

PROJETO DE CONTROLE ROBUSTO PARA SISTEMAS COM SENSORES QUE APRESENTAM FALHAS VARIANTES NO TEMPO

ARIEL STARKE BUZETTI*, MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA*, DIOGO RAMALHO DE OLIVEIRA*, ADALBERTO ZANATTA NEDER LAZARINI*, EDVALDO ASSUNÇÃO*, RODRIGO CARDIM*

*UNESP - Univ Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira
Departamento de Engenharia Elétrica, Lab. de Pesquisa em Controle
Av. José Carlos Rossi, 1370, 15385-000, Ilha Solteira, S o Paulo, Brasil

Emails: arielsb@hotmail.com, marcelo@dee.feis.unesp.br, diogo_oliveira6@hotmail.com, adalberto.lazarini@yahoo.com, edvaldo@dee.feis.unesp.br, rcardim@dee.feis.unesp.br

Abstract— This paper presents a method to ensure the stability for a linear system with sensor failure. It is considered that the sensor failure varies with time and it is mathematically represented by polytopic uncertainties in the measured state vector, called $x_M(t)$. Based on a quadratic Lyapunov function, the design conditions are presented through linear matrix inequalities. The sensor measurement failure is a recurring problem in real applications, for this reason a practical implementation was performed in a 2D ball balancer system to prove the efficacy of the proposed method.

Keywords— Sensor Fault; Reliable Control; Robust Control; Linear Matrix Inequalities (LMIs).

Resumo— Este trabalho apresenta um método para garantir a estabilidade de um sistema linear com falha no sensor. Considera-se que a falha no sensor varia com o tempo e ela é matematicamente representada por incertezas polit picas no vetor de estado medido, chamado $x_M(t)$. Baseadas em uma função quadrática de Lyapunov, as condições de projeto são apresentadas através de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* -LMIs). A falha de medição no sensor é um problema recorrente em aplicações reais, por esse motivo foi realizada uma implementação prática em um sistema *2D ball balancer* para comprovar a eficácia do método proposto.

Palavras-chave— Falha do Sensor; Controle Confiável; Controle Robusto; Desigualdades Matriciais Lineares(LMIs).

1 Introdução

Controle tolerante a falhas é uma área importante de pesquisa relacionada ao projeto de controle com realimentação, pois tem o propósito de garantir segurança e confiabilidade ao sistema realimentado, apesar da ocorrência de falhas. Um sistema de controle consiste em sensores, compensadores e atuadores, além de um objeto controlado. Em geral, os sensores são propensos a apresentar falhas mais frequentemente do que atuadores ou compensadores (Yang and Ye, 2008). As características dos sensores podem mudar ao longo do tempo de modo que possa haver uma falha parcial ou total (Liu et al., 2013), o que pode degradar o desempenho ou até mesmo destruir a estabilidade dos sistemas controlados.

Portanto,   necessário considerar as possíveis falhas nos sensores e/ou atuadores para aumentar a confiabilidade do sistema. Um sistema de controle projetado para tolerar falhas de atuadores ou sensores, dentro de um subconjunto pré-especificado de todos os atuadores ou sensores, mantendo as propriedades do sistema de controle desejadas, será chamado de sistema de controle confiável (Veillette et al., 1992; Mingqing, 2009).

Em diversos trabalhos foram desenvolvidas técnicas de controle confiável, modelando as incertezas dos sensores como funções incertas parametrizáveis (Yang et al., 2000; Yang et al., 2001; Mingqing, 2009; Wang et al., 2011; Dong and Yang, 2015), ou como uma entrada exógena, mini-

mizada por norma $\mathcal{H}_\infty$ (Yang and Ye, 2008; Bouattour et al., 2009). Há também métodos que garantem a confiabilidade do sistema utilizando um sensor auxiliar para verificar se há falha no sensor principal e compensando essa falha utilizando técnicas fuzzy (Oudghiri et al., 2007; Qiu et al., 2010).

Em (Buzetti et al., 2015) foi proposta uma representação em espaço de estados do sistema linear, que descreve a dinâmica do vetor de estado medido, denominado $x_M(t)$. Considerou-se que os sensores apresentam erros de medição incertos, mas invariantes no tempo.

Ao contrário de (Buzetti et al., 2015), esse trabalho apresenta condições que garantem a estabilidade do sistema linear com sensores que apresentam falhas variantes no tempo. As condições de estabilidade são encontradas em função de $x_M(t)$ e da derivada do vetor de estado ($\dot{x}(t)$), sendo necessário conhecer somente os valores máximos e mínimos da variação do erro de medição. As condições de projeto são descritas através de desigualdades matriciais lineares (LMIs).

O trabalho ainda apresenta uma aplicação em bancada, do controle de um sistema *2D ball balancer* (Quanser, 2008), considerando falha na leitura do ângulo $\theta(t)$, e conseqüentemente na estimação de $\dot{\theta}(t)$, para demonstrar a eficácia do método. Utilizou-se o *software* MatLab/Simulink  para a aplicação da lei de controle durante a implementação prática e a linguagem do YALMIP, com o solver LMILab, para resolver as LMIs.

Ao longo desse trabalho foram utilizadas as seguintes not  es: $(\cdot)^T$ indica a transposição de um vetor ou matriz. O símbolo $(*)$ denota genericamente cada bloco simétrico de uma LMI. O conjunto $\mathbb{K}_r$ é composto pelos r primeiros números inteiros positivos, $\{1, 2, \dots, r\}$. Para facilitar a leitura deste artigo, considere que os elementos incertos e variantes no tempo $\rho(t)$ e $\alpha(t)$ são representados por ρ e α , e pertencem aos conjuntos

$$\Lambda_\rho = \left\{ \rho \in \mathbb{R}^r : \rho_j \geq 0, \sum_{j=1}^r \rho_j = 1 \right\}, \quad (1)$$

$$\Lambda_\alpha = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^r : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1 \right\}, \quad (2)$$

respectivamente, para $i, j \in \mathbb{K}_r$.

2 Definição do Problema

Considere o sistema linear descrito por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Suponha a possibilidade de existir uma falha na medição das variáveis de estado $x(t)$. Esta falha no sensor pode se manifestar como um efeito multiplicativo ou aditivo, que podem ocorrer simultaneamente ou não (Ackermann, 1984).

Esse trabalho aborda apenas o caso em que a falha do sensor se manifesta através do efeito multiplicativo, ou seja, o sinal de cada sensor possui um ganho $\gamma(t)$, que por simplicidade é representado por γ , sendo que $\gamma \in \mathbb{R}^n$. Esse ganho γ   variante no tempo e pertence ao conjunto

$$\Delta_1 = \{\gamma \in \mathbb{R}^n : 0 < \gamma_p(0) \leq \gamma_p \leq 1 \leq \gamma_p(1)\}, \quad (4)$$

para $p \in \mathbb{K}_n$, sendo que $\gamma_p(0)$ e $\gamma_p(1)$ representam, respectivamente, os valores mínimos e máximos dos ganhos dos sensores.

Note que, o vetor de estado $x(t)$ não está disponível para a realimentação. No entanto, tem-se acesso ao vetor de estado medido, denominado $x_M(t)$, sendo que $x_{p_M}(t) = \gamma_p x_p(t)$, $p \in \mathbb{K}_n$.

Dessa forma, a partir de (1), considere uma matriz diagonal que relaciona o vetor de estado $x(t)$ com o vetor de estado medido $x_M(t)$, dada por:

$$\Gamma_z = \sum_{j=1}^r \rho_j \Gamma_j = \sum_{j=1}^r \rho_j \text{diag}[\gamma_1(a_1) \dots \gamma_n(a_n)], \quad (5)$$

sendo $r = 2^n$, $(a_1, \dots, a_n) = \text{dec2bin}(j-1)$, $j \in \mathbb{K}_r$, $a_p \in \{0, 1\}$ e $p \in \mathbb{K}_n$, tal que

$$x_M(t) = \Gamma_z x(t). \quad (6)$$

A função dec2bin representa a mudança da base decimal para binária. A Tabela 1 exemplifica o uso da função dec2bin para $n = 2$. Note

que de (4), os valores máximos e mínimos dos parâmetros incertos γ_p , $p \in \mathbb{K}_n$, formam a diagonal da matriz Γ_j , $j \in \mathbb{K}_r$. Por sua vez a matriz Γ_j representa cada um dos v rtices do politopo, formados através de todas as combinação possíveis dos valores máximos e mínimos de γ_p , $p \in \mathbb{K}_n$.

Tabela 1: Exemplo da Função dec2bin: $(a_1, a_2) = \text{dec2bin}(j-1)$.

j	$j-1$	dec2bin($j-1$)	a_1	a_2	$\gamma_1(a_1)$	$\gamma_2(a_2)$
1	0	00	0	0	min	min
2	1	01	0	1	min	max
3	2	10	1	0	max	min
4	3	11	1	1	max	max

Para o restante do desenvolvimento do trabalho,   necessário fazer uma última definição. A partir de (2), considere a seguinte matriz diagonal

$$\Gamma_z^{-1} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \Gamma_i^{-1} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \text{diag}[\gamma_1^{-1}(b_1) \dots \gamma_n^{-1}(b_n)], \quad (7)$$

sendo $r = 2^n$, $(b_1, \dots, b_n) = \text{dec2bin}(i-1)$, $i \in \mathbb{K}_r$, $b_p \in \{0, 1\}$ e $p \in \mathbb{K}_n$. A partir de (4), note que γ^{-1} pertence ao conjunto

$$\Delta_2 = \{\gamma^{-1} \in \mathbb{R}^n : 0 < \gamma_p(1)^{-1} \leq \gamma_p^{-1} \leq 1 \leq \gamma_p(0)^{-1}\}.$$

Observação 1 No modelo de falha de sensores considerado, quando $\gamma_p(0) = \gamma_p(1) = 1$, para todo $p \in \mathbb{K}_n$, então $x_M(t) = x(t)$ o que corresponde ao caso normal, sem possibilidade de falhas. Quando $\gamma_p(0) < \gamma_p(1)$, pode-se ter uma falha parcial no sensor que mede a variável de estado $x_p(t)$, t m  considerado como a degradação do sensor (Yang et al., 2000).

2.1 Projeto de Controle

A lei de controle utilizada é dada por:

$$u(t) = -Kx_M(t). \quad (8)$$

Logo, o sistema (3) pode ser reescrito como

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BKx_M(t). \quad (9)$$

Observe que o sistema dado em (9) representa $\dot{x}(t)$ em função de $x(t)$ e $x_M(t)$.

O projeto de controle proposto tem o objetivo de assegurar a estabilidade do sistema controlado (9) e t m  garantir uma taxa de decaimento mínima. Então, considere a candidata a função de Lyapunov dada por

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t) > 0. \quad (10)$$

Dada uma constante real $\beta > 0$, pode-se impor uma restrição para uma taxa de decaimento maior ou igual a β se a condição

$$\dot{V}(x(t)) \leq -2\beta V(x(t)), \quad (11)$$

for satisfeita para toda a trajetória $x(t)$ do sistema (Boyd et al., 1994). O principal resultado desse artigo é o Teorema 1 apresentado a seguir.

Teorema 1 *Defina as matrizes diagonais $G_i = \Gamma_i^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$, e considere um escalar $\beta > 0$ dado. Suponha a existência de uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, de uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e de uma matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tais que:*

$$\begin{bmatrix} AG_i Y^T - BM + Y G_i A^T - M^T B^T \\ G_i Y^T + AG_i Y^T - BM - X \\ G_i Y^T \\ * & * \\ -2X & * \\ 0 & -\frac{X}{2\beta} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (12a)$$

$$Y + Y^T > 0. \quad (12b)$$

Então a lei de controle (8) torna o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema (9) globalmente assintoticamente estável, com uma taxa de decaimento maior ou igual β , sendo $P = X^{-1}$ e o ganho do controlador dado por $K = MY^{-T}$.

Prova: A partir de (2), lembrando que $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ e $\alpha_i \geq 0$, $i \in \mathbb{K}_r$, defina $G_i = \Gamma_i^{-1}$. Multiplicando (12a) por α_i e realizando o somatório de $i = 1$ até $i = r$, tem-se que, lembrando-se da defini o de Γ_z^{-1} em (7):

$$\begin{bmatrix} A\Gamma_z^{-1}Y^T - BM + Y\Gamma_z^{-1}A^T - M^TB^T \\ \Gamma_z^{-1}Y^T + A\Gamma_z^{-1}Y^T - BM - X \\ \Gamma_z^{-1}Y^T \\ * & * \\ -2X & * \\ 0 & -\frac{X}{2\beta} \end{bmatrix} \prec 0. \quad (13)$$

Aplicando o complemento de Schur em (13), com $X = P^{-1}$, obtém-se a seguinte desigualdade

$$\begin{bmatrix} A\Gamma_z^{-1}Y^T - BM + Y\Gamma_z^{-1}A^T - M^TB^T & * \\ \Gamma_z^{-1}Y^T + A\Gamma_z^{-1}Y^T - BM - X & -2X \\ -\begin{bmatrix} Y\Gamma_z^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} & (-2\beta P) \begin{bmatrix} \Gamma_z^{-1}Y^T & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (14)$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} \psi_{11} & * \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (15)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \psi_{11} &= 2\beta Y\Gamma_z^{-1}P\Gamma_z^{-1}Y^T + A\Gamma_z^{-1}Y^T - BM \\ &\quad + Y\Gamma_z^{-1}A^T - M^TB^T, \\ \psi_{21} &= \Gamma_z^{-1}Y^T + A\Gamma_z^{-1}Y^T - BM - X, \\ \psi_{22} &= -2X. \end{aligned} \quad (16)$$

Observe que, como de (12b) $Y + Y^T > 0$, então $\det(Y) \neq 0$ e assim pode-se definir $Z_1 = Y^{-1}$ e $M = KZ_1^{-T}$. Logo, tem-se que

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & * \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (17)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= 2\beta Z_1^{-1}\Gamma_z^{-1}P\Gamma_z^{-1}Z_1^{-T} + A\Gamma_z^{-1}Z_1^{-T} \\ &\quad - BKZ_1^{-T} + Z_1^{-1}\Gamma_z^{-1}A^T - Z_1^{-1}K^TB^T, \\ \phi_{21} &= \Gamma_z^{-1}Z_1^{-T} - A\Gamma_z^{-1}Z_1^{-T} - BKZ_1^{-T} - X, \\ \phi_{22} &= -2X. \end{aligned} \quad (18)$$

Como X é uma matriz simétrica definida positiva, então $\det(X) \neq 0$. Assim, pode-se definir $Z_2 = X^{-1}$ e reescrever as desigualdades (17)-(18), tal que

$$\begin{bmatrix} \eta_{11} & * \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (19)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \eta_{11} &= 2\beta Z_1^{-1}\Gamma_z^{-1}P\Gamma_z^{-1}Z_1^{-T} + A\Gamma_z^{-1}Z_1^{-T} \\ &\quad - BKZ_1^{-T} + Z_1^{-1}\Gamma_z^{-1}A^T - Z_1^{-1}K^TB^T, \\ \eta_{21} &= Z_2^{-1}P\Gamma_z^{-1}Z_1^{-T} - A\Gamma_z^{-1}Z_1^{-T} \\ &\quad - BKZ_1^{-T} - Z_2^{-1}, \\ \eta_{22} &= -Z_2^{-T} - Z_2^{-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Pr  e p s-multiplicando (19) por $\begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{bmatrix}$ e

$\begin{bmatrix} Z_1^T & 0 \\ 0 & Z_2^T \end{bmatrix}$, respectivamente, obt m-se

$$\begin{bmatrix} \omega_{11} & * \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (21)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= 2\beta\Gamma_z^{-1}P\Gamma_z^{-1} + Z_1A\Gamma_z^{-1} - Z_1BK \\ &\quad + \Gamma_z^{-1}A^T Z_1^T - K^TB^T Z_1^T, \\ \omega_{21} &= P\Gamma_z^{-1} + Z_2A\Gamma_z^{-1} - Z_2BK - Z_1^T, \\ \omega_{22} &= -Z_2 - Z_2^T, \end{aligned} \quad (22)$$

Para $x \neq 0$, note que $x_M = \Gamma_z x \neq 0$, pois $\det(\Gamma_z) \neq 0$. Assim, observe que se $x \neq 0$ então $[x_M^T \ \dot{x}^T]^T \neq [0 \ 0]^T$ e portanto (21)   equivalente a

$$\begin{aligned} [x_M^T \ \dot{x}^T] &\left\{ \begin{bmatrix} 2\beta\Gamma_z^{-1}P\Gamma_z^{-1} & * \\ P\Gamma_z^{-1} & 0 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad + \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} [(A\Gamma_z^{-1} - BK) \ -I] \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} (A\Gamma_z^{-1} - BK)^T \\ -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1^T & Z_2^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_M \\ \dot{x} \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (23)$$

A partir de (6), observe que o sistema (9) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\Gamma_z^{-1}\Gamma_z x(t) - BKx_M(t) \\ \dot{x}(t) &= (A\Gamma_z^{-1} - BK)x_M(t) \\ 0 &= (A\Gamma_z^{-1} - BK)x_M(t) - \dot{x}(t). \end{aligned} \quad (24)$$

Como $(A\Gamma_z^{-1} - BK)x_M - \dot{x} = 0$ e $x_M^T(A\Gamma_z^{-1} - BK)^T - \dot{x}^T = 0$, ent o (23) equivale a

$$\begin{aligned} 2\beta x_M^T \Gamma_z^{-1} P \Gamma_z^{-1} x_M + \dot{x}^T P \Gamma_z^{-1} x_M + x_M^T \Gamma_z^{-1} P \dot{x} \\ = 2\beta x^T P x + \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ = \dot{V} + 2\beta x^T P x < 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Portanto,

$$\dot{V} = \dot{x}^T Px + x^T P \dot{x} < -2\beta x^T Px, \quad (26)$$

e assim a demonstração está concluída. $\square$

Observação 2 Note que o Teorema 1 não utiliza a derivada do vetor de estado medido, $x_M(t)$. Isso representa uma vantagem, pois a partir de (1), (4), (5) e (6), observe que $x_M(t)$ depende de parâmetros incertos variantes no tempo relacionados a Γ_z . Ou seja, o método proposto garante a estabilidade do sistema realimentado (9), com sensores que apresentam falhas variantes no tempo. Assim, as variações de tais falhas não interferem no projeto de controle.

3 O Sistema 2D ball balancer Quanser®

Considere o sistema 2D ball balancer, fabricado pela Quanser®, mostrado na Figura 1. Seu modelo esquemático referente à direção x da placa é mostrado na Figura 2, e a direção y pode ser representado da mesma forma (Quanser, 2008).

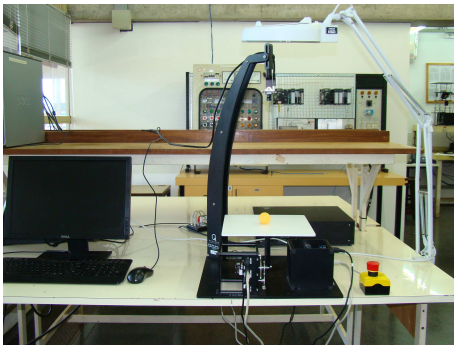


Figura 1: Equipamento 2D ball balancer.

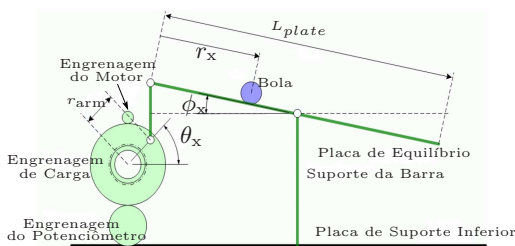


Figura 2: Planta esquemática do 2D ball balancer na direção x (Quanser, 2008).

O sistema consiste de uma placa quadrada sobre a qual uma bola é colocada e se move livremente. A bola pode ser posicionada em um ponto de referência fixo ou pode rastrear uma rota determinada. Uma câmera superior é utilizada para medir a posição da bola. Existem dois servomotores, sendo que cada um deles está ligado a um dos eixos da placa. Ao controlar a posição das

engrenagens de carga do servomotor, o ângulo de inclinação da placa pode ser ajustado para equilibrar a bola em uma posição plana desejada.

O modelo matemático linearizado do sistema 2D ball balancer (Quanser, 2008) é dado por:

$$\ddot{r}(t) = K_{bb}\theta(t), \quad \tau\ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) = KV_m(t), \quad (27)$$

sendo:

$r(t)$ a posição da bola, sendo $r(t) = r_x$ para o eixo x e $r(t) = r_y$ para o eixo y;

$\theta(t)$ o ângulo de carga, sendo $\theta(t) = \theta_x$ para o eixo x e $\theta(t) = \theta_y$ para o eixo y;

$V_m(t) = u(t)$ o sinal de controle;

τ e K são parâmetros do fabricante;

$$e K_{bb} = \frac{2m_b g r_{arm} r_b^2}{L_{plate}(m_b r_b^2 + J_b)}.$$

A descrição e os valores das constantes são dados na Tabela 2.

Tabela 2: Parâmetros do sistema 2D ball balancer.

Parâmetros	Símbolo	Valor
Massa da bola (kg)	m_b	0,003
Distância do eixo do motor ao ponto de fixação da barra (cm)	r_{arm}	2,54
Raio da bola (cm)	r_b	1,96
Comprimento da mesa (cm)	L_{plate}	27,5
Parâmetro do fabricante (rad/sV)	K	1,76
Parâmetro do fabricante (s)	τ	0,00285
Momento de inércia de uma esfera sólida (kgm ²)	J_b	0,0046
Parâmetro do sistema (m/s ² rad)	K_{bb}	1,3

O sistema (27) pode ser representado de forma similar ao sistema (3), sendo que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K}{\tau} \end{bmatrix}, x(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ \dot{r}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Durante a implementação prática apenas as variáveis de estado r_M (r_{xM} e r_{yM}) e θ_M (θ_{xM} e θ_{yM}) estão disponíveis, e $\dot{r}_M$ e $\dot{\theta}_M$ são estimadas por meio de filtros derivativos $G_f(s) = 20s/(s + 20)$, como sugerido pela fabricante (Quanser, 2008). Dessa forma, foi considerada uma falha de até -50% na leitura do ângulo medido, acarretando uma falha simultânea na derivada do ângulo. Já nas leituras das posições da bola (r_x e r_y) foi suposto que não ocorreram erros de leitura. Então, as variáveis de estado podem ser reescritas como: $x_{1M}(t) = x_1(t) = r(t)$; $x_{2M}(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = \dot{r}(t)$; $x_{3M}(t) = \gamma_3(t)x_3(t) = \gamma_3(t)\theta(t)$ e

$$x_{4M}(t) = \frac{dx_3(t)}{dt} = \frac{d(\gamma_3(t)x_3(t))}{dt} = \dot{\gamma}_3(t)\theta(t) + \gamma_3(t)\dot{\theta}(t). \quad (29)$$

Observação 3 No caso particular do sistema 2D ball balancer em que o controle foi implementado, observe que, a partir de (29), tem-se $\dot{\theta}_M(t) = x_{4M}(t) = \frac{dx_3(t)}{dt} = \dot{\gamma}_3(t)\theta(t) + \gamma_3(t)\dot{\theta}(t)$, pois a

variável de estado x_{4M} é obtida por meio de um filtro derivativo. Durante a implementação, $\gamma_3(t)$ é descrita como uma onda quadrada. A derivada de $\gamma_3(t)$ será diferente de zero apenas quando o valor de $\gamma_3(t)$ for alterado. Então, de forma simplificada, considerou-se que $\dot{\theta}_M(t) = \gamma_3(t)\dot{\theta}(t)$.

Observação 4 O projeto de controle considerou que todos os sensores responsáveis pelas leituras das variáveis de estado apresentam falhas, tal que $i, j \in \mathbb{K}_r$, para $r \in 2^n$. No entanto, nessa implementação prática é possível simplificar essa notação, pois somente um sensor apresenta falha. Logo, tem-se que $r \in 2^1$ e consequentemente $i, j \in \mathbb{K}_2$

A partir das considerações anteriores, de (5), (6) e (7), têm-se as matrizes $\Gamma_i = \text{diag}[1 \ 1 \ \gamma_3 \ \gamma_3]$ e $\Gamma_i^{-1} = \text{diag}[1 \ 1 \ \gamma_3^{-1} \ \gamma_3^{-1}]$. Como visto no Teorema 1, $G_i = \Gamma_i^{-1}$. Considerando $0,5 \leq \gamma_3 \leq 1$, obtêm-se as matrizes:

$$[G_1|G_2] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]. \quad (30)$$

Do Teorema 1 com $\beta = 1,4$ obtêm-se:

$$K = [247,9923 \quad 210,8674 \quad 81,0489 \quad 4,0684], \quad (31)$$

$$P = \begin{bmatrix} 4220,844 & 1839,562 & 177,079 & 1,139 \\ 1839,562 & 1178,378 & 126,709 & 0,888 \\ 177,0794 & 126,709 & 22,700 & 0,246 \\ 1,139 & 0,888 & 0,246 & 0,010 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0,0003 & -0,0005 & 0,0004 & -0,0001 \\ -0,0005 & 0,0012 & -0,0022 & 0,0090 \\ 0,0004 & -0,0022 & 0,0103 & -0,1041 \\ -0,0001 & 0,0090 & -0,1041 & 1,8168 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

O ganho K obtido e descrito em (31) foi utilizado para implementar a lei de controle (8). Os resultados obtidos na implementação prática são apresentadas a seguir.

3.1 Resultados Práticos

O sistema implementado visa fazer a bolinha percorrer uma trajetória quadrada de 10 cm de lado. Em cada eixo, há uma falha que atua como uma onda quadrada, podendo estar em $\gamma_3 = 0,5$ (falha de 50% no sistema) ou $\gamma_3 = 1$ (não há falha); as ondas quadradas possuem período de 10 segundos (5 segundos com $\gamma_3 = 0,5$ e 5 segundos com $\gamma_3 = 1$) e estão defasadas em 2,5 segundos entre si, de forma que é possível observar o sistema funcionando quando há falha em apenas um eixo, nos dois eixos ou em nenhum eixo.

Para não danificar o atuador, foi inserido um saturador, via *Simulink*[®], que limita a entrada do sinal de controle $u(t)$ em $\pm 5V$. Alguns trabalhos, como por exemplo (Alves et al., 2016), consideram a presença de saturação no sinal de controle do atuador durante o projeto. Já o projeto

de controle proposto nesse trabalho não considera o efeito da saturação. Entretanto, os resultados apresentados a seguir comprovam que o desempenho do sistema não foi prejudicado de forma significativa. As respostas obtidas são apresentadas nas Figuras 3 e 4, utilizando o controlador com o ganho dado em (31).

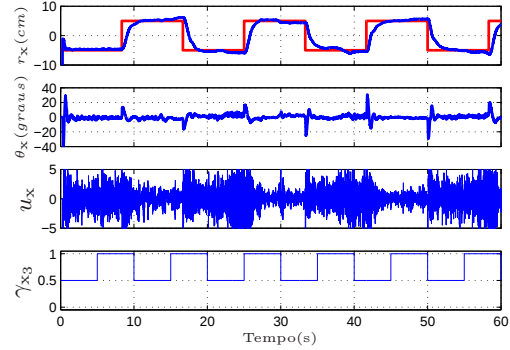


Figura 3: Resultados práticos do eixo x: posição r_x , ângulo θ_x , sinal de controle u_{σ_x} e a falha γ_{3x} do 2D ball balancer utilizando o controlador (31).

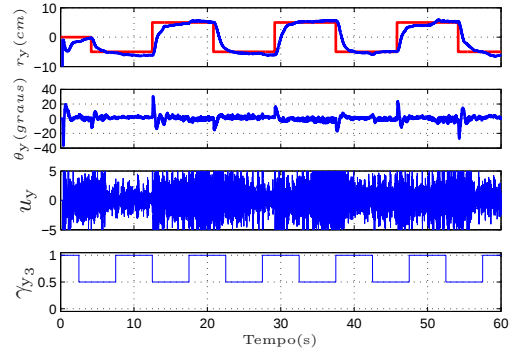


Figura 4: Resultados práticos do eixo y: posição r_y , ângulo θ_y , sinal de controle u_{σ_y} e a falha γ_{3y} do 2D ball balancer utilizando o controlador (31).

Nas Figuras 3 e 4, pode-se notar que o sistema seguiu a posição desejada $x = \pm 5 \text{ cm}$, $y = \pm 5 \text{ cm}$ e manteve os ângulos das direções x e y próximo de zero. Por fim, a trajetória da bola representada na Figura 5 confirma a eficiência da metodologia proposta.

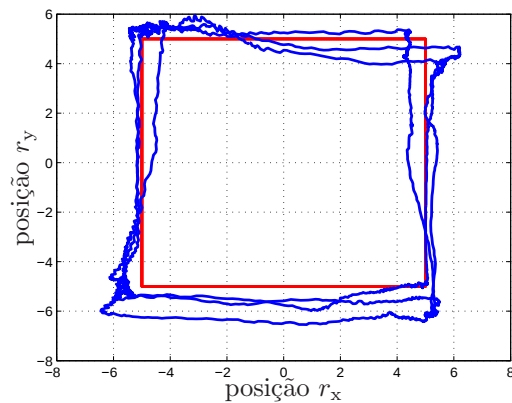


Figura 5: Resultados práticos da posição $x \times y$ do 2D ball balancer utilizando o controlador (31).

4 Conclusões

Esse trabalho propôs um projeto de controle robusto para sistemas lineares, considerando que os sensores apresentam falhas de medição variantes no tempo. O vetor de estado medido, $x_M(t) = \Gamma_z x(t)$, apresenta incertezas politópicas, como mostra a definição de Γ_z em (5). Em (Buzetti et al., 2015) um problema semelhante foi abordado, porém as falhas nos sensores foram consideradas constantes, tal que $\dot{x}_M(t) = \Gamma_z \dot{x}(t)$. O método proposto nesse trabalho apresenta condições que garantem a estabilidade do sistema realimentado e tais condições independem das variações dos elementos da matriz Γ_z . Por fim, o teorema foi utilizado para projetar o controlador empregado na implementação prática, em um sistema *2D ball balancer*, para confirmar a sua eficácia.

Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES, ao CNPq e a FAPESP (2011/17610-0) pelo apoio financeiro.

Referências

- Ackermann, J. (1984). Robustness against sensor failures, *Automatica* **20**(2): 211 – 215.
- Alves, U. N. L. T., Teixeira, M. C. M., de Oliveira, D. R., Cardim, R., Assunção, E. and de Souza, W. A. (2016). Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* (28): n/a–n/a.
- Bouattour, M., Chadli, M., Hajjaji, A. E. and Chaabane, M. (2009). $\mathcal{H}_\infty$ sensor faults estimation for T-S models using descriptor techniques: Application to fault diagnosis, *Fuzz-IEEE 2009*, Korea.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Vol. 15 of *Studies in Applied Mathematics*, SIAM - Soc. Ind. Appl. Math., Philadelphia, PA.
- Buzetti, A. S., Oliveira, D. R., Teixeira, M. C. M., Souza, W. A., Assunção, E. and Cardim, R. (2015). Projeto de controle robusto chaveado com falhas no sensores, *XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI*, Natal, RN.
- Dong, J. and Yang, G.-H. (2015). Reliable state feedback control of T-S fuzzy systems with sensor faults, *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* **23**(2): 421–433.
- Liu, M., Cao, X. and Shi, P. (2013). Fuzzy-model-based fault-tolerant design for nonlinear stochastic systems against simultaneous sensor and actuator faults, *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* **21**(5): 789–799.
- Minqing, X. (2009). Reliable robust guaranteed cost control of delta operator linear uncertain systems with sensor failure, *Intelligent Computation Technology and Automation, 2009. ICICTA '09. Second International Conference on*, Vol. 1, pp. 834–837.
- Oudghiri, M., IEEE, S. M., CHADLI, M. and HAJJAJI, A. E. (2007). A fuzzy approach for sensor fault-tolerant control of vehicle lateral dynamics, *16th IEEE International Conference on Control Applications*, Singapore.
- Qiu, J.-Q., Ren, M.-F., Xi, D.-M., Zhao, Y.-C., Guo, Y.-M. and Zhu, X.-D. (2010). Fault-tolerant control design for a class of T-S fuzzy systems with time delays and sensor faults, *Proceedings of the Ninth International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, Qingdao.
- Quanser (2008). *2D Ball Balancer Control using QUARC: Instructor Manual*, Quanser Inc., Canadá.
- Souza, W. A., Oliveira, D. R., Teixeira, M. C. M., Silva, L. S. C., Cardim, R. and Assunção, E. (2014). Projeto e implementação de um controlador robusto chaveado utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno, *XX Congresso Brasileiro de Automática - CBA*, Belo Horizonte, MG.
- Veillette, R., Medanic, J. and Perkins, W. R. (1992). Design of reliable control systems, *Automatic Control, IEEE Transactions on* **37**(3): 290–304.
- Wang, Z., Jin, X. and Wang, Z. (2011). Adaptive controller design for linear time-invariant systems with sensor failures, *Control and Decision Conference (CCDC), 2011 Chinese*, pp. 2459–2462.
- Yang, G.-H., Wang, J. L. and Soh, Y. C. (2001). Reliable $\mathcal{H}_\infty$ controller design for linear systems, *Automatica* **37**(5): 717 – 725.
- Yang, G.-H., Wang, J. and Soh, Y. (2000). Reliable LQG control with sensor failures, *Control Theory and Applications, IEE Proceedings -* **147**(4): 433–439.
- Yang, G.-H. and Ye, D. (2008). Adaptive fault-tolerant $\mathcal{H}_\infty$ control against sensor failures, *IET Control Theory and Applications* **2**(2): 95–107.