

OTIMIZAÇÃO POR ENXAME DE PARTÍCULAS COM CRITÉRIO DE PARADA EM UM PROBLEMA DE DESPACHO ECONÔMICO DE CARGA

JEFFERSON O. DOS SANTOS* JOÃO P. JUCHEM NETO* FABIANA C. LAGOAS*
EDUARDO M. DOS SANTOS* LUCAS E. D. ANTUNES*

**Grupo de Energia e Sistemas Elétricos de Potência, Universidade Federal do Pampa
Av. Tiarajú, 810, Bairro Ibirapuitã, Alegrete, RS, CEP: 97546-550*

Email: jeffersonoliveiradossantos@gmail.com, plinio@unipampa.edu.br,
fabiana.lagoas@gmail.com, eduardosantos@unipampa.edu.br
lucas.dornelesantunes@gmail.com,

Abstract— This paper applies particle swarm optimization method (PSO) with stopping criterion in the resolution of an economic dispatch problem with three generators, taking into account transmission line losses. Then this solution is compared with results presented in the literature, which use PSO without a stopping criterion, and with the exact solution of the problem obtained via Lagrange multipliers method. The results obtained through computational simulations show that the use of PSO with stopping criterion finds the same solution given by the Lagrange multipliers method, which is the optimal solution of the problem. In addition, when compared with the results given by PSO without stopping criteria, the method proposed here converges faster, and gives a smaller total generation cost, and transmission line losses.

Keywords— Electric Power Systems, Economic Dispatch, Particle Swarm Optimization, Stopping Criteria, Lagrange Multipliers.

Resumo— Este artigo aplica o método de otimização por enxame de partículas (PSO) com critério de parada na resolução de um problema de despacho econômico de carga constituído por três unidades geradoras considerando as perdas nas linhas de transmissão. A solução obtida desta forma é então comparada com resultados presentes na literatura, que utilizam o PSO sem critério de parada e a solução exata do problema obtida via método dos multiplicadores de Lagrange. Os resultados obtidos através de simulações computacionais demonstraram que o PSO com critério de parada encontra a solução ótima do problema igual ao resultado exato que se obtém via multiplicadores de Lagrange. Além disso, quando comparado ao PSO sem critério de parada, o método proposto converge mais rapidamente obtendo um menor custo total de geração e menores perdas nas linhas de transmissão.

Palavras-chave— Sistemas Elétricos de Potência, Despacho Econômico, Otimização por Enxame de Partículas, Critério de Parada, Multiplicadores de Lagrange.

1 Introdução

O crescente consumo de energia elétrica está formando um mercado consumidor altamente competitivo e vibrante, alterando muitos aspectos no que tange à geração, transmissão e distribuição da energia elétrica. Nesse contexto, a busca por recursos energéticos suficientes para atender a demanda de carga, o alto custo da geração da energia elétrica e a atual crescente preocupação em mitigar os impactos ambientais, influenciam diretamente no despacho econômico de carga (DE) e é indispensável para que as unidades geradoras de energia elétrica atinjam o custo mínimo ideal de operação.

Muitos problemas de otimização na engenharia, como exemplo o próprio DE, devido a não-linearidade e complexo tratamento matemático, têm levado à busca de outras alternativas que possibilitem determinar sua solução. O problema de DE se resume em atender a demanda de carga consumidora ao menor custo de geração possível. A solução para este problema é de grande interesse do setor energético e apesar de diversos métodos terem sido utilizados para resolvê-lo, as abordagens convencionais podem não ser o melhor caminho para a solução, principalmente nos ca-

sos onde a função objetivo apresenta descontinuidades, não-diferenciabilidade ou a ocorrência de muitos mínimos locais. Para contornar este problema, variadas técnicas heurísticas de otimização têm sido propostas, especialmente otimização por enxame de partículas (PSO), método este que vem sendo reconhecido como um algoritmo eficiente para solucionar tal tipo de problema (Mahor et al., 2009).

O objetivo deste trabalho é utilizar o PSO para resolver um problema de DE constituído por três unidades geradoras, considerando as perdas nas linhas de transmissão, originalmente apresentado por Saadat (1999) e Serapião (2009), comparar os resultados obtidos com o tradicional Método dos Multiplicadores de Lagrange (MML) e comparar ambos os resultados com a literatura. Um diferencial apresentado na implementação do PSO realizada neste trabalho é a utilização de um critério de parada, que consiste em verificar se o erro relativo estimado nas últimas g iterações é menor que certo erro percentual mínimo definido a priori (Zielinski et al., 2005), aspecto que no geral não é considerado na literatura que aplica o PSO na resolução de problemas de DE.

Este artigo está estruturado da seguinte

forma: na Seção 2 é apresentado o problema de despacho econômico em sua forma geral; na Seção 3 o Método dos Multiplicadores de Lagrange; na Seção 4 o método de Otimização por Enxame de Partículas; na Seção 5 é apresentada a solução do sistema com três geradores utilizando o PSO com critério de parada e o MML, onde são comparados e discutidos os resultados. Por fim, na Seção 6 são apresentadas as conclusões.

2 Despacho Econômico

O problema de despacho econômico consiste em minimizar o custo total de geração e operação de energia elétrica, de forma a atender a demanda total de carga e as restrições inerentes ao sistema, sendo que cada unidade geradora possui determinado custo de produção, o qual depende principalmente do recurso energético empregado em sua geração (Gómez-Expósito et al., 2011).

O custo total de geração é a soma dos custos de cada unidade geradora e é dada pela equação (1).

$$C(\vec{P}) = \sum_{i=1}^n C_i(P_i) \quad (1)$$

A potência $\vec{P} = (P_1, \dots, P_n)$, em MW, é um vetor composto pela potência fornecida por cada unidade geradora, de 1 a n , e C_i é o custo de geração da unidade i , em \$/h, sendo este uma função da potência gerada.

O custo de geração em cada unidade é aproximada por uma função quadrática convexa (Gómez-Expósito et al., 2011), expressa em termos da própria potência de saída. A equação (2) expressa o custo individual em cada unidade geradora, onde os coeficientes a_i , b_i e c_i representam as características do gerador i (Serapião, 2009).

$$C_i(P_i) = a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

A oferta de energia fornecida pela unidade geradora i estará sujeita aos limites operacionais da mesma conforme a equação (3), que mostra respectivamente as saídas de potência mínima e máxima da unidade de geração.

$$P_i^{min} \leq P_i \leq P_i^{max}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

As unidades geradoras devem atender a demanda total do sistema considerando as perdas de transmissão, como mostra a equação (4), satisfazendo o balanço de potência:

$$\sum_{i=1}^n P_i - P_D - P_L = 0 \quad (4)$$

onde P_D é a potência total demandada e P_L são as perdas de transmissão, ambos medidos em MW.

As perdas nas linhas de transmissão são calculadas em função da potência gerada utilizando a matriz de coeficientes de perdas B . Essa matriz é obtida realizando um estudo do fluxo de potência do sistema, onde são obtidos os dados de potência gerada e as respectivas perdas. Aplicando métodos de regressão não linear é possível obter as matrizes de perdas da rede (Saadat, 1999). Para calcular as perdas utiliza-se a equação (5):

$$P_L(\vec{P}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij} P_i P_j + \sum_{i=1}^n B_{0i} P_i + B_{00} \quad (5)$$

onde B_{ij} é o ij -ésimo elemento da matriz de coeficientes de perda, B_{0i} é o i -ésimo elemento do vetor de coeficiente de perdas e B_{00} é a constante do coeficiente de perda.

Matematicamente, o problema de despacho econômico apresentado pode ser escrito como o seguinte problema de otimização condicionada:

$$\begin{cases} \min & C(\vec{P}) = \sum_{i=1}^n C_i(P_i) \\ \text{s.a.} & \sum_{i=1}^n P_i - P_D - P_L = 0 \\ & P_i^{min} \leq P_i \leq P_i^{max}, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (6)$$

3 Método Multiplicadores de Lagrange

O MML é uma técnica clássica de solução de problemas de otimização condicionada e fornece uma excelente gama de recursos para determinar máximos ou mínimos de uma função objetivo diferenciável de até n variáveis e sujeita a até m restrições (Simon and Blume, 2004). Esse método é vastamente utilizado na literatura de problemas de DE com restrições de igualdade e/ou desigualdade (Djurovic et al., 2012).

O problema de DE, objeto de estudo deste trabalho, se destaca por sua importância na operação, controle e planejamento dos grandes sistemas elétricos de potência. De fato se trata de um problema de otimização condicionado, onde o objetivo é minimizar uma função de várias variáveis vinculada a equações e inequações de restrição.

O problema de minimizar uma função com n variáveis sujeita a (s.a) m restrições de igualdade e $M - m$ restrições de desigualdade pode ser escrito da seguinte forma (7):

$$\begin{cases} \min & f(\vec{x}) \\ \text{s.a.} & g_j(x_1, \dots, x_n) = h_j, \quad j = 1, \dots, m \\ & t_j(\vec{x}) \leq u_j, \quad j = m + 1, \dots, M \end{cases} \quad (7)$$

As restrições de desigualdade em (7) podem ser transformadas em restrições de igualdade adicionando novas variáveis de folga y_j^2 , "Slack variables" (Rao, 2009). Djurovic et al. (2012) também utilizaram a variável slack para solucionar problemas de otimização com restrições de desigualdades. Dessa forma, as restrições de desigualdades

em (7) se tornam restrições de igualdade adicionais:

$$\begin{cases} \min & f(\vec{x}) \\ \text{s.a.} & g_j(\vec{x}) = h_j, j = 1, \dots, m \\ & t_j(\vec{x}) + y_j^2 = u_j, j = m+1, \dots, M \end{cases} \quad (8)$$

sendo u_j constantes dadas e y_j^2 as variáveis slack adicionais a serem determinadas.

Estendendo a aplicação do MML para o problema (8), os pontos críticos $(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*, \vec{y}^*)$ devem satisfazer as seguintes condições de primeira ordem (CPO):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} &= 0, i = 1, \dots, n \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} &= 0, j = 1, \dots, m \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_j} &= 0, j = m+1, \dots, M \end{aligned} \quad (9)$$

onde a função lagrangiana, neste caso, é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{\lambda}, \vec{y}) &= f(\vec{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j [g_j(\vec{x}) - h_j] + \\ &+ \sum_{j=m+1}^M \lambda_j [t_j(\vec{x}) + y_j^2 - u_j]. \end{aligned} \quad (10)$$

4 Otimização por Enxame de Partículas

Em 1995, James Kennedy e Russell Elberhart apresentaram o método de otimização PSO (Mahor et al., 2009), o qual foi inspirado no comportamento social constatado em variadas espécies de pássaros, cardumes de peixes e enxames de insetos.

O PSO está baseado em uma população composta por indivíduos capazes de interagir entre si e com o meio ambiente (Serapião, 2009). Dois parâmetros norteiam o processo de decisão de cada partícula: o primeiro é social, $gBest$ (g_B), e está relacionado com a influência que uma partícula exerce sobre toda população; o segundo é cognitivo, $pBest$ (p_B), refletindo o melhor resultado obtido individualmente no passado (Serapião, 2009).

A partícula i , cuja posição é $\vec{x}_i$, deverá se mover com uma velocidade $\vec{v}_i$, que pode ser calculada por:

$$\vec{v}_i(k+1) = \vec{v}_i(k) + \varphi_1(\vec{x}_{p_B} - \vec{x}_i(k)) + \varphi_2(\vec{x}_{g_B} - \vec{x}_i(k)) \quad (11)$$

onde φ_1 e φ_2 são constantes que representam, respectivamente, os parâmetros cognitivo e social, conforme Kennedy et al. (2001), p_B é o melhor valor da função objetivo para a respectiva partícula até o momento, $\vec{x}_{p_B}$ é sua posição, g_B o melhor valor da função objetivo até o momento dentre todas as partículas, $\vec{x}_{g_B}$ é sua posição, $\vec{v}_i(k)$ a velocidade atual e $\vec{x}_i(k)$ a posição atual da partícula.

A posição da partícula é calculada por:

$$\vec{x}_i(k+1) = \vec{x}_i(k) + \vec{v}_i(k+1) \quad (12)$$

A velocidade dos indivíduos sofrem restrições para que o espaço de busca não seja extrapolado, dessa forma são impostos limites para o módulo da velocidade das partículas, $v_{max} > 0$, conforme mostra (13):

$$|\vec{v}_i| > v_{max} \Rightarrow \vec{v}_i = \frac{\vec{v}_i}{|\vec{v}_i|} v_{max} \quad (13)$$

Normalmente, na literatura, o algoritmo é executado até que um respectivo número máximo de iterações seja alcançado, sendo que não é apresentado um motivo para a adoção deste número, além de tentativa e erro. Há uma desvantagem nesse critério pelo fato de ser desconhecido o número de iterações necessárias para se atingir a convergência (Zielinski et al., 2005), o que faz um critério de parada que estime o erro ser uma importante ferramenta para determinar o número de iterações necessárias para se obter convergência.

Um critério bem simples, mas eficiente, consiste em verificar se o erro relativo nas últimas g iterações é menor que um valor previamente estabelecido para o erro mínimo (Zielinski et al., 2005).

5 Estudo de caso: sistema com três unidades geradoras

Nesta seção será resolvido o DE de um sistema termoeletrico com três unidades geradoras, considerando a demanda de potência $P_D = 150$ MW e perdas nas linhas de transmissão, utilizando o PSO e o MML. Os dados do sistema em questão são reproduzidos nas tabelas 1 e 2, e as matrizes B com os coeficientes de perda nas linhas de transmissão (base de 100 MW) são dados em (14)-(16) (Saadat, 1999; Serapião, 2009). Todas as simulações computacionais foram realizadas utilizando o Matlab 8.5.0 (MathWorks) executado em um computador com processador Intel(R) Core(TM) i5-2410M, de 2.30 GHz e 6GB de RAM.

Tabela 1: Coeficientes de custos.

Unidade _i	a_i (\$/MW ²)	b_i (\$/MW)	c_i (\$)
1	0,008	7	200
2	0,009	6,3	180
3	0,007	6,8	140

Tabela 2: Capacidade de geração.

Unidade _i	P_i^{min} (MW)	P_i^{max} (MW)
1	10	85
2	10	80
3	10	70

$$B_{ij} = 10^{-2} \times \begin{bmatrix} 0,0218 & 0,0093 & 0,0028 \\ 0,0093 & 0,0228 & 0,0017 \\ 0,0028 & 0,0017 & 0,0179 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$B_{0i} = 10^{-2} \times [0,3 \quad 3,1 \quad 1,5] \quad (15)$$

$$B_{00} = 0,030523. \quad (16)$$

Para o sistema apresentado, o problema de otimização fica da seguinte forma:

$$\begin{cases} \min & C(P_1, P_2, P_3) \\ \text{s.a.} & P_1 + P_2 + P_3 - P_D - P_L(P_1, P_2, P_3) = 0 \\ & 10 \leq P_1 \leq 85 \\ & 10 \leq P_2 \leq 80 \\ & 10 \leq P_3 \leq 70 \end{cases} \quad (17)$$

cujo o objetivo é minimizar a função custo que estará sujeita as restrições de desigualdade e igualdade, que são respectivamente as referidas capacidades limites de geração de cada unidade termelétrica e o balanço de potência considerando as perdas nas linhas de transmissão.

5.1 Solução via MML

Como visto anteriormente, as restrições envolvendo desigualdades podem ser reescritas como igualdades através da introdução de variáveis “slack”. Assim, o problema de DE (17) pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} \min & C(P_1, P_2, P_3) \\ \text{s.a.} & P_1 + P_2 + P_3 - P_D - P_L(P_1, P_2, P_3) = 0 \\ & P_1 - Y_1^2 - 10 = 0 \\ & P_1 + Y_2^2 - 85 = 0 \\ & P_2 - Y_3^2 - 10 = 0 \\ & P_2 + Y_4^2 - 80 = 0 \\ & P_3 - Y_5^2 - 10 = 0 \\ & P_3 + Y_6^2 - 70 = 0 \end{cases} \quad (18)$$

A função lagrangiana pode ser escrita para o problema de otimização descrito pela equação (18) e aplicando as CPO (9), obtemos um sistema de equações não-lineares com 16 equações e 16 variáveis (que não são apresentadas aqui por uma questão de espaço). Então, a solução deste sistema foi obtida utilizando o comando `fsolve` do Matlab, a qual é apresentada na tabela 3.

Tabela 3: Otimização via MML

Saídas de Potência	MML
Unidade 1 (MW)	33,4701
Unidade 2 (MW)	64,0974
Unidade 3 (MW)	55,1012
P_L (MW)	2,6687
P_D (MW)	150,0000
$\sum P_i$ (MW)	152,6687
Custo (\$)	1.599,98

Esse estudo de caso foi realizado por Serapião (2009) utilizando o PSO sem critério de parada,

que encontrou um custo médio de \$1.609,13/h e por Saadat (1999), que utilizando o MML encontrou \$1.599,98/h. Verificou-se que ambos os métodos resultam em uma solução bem próxima uma da outra, no entanto, o MML retorna o valor exato do problema e mostrou ser mais preciso do que o PSO implementado por Serapião (2009).

5.2 Solução via PSO

Na implementação do PSO, a função objetivo utilizada é dada por (19):

$$f(\vec{P}) = \sum_{i=1}^3 C_i(P_i) + \phi \left| \sum_{i=1}^3 P_i - P_D - P_L \right| \quad (19)$$

onde ϕ é uma constante positiva que penaliza as soluções que não atendem ao equilíbrio no balanço de carga.

Segundo Serapião (2009), foram utilizadas 20 partículas diferentes e aleatoriamente inicializadas em 20 execuções do algoritmo. Adicionalmente, foi utilizado como critério de parada a verificação de quando a estimativa do erro relativo nas 500 gerações anteriores é menor do que o valor 10^{-6} . Foram utilizadas 500 gerações porque gerações adicionais não trazem ganhos substantivos na qualidade da solução, conforme gráfico apresentado na Figura 1.

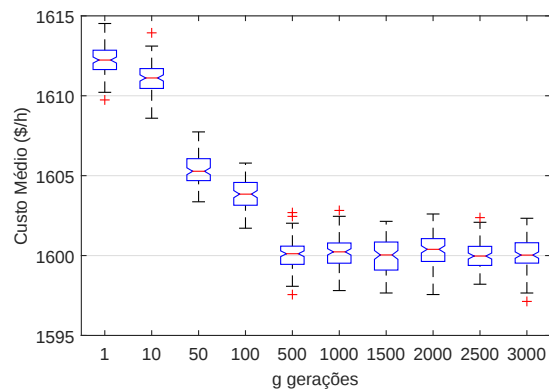


Figura 1: Custo médio versus g gerações.

Desta forma, foi calculado a média (μ) e o desvio padrão (σ), Tabela 4, das soluções ótimas do custo de geração, das iterações e do tempo decorrido necessário para a convergência do algoritmo.

Tabela 4: Solução do DE com PSO

	Custo \$/h	Iterações	Tempo (s)
μ	1.600,00	3.085,0000	3,7243
σ	0,0545	1.243,8951	1,5011

Nas simulações realizadas, o PSO com critério de parada G500 alcança o custo mínimo da função

utilizando uma média de 3.085 iterações, em um tempo médio de apenas 3,7243 s.

A Tabela 5 resume os melhores resultados das simulações do PSO deste trabalho, com critério de parada (PSO 1), contrastando-os com PSO 2 (Serapião, 2009), que utilizou 5.000 iterações em cada simulação, sem critério de parada. Pode-se observar que o PSO utilizando critério de parada retorna melhores valores de custo mínimo, médio e máximo e ainda menores índices de desvio padrão para o mesmo problema de DE.

Tabela 5: Melhor solução do PSO.

	min (\$/h)	μ (\$/h)	max (\$/h)	σ
PSO 1	1.599,98	1.600,00	1.600,22	0,0545
PSO 2 ¹	1.600,60	1.609,13	1.627,87	8,2310

O critério de parada utilizado garantiu a convergência do algoritmo para a solução correta, além de retornar resultados melhores que Serapião (2009). Na tabela 5 é possível comprovar a qualidade das soluções através dos números resultantes para o desvio padrão.

A figura 2 mostra o gráfico da melhor solução obtida entre os 20 experimentos realizados com o PSO utilizando critério de parada para determinar o custo mínimo. Essa simulação necessitou de 3.500 iterações, até que o algoritmo atingisse a convergência, em aproximadamente 3,9379 s e seu custo mínimo, solução ótima, atingiu o valor de \$1.599,98/h.

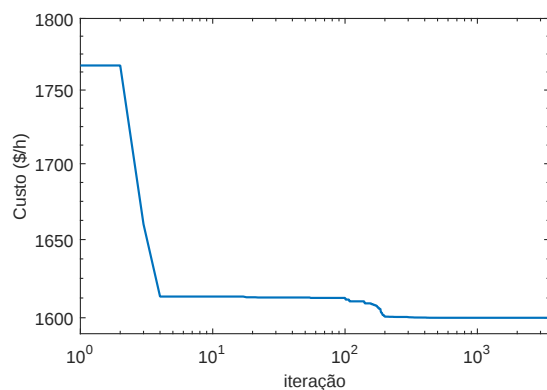


Figura 2: Menor Custo alcançado pelo PSO com critério de parada G500.

A figura 3 mostra o comportamento do algoritmo ao longo do processo iterativo ao determinar o nível de potência a ser despachada por cada unidade geradora. Inicialmente os níveis de potência são gerados aleatoriamente para cada partícula que durante a execução do PSO, especialmente nas primeiras iterações, assumem diferentes níveis de potência, posições no espaço de busca, que resultará em um perfil de geração ótimo satisfazendo

¹Referência: Serapião (2009).

o balanço de potência sem infringir as respectivas restrições de operação mínima e máxima de cada unidade.

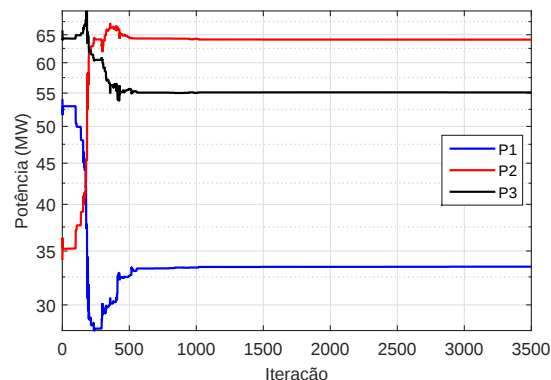


Figura 3: Nível de potência da melhor simulação ao longo do processo de otimização.

O PSO retornou ótimos resultados quanto a precisão da resposta esperada pelo processo de otimização realizado. O algoritmo convergiu adequadamente em uma razoável quantidade de iterações rapidamente. O baixo valor de desvio padrão (0,0545), revela a ótima convergência do PSO para a solução do problema, mostrando ser um algoritmo seguro e eficiente.

5.3 Comparação dos resultados

Observando a tabela 6, pode-se concluir que os métodos de solução retornaram praticamente a mesma resposta no que diz respeito a função objetivo. O PSO 1 com critério de parada retornou o menor custo da geração, com pouca diferença entre os métodos. A grande diferença porém, foi nas perdas de transmissão. O PSO 2 sem critério de parada apresentou maiores perdas, com uma diferença de quase 92 KW em relação ao PSO 1 com critério de parada e o Método dos Multiplicadores de Lagrange. Os níveis de potência dispares entre o PSO 1 com critério de parada e o Método dos Multiplicadores de Lagrange em relação ao PSO 2 sem critério de parada justificam a diferença do P_L , porém mesmo com as disparidades de perdas e potências despachadas, todos os métodos atenderam o balanço de carga dentro do limite de geração de cada unidade termoeletrônica.

Tabela 6: Melhor simulação métodos e resultados

	MML	PSO 1	PSO 2
Uni 1 (MW)	33,4701	33,4672	30,6170
Uni 2 (MW)	64,0974	64,0926	66,7590
Uni 3 (MW)	55,1012	55,1088	55,3850
P_L (MW)	2,6687	2,6686	2,7600
P_D (MW)	150,0000	150,0000	150,0000
$\sum P_i$ (MW)	152,6687	152,6686	152,7600
Custo (\$)	1.599,98	1.599,98	1.600,60

Os resultados obtidos por Serapião (2009), foram alcançados com 5.000 iterações em 9,615 s, ao passo que as soluções obtidas utilizando o critério de parada foram adquiridas em média com 3.085 iterações em 3,7243 s, tendo a melhor simulação, com menor custo mínimo, atingido o máximo de 3.500 evoluções em 3,9379 s. Esses números mostram a importância de utilizar um critério de parada que além de garantir uma rápida convergência, retorna respostas com baixos índices de desvio padrão assegurando a qualidade das soluções obtidas.

6 Conclusões

A principal conclusão deste trabalho é que a utilização de um critério de parada na implementação do PSO acrescentou uma melhoria substancial, quando comparado à literatura, aos resultados obtidos na resolução do problema teste de despacho econômico com três unidades geradoras e levando em consideração as perdas nas linhas de transmissão. Em especial, a solução obtida desta forma, apresentou menor custo total de geração, menores perdas nas linhas de transmissão e menor custo computacional, com o algoritmo convergindo mais rapidamente para a solução. Além disso, o custo total de geração assim obtido foi o mesmo que a solução exata dada pelo método dos multiplicadores de Lagrange, apresentando um desvio padrão muito menor do que o constante na literatura.

O Método dos Multiplicadores de Lagrange mostrou ser um procedimento eficiente na solução do DE, pois sua metodologia é bem mecânica, com passos bem definidos, que se bem aplicados certamente retornará a solução do problema. No entanto, esse método aumentou muito o número de variáveis do problema. O problema iniciou com 3 variáveis e o tratamento matemático necessário para que pudesse ser resolvido aumentou para 16 variáveis, compondo um sistema de 16 equações não-lineares. Vale ressaltar que a utilização dessa técnica, apesar de ser poderosa, pode se tornar bastante complicada ou até mesmo inviável dependendo do tamanho do sistema de geração a ser otimizado.

O PSO revelou ser uma ferramenta melhor do que o Método dos Multiplicadores de Lagrange, se considerarmos sua forma metodológica para resolver esse problema de otimização. Possui uma abordagem simples e direta, facilitando a maneira de tratar com os dados e restrições relacionados ao problema, oposto à dificuldade matemática que os Multiplicadores de Lagrange impõe, além de apresentar grande flexibilidade.

Os resultados obtidos evidenciam a importância de se utilizar um critério de parada em métodos heurísticos de otimização como o PSO, ao invés de apenas fixar um número máximo de iterações. Tal procedimento aumentou a precisão das

soluções obtidas e apresentou convergência mais rápida. As simulações realizadas neste trabalho revelam que esta metodologia pode ser perfeitamente aplicada na resolução de problemas de otimização em engenharia, apresentando muitos benefícios.

Referências

- Djurovic, M., Milancic, A. and Krsulja, M. (2012). A simplified model of quadratic cost function for thermal generators, *Proceedings of the 23rd DAAAM Symposium*, pp. 25–25.
- Gómez-Expósito, A., Conejo, A. and Cañizares, C. (2011). Sistemas de energia elétrica: análise e operação, *LTC*.
- Kennedy, J., Kennedy, J. F., Eberhart, R. C. and Shi, Y. (2001). *Swarm intelligence*, Morgan Kaufmann.
- Mahor, A., Prasad, V. and Rangnekar, S. (2009). Economic dispatch using particle swarm optimization: a review, *Renewable and sustainable energy reviews* **13**(8): 2134–2141.
- Rao, S. S. (2009). *Engineering optimization: theory and practice*, John Wiley & Sons.
- Saadat, H. (1999). *Power system analysis*, McGraw-Hill.
- Serapião, A. B. d. S. (2009). Fundamentos de otimização por inteligência de enxames: uma visão geral, *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica* **20**(3): 271–304.
- Simon, C. P. and Blume, L. (2004). *Matemática para economistas*, Bookman.
- Zielinski, K., Peters, D. and Laur, R. (2005). Stopping criteria for single-objective optimization, *Proceedings of the Third International Conference on Computational Intelligence, Robotics and Autonomous Systems*, Citeseer.