor conjunto elipsoidal.

$$\text{Dado } p > 0, \left\{ \begin{array}{ll} \min_{P, c, \sigma} & (c - p\sigma) \\ \text{sujeito a} & (11) \text{ e } (17), \end{array} \right. \quad (18)$$

onde p é escolhido com o objetivo de ponderar a maximização de σ .

Note que no problema de otimização acima, o parâmetro ν pode ser obtido através de uma busca unidirecional e, para cada valor fixo de ν , (18) é um SDP. Entretanto, a busca do parâmetro ν fica limitada à faixa valores $0 < \nu < 1$, devido a (11). Observe que, se o SPD (18) tem solução, a relação (16) é indiretamente otimizada, pois o critério objetivo a minimização de c e a maximização de $\lambda_{min}(P)$ através da desigualdade (11).

O resultado desenvolvido no Teorema 1 pode ser adaptado para encontrar uma realimentação de estados que solucione o Problema 2, como mostrado na seção seguinte.

4 Síntese do Controlador

Para solução do Problema 2, objetiva-se encontrar uma matriz de realimentação de estados K e um conjunto $\mathcal{V}_0 \subset \mathbb{R}^n$ o menor possível, tais que para qualquer condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e qualquer perturbação $w \in \mathcal{W}$, a trajetória correspondente do sistema em malha fechada atinja $\mathcal{V}_0$ em tempo finito. Para isso, considere inicialmente o teorema seguinte.

Teorema 2 Considere a existência de $\nu \in (0, 1)$, uma matriz definida positiva $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e um escalar $c > 0$, verifiquem

$$\begin{bmatrix} -R(1-\nu) & \mathbf{0} & RA' + Y'B' \\ \mathbf{0} & -\nu c & w_i' \\ AR + BY & w_i & -R \end{bmatrix} \prec 0, \quad (19)$$

em que $i = 1, \dots, N$. Para o sistema (1), considere a matriz de realimentação de estados em (5), definida por

$$K = YR^{-1}. \quad (20)$$

Então, K e $\mathcal{V}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n / x'R^{-1}x \leq c\}$ definem uma solução para o Problema 2 de síntese de realimentação de estados.

Prova: Utilizando (5), substitui-se A por $(A + BK)$ em (11), obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} -(1-\nu)P & \mathbf{0} & (A+BK)'P \\ \mathbf{0} & -\nu c & w_i'P \\ P(A+BK) & Pw_i & -P \end{bmatrix} \prec 0.$$

Considerando $R = P^{-1}$, pré e pós multiplicando a desigualdade acima por

$$\begin{bmatrix} R & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & R \end{bmatrix},$$

e utilizando a transformação de variáveis $Y = KR$ dada em (20), obtém-se a desigualdade (19). $\square$

Semelhante ao objetivo da solução do Problema 1, deseja-se determinar o menor conjunto $\mathcal{V}_0$ possível. Para isso, considere

$$\lambda_{min}(P) = 1/\lambda_{max}(R), \quad (21)$$

em que $\lambda_{max}(R)$ é o maior autovalor da matriz R . A partir da relação (16) e da desigualdade

$$R \preceq \delta I, \quad \text{com } \delta > 0, \quad (22)$$

onde δ é um escalar, propõe-se o SPD seguinte:

$$\text{Dado } p > 0, \quad \begin{cases} \min_{R,c,\delta} & (c + p\delta) \\ \text{sujeito a} & (19) \text{ e } (22). \end{cases} \quad (23)$$

Nota-se que, neste caso, p pode ser escolhido com o objetivo de ponderar a minimização de δ . A medida que p diminui, o conjunto $\mathcal{V}_0$ tende a diminuir em algum sentido, enquanto $c \geq p\delta$. Conforme o SPD (18), também se realiza uma busca unidirecional para valores fixos de ν , a fim de se determinar o menor conjunto elipsoidal possível. Portanto, se o SPD (23) tem solução, a relação (16) também será indiretamente otimizada, pois o critério tem por objetivo a minimização de c e $\lambda_{max}(R)$, utilizando as desigualdades (19) e (22), o que leva a maximização de $\lambda_{min}(P)$, por meio de (21).

5 Exemplos de aplicação

Seja o sistema a seguir sujeito a uma não-linearidade na entrada de controle:

$$x_{k+1} = Ax_k + B\Phi(u_k), \quad (24)$$

onde, por hipótese, a não-linearidade $\Phi(u)$ está contida na faixa

$$(u - \rho) \leq \Phi(u) \leq (u + \rho), \quad (25)$$

representada pela Figura 1. A não-linearidade $\Phi(u)$ pode ser considerada, por exemplo, como: zona morta, zona morta com pré-carga, folga ou mesmo um quantizador (Khalil, 2002).

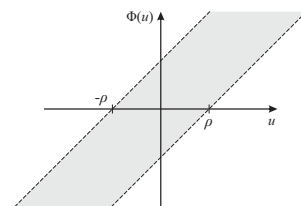


Figura 1: Faixa que contem a dinâmica de $\Phi(u)$.

Pode-se tratar o sistema (24) sob a forma de (1) fazendo $\Phi(u) = u - \Psi(u)$, em que $\Psi(u)$ é uma não-linearidade limitada, contida na faixa $-\rho \leq \Psi(u) \leq \rho$. Assim,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B\Phi(u_k) \\ &= Ax_k + Bu_k - B\Psi(u_k) \\ &= Ax_k + Bu_k + w_k, \end{aligned}$$

onde $w \in \mathcal{W} = \{w \in \mathbb{R}^2 / w \in [-\rho B, \rho B]\}$. Portanto, necessita-se apenas do valor de ρ para aplicação do resultado do Teorema 2, visto que ele define os vértices do conjunto politópico $\mathcal{W}$. Assim, considere para o sistema (24)

$$A = \begin{bmatrix} 1.0460 & -0.1050 \\ 0.1050 & 1.0460 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.0460 \\ 0.1050 \end{bmatrix},$$

e a não-linearidade $\Phi(u)$ uma zona morta, como mostrado na Figura 2 (a), com $\rho = 0.4$, onde:

$$\Phi_{DZ}(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } |u| < \rho, \\ u, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, o conjunto de perturbações, no qual $w \in \mathcal{W}$, é definido pelo seguinte conjunto politópico:

$$\mathcal{W} = C_o \left\{ \begin{bmatrix} -0.0184 \\ -0.0420 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.0184 \\ 0.0420 \end{bmatrix} \right\}.$$

Observe que os autovalores da matriz A são $\lambda(A) = 1.0460 \pm j0.1050$ e, portanto, o sistema não pode ser levado à origem a partir de qualquer estado inicial x_0 . Note também que $\Phi_{DZ}(u) = u - \text{sat}(u)$, onde $\text{sat}(u)$ é a não-linearidade saturação de u , da forma mostrada na Figura 2 (b).

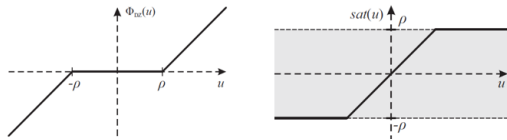


Figura 2: a) Zona Morta, b) Saturação.

Observe que a saturação está contida dentro da faixa $-\rho \leq \text{sat}(u) \leq \rho$, tornando possível a aplicação do resultado proposto no Teorema 2. Assim, utilizando o algoritmo SPD (23), a partir de valores pré-fixados de p e da busca unidirecional em ν , obtém-se $c = 0.0411$, $\delta = 0.4759$ e

$$R = \begin{bmatrix} 0.1470 & 0.2091 \\ 0.2091 & 0.3431 \end{bmatrix},$$

para $\nu = 0.22$ e $p = 0.1$, encontrando-se, a realimentação de estados $K = [18.7939 \ -21.1226]$, que leva qualquer estado inicial x_0 ao conjunto positivamente invariante $\mathcal{V}_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 / x'R^{-1}x \leq c\}$.

Na Figura 3 são mostrados os conjuntos $\mathcal{V}_0$ para resolução dos Problemas 1 e 2 (azul e vermelho, respectivamente), assim como a trajetória dos estados do sistema em malha fechada partindo de diferentes condições iniciais $x_0 = [-0.1 \ 0.1]'$, $[0.15 \ 0.1]'$. Nota-se, nesta simulação, a convergência dos estados do sistema para um ciclo-limite, devido a presença da zona morta e do par de pólos complexos conjugados instáveis associados a matriz A do sistema.

Como mencionado anteriormente, os conceitos apresentados são válidos para uma classe de

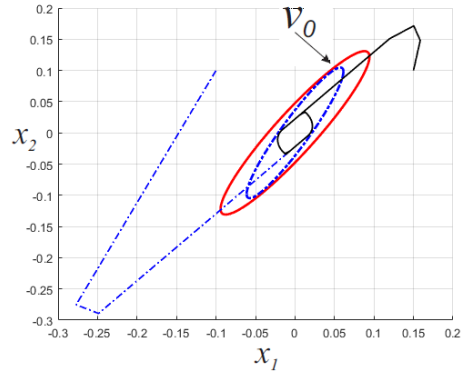


Figura 3: Trajetórias de x para $\Phi_{DZ}(u)$ e $\mathcal{V}_0$.

não-linearidades contidas na faixa (25). Desta forma, foram impostas outras não-linearidades ao sistema, utilizando a mesma matriz de ganhos K , além da zona morta, como a folga ($\Phi_{BL}(u)$) e a zona morta com pré-carga ($\Phi_{DZPL}(u)$), mostradas na Figura 4.

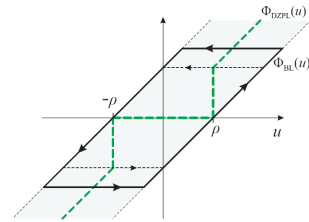


Figura 4: Não-linearidades.

Assim, na Figura 5 são mostrados os conjuntos $\mathcal{V}_0$ (semelhantes aos da Figura 4) e a trajetória dos estados do sistema em malha fechada para duas não-linearidades distintas, a folga (preto) e a zona morta com pré-carga (vermelho), partindo das condições iniciais $x_0 = [0.15 \ 0.1]'$, $[-0.15 \ -0.1]'$.

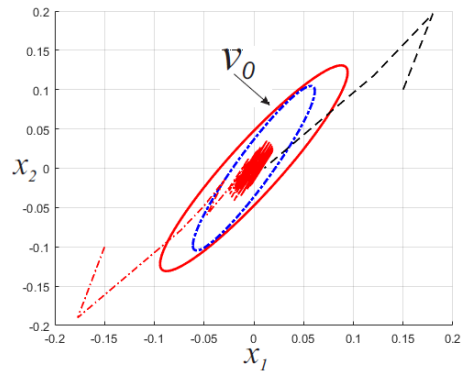


Figura 5: Trajetórias de x para $\Phi_{BL}(u)$ e $\Phi_{DZPL}(u)$, e $\mathcal{V}_0$.

6 Conclusão

Neste trabalho foram apresentadas algumas ferramentas, baseadas em LMIs, que tratam o problema de controle envolvendo sistemas lineares discretos e invariantes no tempo, sujeitos a perturbações aditivas limitadas, representadas através de um conjunto politópico compacto. Dessa forma, apresentou-se uma extensão dos resultados apresentados em Pomar et al. (2012) para o caso de sistemas contínuos no tempo.

A simplicidade e a versatilidade das condições LMIs desenvolvidas são de fácil adequação à solução de problemas de controle que podem ser modelados sob a forma de um sistema sujeito a uma perturbação aditiva, como em Dilda and Castelan (2013), onde foram exploradas soluções para sistemas de controle sujeitos a não-linearidades do tipo zona-morta, a partir das condições LMIs apresentadas. Outras não linearidades, contidas numa faixa de operação, também podem ser consideradas, como mostrado na Seção 5.

Por outro lado, os conceitos aqui apresentados podem também ser estendidos para tratar, por exemplo, o caso de sistemas não-lineares representados via modelos do tipo Takagi-Sugeno, como tratado em Klug (2015), assim como podem ser utilizados para a análise e projeto de controladores para sistemas com atrasos na entrada de controle (Santos et al., 2012; Milhomem, 2013).

Apêndice

Prova: do Lema 1: Como $V(x_{k+1}) = \Delta V(x_k) + V(x_k)$, é evidente que a condição (8) implica que $\mathcal{V}_0$ é um conjunto positivamente invariante. Assuma que (7) é válida e seja $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a trajetória de (4) sujeito à condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Existem apenas duas possibilidades: ou (i) $x_0 \in \mathcal{V}_0$, ou (ii) $x_0 \notin \mathcal{V}_0$. Se (i) ocorre, então $x_k \in \mathcal{V}_0$ para cada $k \geq 0$, pois $\mathcal{V}_0$ é positivamente invariante. Considere então que (ii) é verdade e que $x_k \notin \mathcal{V}_0$ para todo $k \geq 0$. Assim, $x_k \in \mathcal{N}_0$ e $\Delta V(x_k, \omega_k) < 0$ para $k \geq 0$. Desta maneira, $c < V(x_k) < V(x_0)$ para $k \geq 0$. No entanto, $V(x)$ é contínua, $\lambda_{\min}(P) > 0$ e $\lambda_{\min}(P)\|x\|^2 \leq V(x)$, para $x \in \mathbb{R}^n$. Logo, o conjunto

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^n / c \leq V(x) \leq V(x_0)\} \subset \mathcal{N}_0$$

é compacto (fechado e limitado) e $x_k \in \mathcal{K}$ para todo $k \geq 0$. Como $\mathcal{W}$ é compacto e $\Delta V(x, \omega)$ é contínua em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, temos que $\Delta V(\mathcal{K} \times \mathcal{W}) \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto. De (7), $\Delta V(x, \omega) < 0$ para todo $(x, \omega) \in \mathcal{K} \times \mathcal{W}$. Concluimos então que existe $\beta < 0$ tal que $\Delta V(x, \omega) < \beta < 0$, para todo $(x, \omega) \in \mathcal{K} \times \mathcal{W}$. Portanto, para cada $k \geq 0$,

$$V(x_k) - V(x_0) = \sum_{j=0}^k \Delta V(x_j, \omega_j) < \beta k.$$

Consequentemente, para k grande o suficiente, teremos $V(x_k) < 0$, que é uma contradição. $\square$

Referências

- Abedor, J., Nagpal, K. and Poolla, K. (1996). A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization, *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control* **6**(9-10).
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, PA: SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia.
- Dilda, V. and Castelan, E. B. (2013). An approach for tracking analysis for linear systems with dead-zone nonlinearity applied to a hydraulic actuator, *SBMAC*.
- Dilda, V., Reginatto, R. and Castelan, E. (2012). Análise e síntese *ultimate boundedness* para sistemas com zona morta no atuador, *CBA*.
- Hao, F., Chu, T., Wang, L. and Huang, L. (2003). Robust peak gain problem for uncertain systems via lmi approach, *ACC*, pp. 845–850.
- Ji, X.-F., Su, H.-Y. and Chu, J. (2007). Peak-to-peak gain minimization for uncertain linear discrete systems: A matrix inequality approach, *Acta Automatica Sinica* **33**(7): 753–756.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*, 3 edn, Prentice Hall, New Jersey.
- Klug, M. (2015). *Control of Nonlinear Systems Using N-Fuzzy Models*, PhD thesis, UFSC.
- Milhomem, R. L. (2013). *Análise e síntese de sistemas sujeitos a uma classe de perturbações limitadas e aplicações*, Master's thesis, UFSC.
- Pomar, M. J., Silveira, H. B. and Castelan, E. B. (2012). Condições lmis para análise e síntese de sistemas lineares sujeitos a uma classe de perturbações limitadas, *CBA*.
- Santos, T. L., Limon, D., Normey-Rico, J. E. and Alamo, T. (2012). On the explicit dead-time compensation for robust model predictive control, *Journal of Process Control* **22**(1).
- Tarbouriech, S., Queinnec, I., Alamo, T., Fiacchini, M. and Camacho, E. (2011). Ultimate bounded stability and stabilization of linear systems interconnected with generalized saturated functions, *Automatica*.
- Turner, M. (2006). Actuator deadzone compensation: theoretical verification of an intuitive control strategy, *Control Theory and Applications*.