

CONTROLE DE SISTEMAS DISCRETOS NO TEMPO COM SATURAÇÃO DE ATUADORES E ATRASO NOS ESTADOS

JÔNATHAS V. V. SILVA,* VALTER J. S. LEITE^{†,*}, LUÍS F. P. SILVA[†]

*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica — CEFET-MG & UFSJ
Av. Amazonas 7675, Belo Horizonte, MG, Brasil, 30510-000.

[†]Departamento de Engenharia Mecatrônica / CEFET-MG / campus Divinópolis
R. Álvares Azevedo, 400, Divinópolis, MG, Brasil, 35503-822.

Emails: jvvalle.mecatroica@gmail.com, valter@ieee.org, luis@div.cefetmg.br

Abstract— The stabilization of the class of discrete time systems with time-varying delay in the state and saturating actuators is investigated in this work. The approach used is based on the generalized sector condition applied on the dead zone nonlinearity and the the modeling of the delayed system in an switched augmented delay-free model. The characterization of the initial conditions is done in an augmented space, reducing the conservatism of the estimates usually found in the literature. Although the proposed synthesis conditions are of delay dependent kind, three types of delay independent control laws are studied, what may facilitate the controller implementation. Additionally, convex conditions to handle the time-variation of the delay between two samples are proposed, which is new in the literature for such a class of systems. In all cases, convex optimization procedures are proposed to maximize either the maximum delay value or the size of the initial conditions region. The proposed conditions are applied to and discussed with the aid of simple examples, including one of first order, which facilitate the reader's perception about the used techniques.

Keywords— Delay in the state, Saturating actuators, State feedback, Delay dependent stabilization.

Resumo— A estabilização da classe de sistemas discretos no tempo com atraso variante no tempo presente no estado e atuadores limitados em amplitude é investigado neste trabalho. A abordagem empregada utiliza a condição generalizada de setor aplicada à não-linearidade de zona morta e a representação do sistema com atrasos por um sistema chaveado aumentado livre de atrasos. A caracterização da região de condições iniciais é feita em um espaço aumentado, reduzindo o conservadorismo das estimativas normalmente encontradas na literatura. Mesmo que as condições de síntese propostas sejam do tipo dependente do atraso, três tipos de leis de controle independente do atraso são investigadas, o que facilita a implementação do controlador. Adicionalmente, condições convexas para tratar a variação máxima do atraso entre duas amostragens são propostas, o que é novo na literatura para essa classe de sistemas. Para todos os casos, são propostos procedimentos de otimização convexa para maximização da região de condições iniciais. As condições propostas são aplicadas e discutidas em um exemplo escalar, facilitando a percepção do leitor sobre as técnicas usadas.

Palavras-chave— Atrasos no estado, Saturação de atuadores, Realimentação de estado, Estabilização dependente do atraso.

1 Introdução

Tanto o atraso quanto a saturação de atuadores são fenômenos comumente encontrados em sistemas reais. O projeto de sistemas de controle sem levar em consideração esses fenômenos pode não atender às especificações de desempenho desejadas e até mesmo causar a instabilidade do sistema em malha fechada (Michiels & Niculescu, 2007; Tarbouriech et al., 2011). Em especial, nota-se que sistemas com atrasos têm sido muito estudados nas últimas décadas, porém a maior parte dos trabalhos não considera a saturação dos atuadores.

Atrasos no estado podem advir da própria dinâmica do sistema, como consequência indesejada da ação de realimentação ou mesmo pela introdução intencional de atrasos na lei de controle (Gu et al., 2003). Sua presença pode ocasionar perda de desempenho ou até mesmo a instabilidade no processo. As principais abordagens usam funções de Lyapunov-Krasovskii, como por exemplo (Mahmoud, 2000; Fridman & Shaked, 2005; Montagner et al., 2005; Miranda & Leite, 2011) para abordagens que tratam da estabilização de sistemas discretos no tempo com atrasos no estado. Uma abordagem alternativa, feita por Hetel et al.

(2008), transforma o sistema original com atrasos no estado em um sistema aumentado chaveado livre de atraso.

As restrições em atuadores podem ser associadas aos limites físicos de atuadores: amplitude ou taxa de variação. Essas limitações restringem o desempenho do sistema em malha fechada, podendo levá-lo a pontos de equilíbrio diferentes do ponto de operação (que em geral são colocados na origem do espaço de estado) ou mesmo instabilizando-o (Tarbouriech et al., 2011). Além disso, a saturação influencia o conjunto das condições iniciais necessárias à unicidade das soluções. Neste trabalho é considerada a saturação em amplitude no atuador e essa é modelada com auxílio da condição de Lur'e. Para outras maneiras de tratar a saturação, veja (Tarbouriech et al., 2011).

A saturação de atuadores em sistemas discretos no tempo com atrasos no estado é pouco tratada na literatura, podendo ser mencionados os trabalhos (Ghigi et al., 2008) e (Xu et al., 2012) em que são considerados atrasos variantes no tempo. No primeiro, os sistemas possuem incertezas politópicas e a região de condições iniciais admissíveis é caracterizada por uma ponderação entre a norma da sequência inicial e a norma de

sua variação temporal. Já em (Xu et al., 2012), são tratados sistemas com incertezas do tipo limitada em norma e a região de condições iniciais admissíveis é caracterizada por uma bola em torno da origem.

Neste trabalho   proposta uma nova caracterização da região de atração utilizando a abordagem introduzida em (Hetel et al., 2008). São propostas condições para a síntese de leis de controle e, a partir dessas, pode-se calcular estimativas menos conservadoras das sequências de estados iniciais admissíveis que asseguram a convergência das trajetórias do sistema em malha fechada para a origem. As condições propostas são do tipo dependente do atraso, porém as leis de controle não são, facilitando a implementação dos controladores. Todas as formulações propostas, incluindo o problema para maximização do tamanho da região de condições iniciais admissíveis, estão na forma de desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *linear matrix inequalities*). Por simplicidade, apenas o caso precisamente conhecido é tratado e um exemplo escalar é apresentado para ilustrar melhor o projeto de três leis de controle que dispensam o conhecimento do valor do atraso em tempo real.

Notac  o: O símbolo $\star$ representa a transposta dos blocos, em relação   diagonal principal, nas matrizes reais, quadradas e simétricas. As matrizes $\mathbf{I}$ e $\mathbf{0}$ denotam, respectivamente, as matrizes identidade e nula, com dimensões apropriadas. O conjunto de matrizes reais de dimensões $m \times n$ é denotado por $\mathbb{R}^{m \times n}$. Se φ   uma sequência de vetores, seu j -ésimo elemento é denotado por $[\varphi]_j$. A sequência $\varphi_{d,k} \in E_\phi$, com $E_\phi = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_{d+1}$, $E_j \subseteq \mathbb{R}^n$, tem como j -ésimo elemento $[\varphi_{d,k}]_j = x_{k+j-(d+1)} \in E_j$, $j = 1, \dots, d+1$; Portanto, $\varphi_{d,k} = \{x_{k-d}, x_{k-(d-1)}, \dots, x_k\}$.

2 Formulação do problema

Considere a classe dos sistemas discretos no tempo com atraso variante no tempo presente no estado e com atuadores sujeitos a saturação de amplitude cuja dinâmica é descrita por

$$x_{k+1} = Ax_k + A_d x_{k-\tau_k} + B \text{sat}(v_k), \quad (1)$$

em que A e $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, v_k é o sinal de controle e $\text{sat}(v_k)$ é uma função saturação vetorial descentralizada clássica, isto é, $\text{sat}(v_k)_{(i)} = \bar{v}_{(i)}$, se $v_{k(i)} > \bar{v}_{(i)}$; $\text{sat}(v_k)_{(i)} = v_{k(i)}$, se $\underline{v}_{(i)} \leq v_{k(i)} \leq \bar{v}_{(i)}$; ou $\text{sat}(v_k)_{(i)} = \underline{v}_{(i)}$, se $v_{k(i)} < \underline{v}_{(i)}$, sendo $\underline{v}_{(i)}$ e $\bar{v}_{(i)}$, $i = 1, \dots, p$, os limites mínimo e máximo que podem ser aplicados pelo i -ésimo atuador. O atraso τ_k   variante no tempo tal que $\tau_k \in \{1, 2, \dots, \bar{\tau}\}$. Assume-se que o sistema (1) possui $\varphi_{\bar{\tau},0}$ como condição inicial. Para a estabilização do sistema (1) são investigadas três leis de controle, todas independentes do valor do atraso: $v_k = K_0 x_k$, $v_k = K_0 x_k + K_{\bar{\tau}} x_{k-\bar{\tau}}$ ou $v_k = \sum_{i=0}^{\bar{\tau}} K_i x_{k-i}$, com $K_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $i = 1, \dots, \bar{\tau}$. Essas leis de controle podem ser reescritas como

$$v_k = \mathbb{K} \bar{x}_k, \quad (2)$$

em que $\mathbb{K} \in \mathbb{R}^{p \times (\bar{\tau}+1)n}$ é a matriz de ganho est tico que assume as estruturas:

$$\mathbb{K} = [K_0 \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0}] \quad (3a)$$

$$\mathbb{K} = [K_0 \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad K_{\bar{\tau}}] \quad (3b)$$

$$\mathbb{K} = [K_0 \quad K_1 \quad \dots \quad K_{\bar{\tau}}], \text{ e} \quad (3c)$$

$$\bar{x}_k = [x_k^T \quad x_{k-1}^T \quad \dots \quad x_{k-\bar{\tau}}^T]^T \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n}. \quad (4)$$

A seguinte definição é adaptada de (Niculescu et al., 1996).

Definição 1 (Estabilidade assintótica global)

O sistema (1) sob a  o da lei de controle (2)   dito globalmente assintóticamente estável se para toda condição inicial $\|\varphi_{\bar{\tau},0}\| \leq \phi < \infty$ as respectivas trajetórias convergem para a origem, isto é, $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{\bar{\tau},k} = \{\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}\}$.

Devido à saturação do atuador, a estabilidade assintótica global do sistema em malha fechada somente pode ser alcançada caso o sistema em malha aberta seja estável (Lin & Saberi, 1993). Do contrário,   necessário investigar a estabilidade local, ou seja, a estabilidade assintótica do sistema é garantida apenas para trajetórias originadas em um conjunto de condições iniciais. Nesse caso,   necessário que a sequência (ou seus elementos) $\varphi_{\bar{\tau},0}$ pertenc a a um conjunto de condições iniciais admissíveis. Em geral, deseja-se que esse conjunto seja o maior possível. Assim, podem ser estabelecidos os seguintes problemas de controle que são estudados neste trabalho.

Problema 1 (Estabilização local) *Seja o sistema (1) sob a ação da lei de controle (2). Determine a matriz de ganho $\mathbb{K}$ que maximiza o conjunto das condições iniciais $\varphi_{\bar{\tau},0}$ admissíveis e assegure(m) a estabilidade assintótica local da malha fechada.*

Note que variações do Problema 1 podem ser facilmente colocadas e adaptadas para as condições que são dadas adiante.

3 Preliminares

Seguindo a proposta feita por Hetel et al. (2008), o sistema com atrasos variantes no tempo (1) pode ser descrito como um sistema aumentado livre de atrasos e chaveado pelo valor do atraso com auxílio do vetor de estado aumentado (4):

$$\bar{x}_{k+1} = \Lambda(\tau_k) \bar{x}_k + \mathbb{B} \text{sat}(v_k), \quad (5)$$

em que

$$\Lambda(\tau_k) = \left[\begin{array}{c|c} A & \Xi_1(\tau_k) \quad \dots \quad \Xi_{\bar{\tau}-1}(\tau_k) \\ \hline \mathbf{I}_{n\bar{\tau}} & \mathbf{0}_{n\bar{\tau} \times n} \end{array} \right],$$

com

$$\Xi_i(\tau_k) = \begin{cases} A_d, & i = \tau_k \\ \mathbf{0}_{n \times n}, & i \neq \tau_k \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, \bar{\tau},$$

e $\mathbb{B} = [B^T \quad \mathbf{0}_{p \times n\bar{\tau}}]^T$. Aplicando a lei de controle (2) ao sistema (5), pode-se obter $\bar{x}_{k+1} = \Lambda(\tau_k) \bar{x}_k + \mathbb{B} \text{sat}(\mathbb{K} \bar{x}_k)$. Defina-se a função zona morta $\Psi(v_k) = v_k - \text{sat}(v_k)$, ou seja $\Psi(v_k) =$

$$[\psi(v_{k(1)}) \quad \dots \quad \psi(v_{k(p)})]^T \text{ em que}$$

$$\psi(v_{k(i)}) = \begin{cases} v_{k(i)} - \bar{v}_{(i)}, & \text{se } v_{k(i)} > \bar{v}_{(i)} \\ 0, & \text{se } \underline{v}_{(i)} \leq v_{k(i)} \leq \bar{v}_{(i)} \\ v_{k(i)} - \underline{v}_{(i)}, & \text{se } v_{k(i)} < \underline{v}_{(i)} \end{cases},$$

para $i = 1, \dots, p$. Assim, chega-se a $\bar{x}_{k+1} = (\Lambda(\tau_k) + \mathbb{BK})\bar{x}_k - \mathbb{B}\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)$. Para simplificar a not  o, $\tilde{\Lambda}(\tau_k) = \Lambda(\tau_k) + \mathbb{BK}$, ficando o sistema (5) expresso como $\bar{x}_{k+1} = \tilde{\Lambda}(\tau_k)\bar{x}_k - \mathbb{B}\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)$. A condição generalizada de setor, proposta em (Gomes da Silva Jr. & Tarbouriech, 2005)   utilizada para a obtenção dos resultados principais deste trabalho e está apresentada na sequência.

Lema 1 (Condição Generalizada de Setor)

Assuma v_k dado por (2), $\bar{v} = -\underline{v} = v_0 > 0$ e uma matriz $G \in \mathbb{R}^{p \times (\bar{\tau}+1)n}$, tal que

$$\mathbb{S} \triangleq \left\{ \bar{x}_k \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n} : |(\mathbb{K} - G)\bar{x}_k| \leq v_0 \right\}. \quad (6)$$

Se $\bar{x}_k \in \mathbb{S}$, então a relação

$$\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)^T T [\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k) - G\bar{x}_k] \leq 0 \quad (7)$$

É verificada para qualquer T diagonal e definida positiva.

O resultado principal deste artigo é baseado em uma candidata   função de Lyapunov-Krasovskii (L-K) $V(\varphi_{\bar{\tau},k}, \tau_k) > 0$, em que

$$V(\varphi_{\bar{\tau},k}, \tau_k) = \sum_{i=0}^{\bar{\tau}} \sum_{j=0}^{\bar{\tau}} x_{k-i}^T P_{\tau_k}^{i,j} x_{k-j} \quad (8)$$

e $P_{\tau_k}^{i,jT} = P_{\tau_k}^{j,i}$. Note que pode-se reescrever as matrizes simétricas e n  necessariamente definidas positivas $P_{\tau_k}^{j,i}$ na seguinte forma aumentada $\Phi(\tau_k) = \Phi(\tau_k)^T > 0$ cujos blocos $[\Phi(\tau_k)]_{ij} = P_{\tau_k}^{i,j}$, $i, j = 0, \dots, \bar{\tau}$. Por consequência disso, tem-se $V(\varphi_{\bar{\tau},k}, \tau_k) = \bar{x}_k^T \Phi(\tau_k) \bar{x}_k$, que é a forma aumentada de apresentar a candidata   função L-K (8). De acordo com (Hetel et al., 2008), a candidata   função L-K (8) representa a forma mais geral dessas funções e isso permite a obtenção de condições necessárias e suficientes.

Seguindo o Teorema de Lyapunov-Krasovskii (Stojanovi  et al., 2007), a função $V(\varphi_{\bar{\tau},k}, \tau_k) > 0$ (8)   dita ser uma função L-K se

$$\Delta V(\varphi_{\bar{\tau},k}, \tau_k) = V(\varphi_{\bar{\tau},k+1}, \tau_{k+1}) - V(\varphi_{\bar{\tau},k}, \tau_k) < 0 \quad (9)$$

Então, a estabilidade assintótica do sistema (5) para $\mathbb{K}$ dado   necessária e suficiente quando a desigualdade (9)   verificada.

Definição 2 (Conjunto de nível, $\mathcal{L}_V$) O conjunto de nível $\mathcal{L}_V$ associado à candidata   função L-K (8)   definido como a intersecção dos conjuntos elipsoidais dados pelas matrizes $W(\tau_k)^{-1} = \Phi(\tau_k)$, $\tau_k \in 1, \dots, \bar{\tau}$.

Conforme apresentado por Jungers & Castelan (2011), o conjunto $\mathcal{L}_V$ pode ser calculado como indicado no lema a seguir.

Lema 2 Assuma uma função L-K dada por (8). O conjunto de nível $\mathcal{L}_V$ é dado por

$$\mathcal{L}_V = \bigcap_{\tau \in \{1, \dots, \bar{\tau}\}} \mathcal{E}(W(\tau)^{-1}), \quad (10)$$

em que $\mathcal{E}(W(\tau)^{-1})$, $\tau \in 1, \dots, \bar{\tau}$, são os conjuntos $\mathcal{E}(W(\tau)^{-1}) = \left\{ \bar{x}_k \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n}; \bar{x}_k^T W(\tau)^{-1} \bar{x}_k \leq 1 \right\}$. (11)

A prova desse lema   encontrada em (Jungers & Castelan, 2011). Destaca-se que neste artigo, o conjunto $\mathcal{L}_V$ é utilizado para representar o conjunto de condições iniciais seguras e, portanto, tem-se que $\varphi_{\tau,0} \in \mathcal{L}_V \subseteq \mathbb{S}$.

4 Resultados principais

Baseado no Lema 1 e na candidata   função L-K, é proposto o teorema a seguir que proporciona uma solução para o Problema 1.

Teorema 1 Se existirem matrizes $W(\tau) = W(\tau)^T > 0$, $\tau = 1, \dots, \bar{\tau}$, matriz diagonal $0 < S \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e matrizes $U \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n \times (\bar{\tau}+1)n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p \times (\bar{\tau}+1)n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{p \times (\bar{\tau}+1)n}$, tais que

$$\begin{bmatrix} -W(\tau^+) & \Lambda(\tau)U + \mathbb{B}Y & -\mathbb{B}S \\ \star & W(\tau) - U - U^T & Z^T \\ \star & \star & -2S \end{bmatrix} < 0, \quad (12)$$

$$e \begin{bmatrix} W(\tau) - U^T - U & (Y_{(\ell)} - Z_{(\ell)})^T \\ \star & -v_{0(\ell)}^2 \end{bmatrix} \leq 0, \quad (13)$$

sejam satisfeitas para τ , $\tau^+ = 1, \dots, \bar{\tau}$ e $\ell = 1, \dots, p$. Então, a matriz da lei de controle (3), calculada a partir de

$$\mathbb{K} = YU^{-1}, \quad (14)$$

É tal que o sistema (1) em malha fechada é localmente assintoticamente estável para qualquer sequência de condições iniciais pertencentes ao conjunto $\mathcal{L}_V \subseteq \mathbb{S}$.

Prova: Se (12)   verificada, então a positividade de $V(\varphi_{\bar{\tau},k}, \tau_k)$ dada em (8)   assegurada. Substituindo-se Y e Z por $\mathbb{K}U$ e GU , respectivamente, obt m-se

$$\begin{bmatrix} -W(\tau^+) & \Lambda(\tau)U + \mathbb{B}KU & -\mathbb{B}S \\ \star & W(\tau) - U - U^T & (GU)^T \\ \star & \star & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

Usando o fato $-U^T W(\tau)^{-1} U \leq W(\tau) - U^T - U$, veja (Geromel et al., 2007), pode-se obter

$$\tilde{\Theta}(\tau) = \begin{bmatrix} -W(\tau^+) & \Lambda(\tau)U + \mathbb{B}KU & -\mathbb{B}S \\ \star & -U^T W(\tau)^{-1} U & (GU)^T \\ \star & \star & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

Da regularidade de U e aplicando a transformada de congruência $\Theta(\tau) = \mathcal{T}^T \tilde{\Theta}(\tau) \mathcal{T}$ com $\mathcal{T} = \text{diag}\{\mathbf{I}, U^{-1}, S^{-1}\}$ e aplicando o complemento de Schur, obt m-se

$$\Theta(\tau) = \begin{bmatrix} -W(\tau)^{-1} & (GS^{-1})^T \\ \star & -2S^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\Lambda}(\tau)^T \\ -\mathbb{B}^T \end{bmatrix} W(\tau^+)^{-1} [\tilde{\Lambda}(\tau) \quad -\mathbb{B}] < 0, \quad (17)$$

em que $\tilde{\Lambda}(\tau) = \Lambda(\tau) + \mathbb{BK}$. Pr  e p s-multiplicando (17) por $X_k^T = [\bar{x}_k^T \quad \Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)^T]$

e sua transposta, respectivamente, substituir $\tilde{\Lambda}(\tau)\bar{x}_k - \mathbb{B}\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)$ por $\bar{x}_{k+1}$, veja (3)–(5), obtendo-se $\Omega_k \equiv \bar{x}_{k+1}^T W(\tau^+)^{-1} \bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k^T W(\tau) \bar{x}_k - 2\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)^T S^{-1}(\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k) - G\bar{x}_k) < 0$.

Sendo $W(\tau^+)^{-1} = \Phi(\tau_{k+1})$, $W(\tau)^{-1} = \Phi(\tau_k)$ e $S^{-1} = T(\tau_k)$, então $\Delta V(\varphi_{\bar{\tau},k}, \tau_k) - 2\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)^T T(\tau)(\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k) - G\bar{x}_k) \leq \Omega_k < 0$. Portanto, conclui-se que a factibilidade de (12) assegura a negatividade de $\Delta V(\varphi_{\bar{\tau},k}, \tau_k)$ e verifica a condição generalizada de setor (Lema 1). Assim, a partir do teorema de Lyapunov-Krasovskii (Stojanović et al., 2007), é assegurada a estabilidade local do sistema linear discreto no tempo com atraso de tempo variante no estado e saturação do sinal de controle (1) em malha fechada sob a lei de controle (2) com ganho dado por (14) sempre que a trajetória de estado evoluírem no interior do conjunto $\mathbb{S}$.

Assuma que além de (12), o conjunto de LMIs (13) também seja verificado. Dessa forma, pré- e pós-multiplicando (13) por $\text{diag}\{U^{-T}, 1\}$, e novamente utilizando o fato $-U^T W(\tau)^{-1} U \leq W(\tau) - U^T - U$, tem-se que (13) é um majorante de

$$\begin{bmatrix} -U^T W(\tau)^{-1} U & (\mathbb{K}_{(\ell)} - G_{(\ell)})^T \\ \star & -v_{0(\ell)}^2 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}. \quad (18)$$

Aplicando o complemento de Schur em (18) e pré- e pós-multiplicando o resultado por $\bar{x}_k^T$ e $\bar{x}_k$, respectivamente, obtém-se

$$-\bar{x}_k^T W(\tau_k)^{-1} \bar{x}_k + v_{0(\ell)}^{-2} (\mathbb{K}_{(\ell)} - G_{(\ell)})^T (\mathbb{K}_{(\ell)} - G_{(\ell)}) \leq \mathbf{0}. \quad (19)$$

Isso implica que o conjunto elipsoidal $\bigcap_{\tau \in \{1, \dots, \bar{\tau}\}} \mathcal{E}(W(\tau_k)^{-1})$, que pelo Lema 2 é

dado por $\{\bar{x}_k \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n}; \bar{x}_k^T W(\tau_k)^{-1} \bar{x}_k \leq 1\}$, está contido em $\mathbb{S}$. Portanto, verificando as LMIs (13), garante-se que $\mathcal{L}_V \subseteq \mathbb{S}$ e qualquer trajetória do sistema em malha fechada iniciando em $\mathcal{L}_V$ permanece em $\mathbb{S}$. $\square$

A matriz $\mathbb{K}$, na lei de controle (2), pode assumir três estruturas: em (3c), na qual se realimenta todos os vetores de estado, nenhuma restrição é feita sobre as matrizes U e Y . Para os ganhos dados em (3a) — em que realimenta-se somente o estado atual — e (3b) — com a realimentação dos vetores de estado atual e com atraso máximo — é necessário impor estrutura similares para as matrizes Y e U : $U = \text{diag}\{U_1, U_2, \dots, U_{\bar{\tau}+1}\}$ e a matriz Y , para a estrutura dada em (3a), é dada por $Y = [Y_1 \ \mathbf{0}]$, e para a segunda estrutura, dada em (3b), $Y = [Y_1 \ \mathbf{0} \ Y_{\bar{\tau}+1}]$.

As condições apresentadas no Teorema 1 podem ser extendidas para o caso de sistemas discretos no tempo com atrasos variantes no tempo e incertezas politópicas nas matrizes A , A_d e B . Nesse caso, as matrizes $W(\tau)$ e $\Lambda(\tau)$ terão um segundo argumento na variável de incerteza do politopo. Por exemplo, se $A = A(\xi) = \sum_{i=1}^N \xi_i A_i$, $A_d = A_d(\xi) = \sum_{i=1}^N \xi_i A_{d,i}$, $B = B(\xi) = \sum_{i=1}^N \xi_i B_i$, com $\xi \in \mathbb{R}^N$, $\xi_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^N \xi_i = 1$, então podem ser construídas $W(\tau, \xi)$ e $\Lambda(\tau, \xi)$ que, utilizando a convexidade resultam em condições convexas semelhantes às obtidas em (12)–(13). Na-

turalmente, a complexidade numérica dessas condições crescerá em função do número de vértices do politopo considerado. Essas condições não são, no entanto, apresentadas neste trabalho.

Um objetivo de interesse na aplicação do Teorema 1 é o de maximizar a região de condições iniciais seguras, ou seja, obter $\mathcal{L}_V \subseteq \mathbb{S}$ o maior possível. Uma alternativa para isso, consiste em maximizar

$$\mathcal{D}(H) \triangleq \{\bar{x}_k \in \mathbb{R}^n : 0 < \bar{x}_k^T H \bar{x}_k \leq 1\}, \quad (20)$$

que está incluso em $\mathcal{L}_V$. Tal inclusão é assegurada a partir de

$$\begin{bmatrix} H & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & W(\tau) \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \tau = 1, \dots, \bar{\tau}. \quad (21)$$

Portanto, um procedimento de otimização convexa pode ser proposto como

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{traço}(H) \\ \text{sujeito a} \quad & (12), (13) \text{ e } (21). \end{aligned} \quad (22)$$

4.1 Taxa limitada de variação do atraso

Um desdobramento imediato da formulação aqui proposta está no tratamento de taxas limitadas para a variação do atraso. Pelo conhecimento dos autores, esse problema ainda não foi tratado na literatura no âmbito dos sistemas discretos no tempo com atrasos no estado. Em processos físicos em geral, não é razoável assumir que o atraso possa variar de seu valor mínimo ao seu valor máximo em apenas uma iteração. Ao limitar a taxa de variação do atraso, espera-se, por exemplo, obter uma maior região de atração $\mathcal{E}(\Phi(\cdot))$.

Suponha, portanto, que a variação do atraso em amostras consecutivas seja limitada por

$$|\tau_{k+1} - \tau_k| \leq \Delta\tau_{\max}, \quad (23)$$

em que $\Delta\tau_{\max} < \bar{\tau}$. Assim, o Teorema 1 pode ser reescrito considerando $\tau = 1, \dots, \bar{\tau}$ e $\tau^+ = \max(1, \tau - \Delta\tau_{\max}), \dots, \min(\bar{\tau}, \tau + \Delta\tau_{\max})$.

5 Estudo de Caso

Com a finalidade de explorar as condições propostas neste trabalho propõe-se o estudo de um sistema escalar dado por

$$x_{k+1} = 2x_k - 0.1x_{k-\tau_k} + \text{sat}(v_k), \quad y_k = x_k. \quad (24)$$

Inicialmente suponha um atraso máximo $\bar{\tau} = 2$. Como é visto adiante, essa escolha permite ao leitor uma melhor percepção das condições propostas neste trabalho. Observe também que para um atraso fixo $\tau = 1$, esse sistema possui um autovalor fora do círculo unitário e, portanto, trata-se de um sistema instável. Assuma uma saturação do sinal de controle dada por $|v_k| \leq v_0 = 0.7$.

Para obter a maior região de atração possível, foi aplicado o problema de otimização dado em (22) e sendo obtido $\mathbb{K} = [-1.9401 \ 0.0713 \ 0.05]$. Ou seja, a lei de controle (2) com (3c), $v_k = -1.9401x_k + 0.0713x_{k-1} + 0.05x_{k-2}$ estabiliza o sistema (24). Na Figura 1 são mostrados 4 gráficos referentes ao elipsóide da região de atração obtida e, a título de comparação, a correspondente bola comumente utilizada na literatura para caracterizar a região das condições iniciais. Os 3 gráficos mais à direita correspon-

dem às projeções da região de atração e da caracterização da norma máxima das condições iniciais (portanto referente   bola) nos três planos do espaço. Utilizando um grid de pontos em $\mathbb{R}^3$, pode-

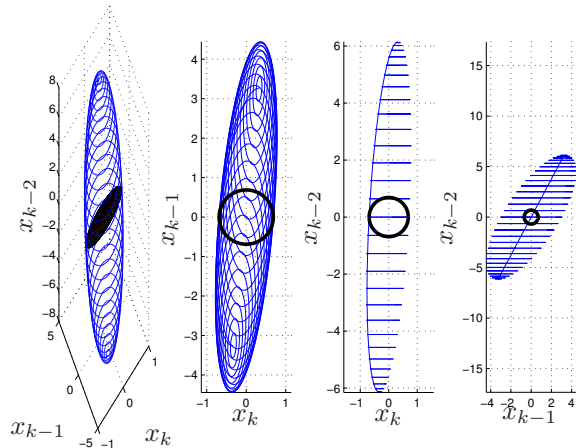


Figura 1: Região de Atração obtida: Região de Atração $\mathcal{E}(\Phi(\cdot))$ e sub-região da Relaxação da Bola $\mathcal{B}(\Phi(\cdot))$.

se avaliar a proporção dos volumes da bola e do elipsóide. Neste caso, verificou-se que o volume do elipsóide   3952.5% maior que o volume da bola, ilustrando uma significativa redução de conservadorismo na estimação da região de condições iniciais. Foi verificado também que essa proporção   reduzida na medida em que a norma de A_d se aproxima da norma de A .

No intuito de avaliar a saturação do sinal de controle, o controlador obtido acima foi implementado considerando a condição inicial $x_{-2} = x_{-1} = 0$ e $x_0 = 0.6885$, que está localizada na superfície do elipsóide mostrado na Figura 1. A correspondente resposta temporal é apresentada na Figura 2, na qual pode-se constatar a saturação do atuador nas amostras de $k = 3$ a $k = 6$ e também a estabilização do sistema.

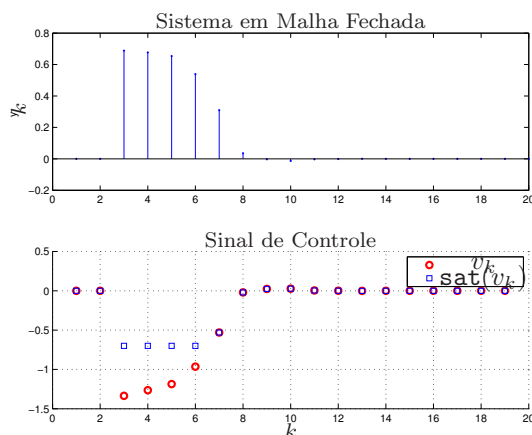


Figura 2: Resposta do sistema para condição inicial $x_{-2} = x_{-1} = 0$ e $x_0 = 0.6885$, sinal de controle sem saturação (o) e sinal do atuador ($\square$).

Considere o sistema (24) em que a matriz A_d é multiplicada por um fator δ :

$x_{k+1} = 2x_k - 0.1\delta x_{k-\tau_k} + \text{sat}(v_k)$. Variou-se o valor de δ entre 1 e 7 e para cada valor foi resolvido o problema (21) para cada estrutura de ganho em (3) e calculado o volume dos elipsóides obtidos. O elipsóide de maior volume corresponde à estrutura (3c) e o menor   estrutura (3a). São apresentadas na Figura 3 as razões dos volumes $\mathcal{V}_{(3c)}/\mathcal{V}_{(3a)}$ ($\square$) e $\mathcal{V}_{(3b)}/\mathcal{V}_{(3a)}$ ($\circ$), em que os subíndices referem-se aos números das equações que definem as estruturas dos ganhos utilizados. Note que, quanto maior a norma de A_d mais

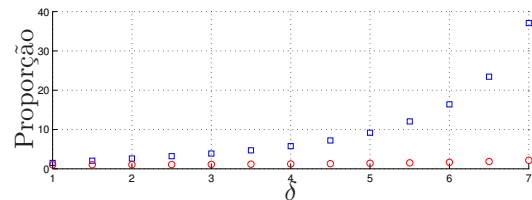


Figura 3: Razão dos volumes $\mathcal{V}_{(3c)}$ ($\square$) e $\mathcal{V}_{(3b)}$ ($\circ$) em relação ao volume $\mathcal{V}_{(3a)}$ em função de δ .

relevante passa a ser a realimentação do último estado atrasado. Em particular, para $\delta = 7$ foram obtidos $\mathbb{K}_{(3c)} = [-1.9401 \ 0.0713 \ 0.0500]$, $\mathbb{K}_{(3a)} = [-1.6204 \ 0 \ 0]$, $\mathbb{K}_{(3b)} = [-1.5955 \ 0 \ 0.0180]$. Cada um desses ganhos gera um elipsóide respectivamente denotados por $\mathcal{E}_{(3c)}$, $\mathcal{E}_{(3a)}$ e $\mathcal{E}_{(3b)}$. Esses elipsóides têm suas interseções com os planos do espaço de estado apresentados na Figura 4. Note que, como esperado, a menor região, marcada com *, corresponde à realimentação definida por (3a) e a maior, marcada com $\times$,   realimentação completa do estado atrasado, (3c). Utilizando um *grid* constatam-se as seguintes relações aproximadas de volume, $\mathcal{V}(\cdot)$: $\mathcal{V}(\mathcal{E}_{(3b)}) \approx 2.159\mathcal{V}(\mathcal{E}_{(3a)})$ e $\mathcal{V}(\mathcal{E}_{(3c)}) \approx 37.03\mathcal{V}(\mathcal{E}_{(3a)})$. O maior volume obtido no elipsóide $\mathcal{E}_{(3c)}$ é explicado pela estrutura de $\mathbb{K}_{(3c)}$ que realimenta todo o estado atrasado do sistema.

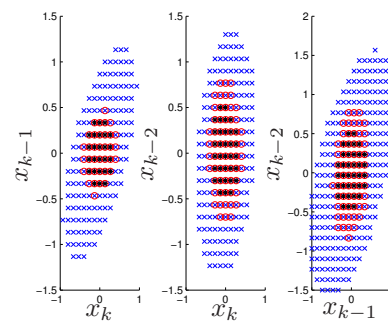


Figura 4: Corte nas três dimensões das Regiões de Atração: $\mathcal{E}_{(3c)}$ ($\times$), $\mathcal{E}_{(3a)}$ (*) e $\mathcal{E}_{(3b)}$ ($\circ$).

Uma última investigação é feita considerando diferentes taxas de variação no atraso τ_k . Para isso, o problema de otimização (22) foi aplicado

ao sistema (24) para valores de atraso máximo na lista $\bar{\tau} \in \{3, 4, 5, 6\}$ e considerando taxas de variação do atraso conforme discutido na subseção 4.1, ou seja, fazendo $\tau = 1, \dots, \bar{\tau}$ e $\tau^+ = \max(1, \tau - \Delta\tau_{\max}), \dots, \min(\bar{\tau}, \tau + \Delta\tau_{\max})$.

Na Figura 5 são mostrados os aumentos percentuais na região de atração em relação ao caso com maior taxa possível de variação do atraso, isto é, $|\Delta\tau_k|_{\max} = \bar{\tau} - 1$. Por questões de escala e visualização, não foi incluído nessa figura o aumento da região de atração proporcionado para o caso de atraso incerto e invariante no tempo, isto é, pela limitação $|\Delta\tau|_{\max} = 0$. Tal limitação representou os maiores aumentos na região de atração, que foram de 31.4%, 66.2%, 141% e 279.8% para $\bar{\tau} = 3$, $\bar{\tau} = 4$, $\bar{\tau} = 5$ e $\bar{\tau} = 6$, respectivamente. Em todos os casos, observa-se que ao reduzir a variação máxima do atraso, o volume da região de condições iniciais aumenta.

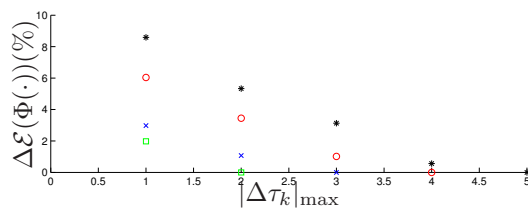


Figura 5: Aumento percentual da Região de Atração, em função da limitação da taxa de variação do atraso, para $\bar{\tau} = 3$ ($\square$), $\bar{\tau} = 4$ ($\times$), $\bar{\tau} = 5$ ($\circ$) e $\bar{\tau} = 6$ ($*$).

6 Conclusão

Foram investigadas condições convexas sob a forma de LMIs para a síntese de controladores que estabilizam localmente sistemas discretos no tempo com atraso variante no tempo presente no estado e sujeito a saturação de atuadores. A abordagem proposta permite uma nova caracterização da região de atração para as condições iniciais do sistema, assegurando que as trajetórias do sistema em malha fechada convergem para a origem. Um desdobramento, consiste na obtenção de condições de síntese que consideram a taxa de variação do atraso pela primeira vez na literatura para essa classe de sistemas. As condições desenvolvidas são dependentes do atraso e as leis de controle propostas são do tipo independentes do atraso. Um sistema escalar é usado para ilustrar como esta proposta pode produzir controladores que levam a regiões de condições iniciais muito maiores que utilizando abordagens tradicionais da literatura.

Referências

Fridman, E. & Shaked, U. (2005). Stability and guaranteed cost control of uncertain discrete delay systems, *Int. J. of Control* **78**(4): 235–246.

Geromel, J. C., Korogui, R. H. & Bernussou, J. (2007). $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ robust output feedback control for continuous time polytopic

systems, *IET Cont. Theory and Applications* pp. 1541–1549.

Ghiggi, I., Gomes da Silva Jr., J. M., Leite, V. J. S. & Miranda, M. F. (2008). Estabilização de sistemas discretos com atrasos variantes no tempo e saturação nos atuadores, *Anais do XVII Cong. Bras. de Automática*.

Gomes da Silva Jr., J. M. & Tarbouriech, S. (2005). Antiwindup design with guaranteed regions of stability: An LMI-based approach, *IEEE Trans. on Aut. Control* pp. 106–111.

Gu, K., Kharitonov, V. L. & Chen, J. (2003). *Stability of Time-Delay Systems*, Birkhäuser Boston.

Hetel, L., Daafouz, J. & Iung, C. (2008). Equivalence between the Lyapunov-Krasovskii functionals approach for discrete delay systems and that of the stability conditions for switched systems, *Science Direct* pp. 697–705.

Jungers, M. & Castelan, E. B. (2011). Gain-scheduled output control design for a class of discrete-time nonlinear systems with saturating actuators, *Syst. & Cont. Letters* **60**(3): 315–325.

Lin, Z. & Saberi, A. (1993). Semi-global exponential stabilization of linear systems subject to input saturation via linear feedback, *Syst. & Cont. Letters* **21**: 225–239.

Mahmoud, M. S. (2000). *Robust Control and Filtering for Time-Delay Systems*, Control Engineering Series, Marcel Dekker, Inc., New York.

Michiels, W. & Niculescu, S. (2007). *Stability and Stabilization of Time-Delay Systems*, SIAM.

Miranda, M. F. & Leite, V. S. J. (2011). Robust $\mathcal{H}_\infty$ state feedback control of discrete-time systems with state delay: an LMI approach, *J. of the Franklin Inst.* **348**: 568–588.

Montagner, V. F., Leite, V. J. S., Tarbouriech, S. & Peres, P. L. D. (2005). Stability and stabilizability of discrete-time switched linear systems with state delay, *Proc. of the American Cont. Conf. 2005*, Vol. 6, pp. 3806–3811.

Niculescu, S.-I., Dion, J.-M. & Dugard, L. (1996). Robust stabilization for uncertain time-delay systems containing saturating actuators, *IEEE Trans. on Aut. Control* **41**: 742–747.

Stojanović, S. B., Debeljković, D. L. & Mladenović, I. (2007). A Lyapunov-Krasovskii methodology for asymptotic stability of discrete time delay systems, *Serbia J. of Elect. Eng.* **4**(2): 109–117.

Tarbouriech, S., Garcia, G., Gomes da Silva Jr., J. M. & Queinnec, I. (2011). *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*, Springer-Verlag London.

Xu, S., Feng, G., Zou, Y. & Huang, J. (2012). Robust controller design of uncertain discrete time-delay system with input saturation and disturbances, *IEEE Trans. on Aut. Control* **57**(10): 2604–2609.