

RASTREAMENTO DE ÂNGULO DE ESTERÇO E VELOCIDADE LONGITUDINAL PARA UM VEÍCULO INCLINÁVEL DE TRÊS RODAS

LEANDRO YOSHIO MORITA*, NESTOR ROQUEIRO*, HECTOR BESSA SILVEIRA*

*Departamento de Automação e Sistemas, Universidade Federal de Santa Catarina
Florianópolis, Santa Catarina, Brasil

Emails: leandro.morita@posgrad.ufsc.br, nestor.roqueiro@ufsc.br,
hector.silveira@ufsc.br

Abstract— This work treats the problem of tracking the steering angle and the longitudinal velocity desired by the driver of a tilting three-wheeled vehicle, which uses a STC (Steering Tilt Control) system, while keeping the tilting angle within a safety margin. Differently from the common practice adopted in the literature, in which controller design is carried out on simplified models of reduced order for the vehicle, this work proposes: (a) a feedback linearization designed directly on a model with 9 degrees-of-freedom for the tilting vehicle, and (b) a LQR designed on the linearized system of such model. The obtained closed-loop simulation results for both of these controllers are presented under nominal conditions and under external disturbances and parametric uncertainties.

Keywords— Tilting vehicle, Tracking, Feedback linearization, LQR.

Resumo— Este trabalho trata do problema de rastreamento do ângulo de esterço e da velocidade longitudinal desejadas pelo condutor de um veículo inclinável de três rodas, o qual utiliza um sistema STC (*Steering Tilt Control*), ao mesmo tempo em que o ângulo de inclinação do veículo é mantido dentro de uma margem de segurança. Diferentemente da prática comum adotada na literatura, em que o projeto dos controladores é realizado sobre modelos simplificados de ordem reduzida do veículo, este trabalho propõe: (a) uma realimentação linearizante projetada diretamente sobre um modelo de 9 graus de liberdade do veículo inclinável, e (b) um regulador linear quadrático projetado sobre o sistema linearizado de tal modelo. São apresentados os resultados de simulação obtidos em malha-fechada com esses dois controladores sob condições nominais e sob perturbações externas e incertezas paramétricas.

Palavras-chave— Veículo inclinável, Rastreamento, Realimentação linearizante, LQR.

1 Introdução

Um problema que tem se agravado nas últimas décadas nas metrópoles mundiais é o grande número de congestionamentos, o qual possui como causa principal o aumento na quantidade de automóveis em circulação pois estes ocupam um espaço físico considerável nas rodovias e geralmente transportam um número relativamente baixo de passageiros. Uma maior quantidade de veículos em circulação causam um incremento no gasto de tempo e de combustível, aumentando, por sua vez, a emissão de gases poluentes. Diante disso, os pesquisadores buscam desenvolver soluções alternativas para o problema da mobilidade urbana, onde os triciclos surgem como uma solução promissora na busca por veículos relativamente pequenos e com impacto ambiental reduzido. Inicialmente, os triciclos foram projetados como veículos esportivos, mas ao longo dos anos foram aprimorados para o transporte de pessoas sob a perspectiva de melhorar a mobilidade urbana (Chiou et al., 2009; Kidane et al., 2010).

A Fig. 1a e 1c mostram a vista frontal e lateral do protótipo de um veículo inclinável de três rodas desenvolvido no Laboratório de Inovação (LI) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), o qual apresenta duas rodas dianteiras e uma roda traseira, e possibilita o transporte do condutor e de um passageiro em série. Para que

o veículo possa fazer curvas em alta velocidade, é necessário que o corpo do protótipo se incline de maneira semelhante a uma motocicleta. Isto ocorre por meio da variação do ângulo de cambagem das rodas dianteiras, que é o ângulo entre o plano xy e o plano do pneu. O ângulo de inclinação do veículo corresponde ao ângulo de rolagem ϕ mostrado na Fig. 1c. Desse modo, o protótipo utiliza um sistema STC (*Steering Tilt Control*). No entanto, uma dificuldade técnica é que esse veículo se comporta como um pêndulo invertido com relação à dinâmica de ϕ , tornando a sua condução em malha-aberta inviável. Portanto, são necessárias estratégias de controle em malha-fechada para que o veículo possa ser conduzido de maneira relativamente simples e com segurança para os passageiros.

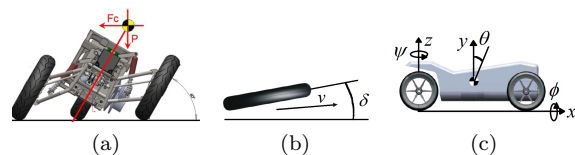


Figura 1: (a) Vista frontal (esquerda) do protótipo de um veículo inclinável de três rodas desenvolvido no LI-UFSC, (b) ângulo de esterço (δ) e (c) ângulo de rolagem (ϕ), guinada (θ) e arfagem (ψ) do veículo.

O ângulo de esterço (δ) das duas rodas dianteiras do protótipo é mostrado na Fig. 1b, e $u = \dot{x}$

é a velocidade longitudinal do veículo.

O objetivo principal deste trabalho é projetar controladores em malha-fechada que mantenham o ângulo de esterço δ e velocidade longitudinal u do veículo relativamente próximas das trajetórias δ_d e u_d desejadas pelo condutor, ao mesmo tempo em que o ângulo de inclinação ϕ do veículo é mantido dentro de uma margem de segurança pré-estabelecida. Com isso, o veículo poderá ser conduzido com facilidade e segurança em malha-fechada. A idéia principal é que os controladores projetados forcem o ângulo de inclinação ϕ e a velocidade u do veículo a rastreamento determinadas trajetórias de referência ϕ_r e u_r adequadas, respectivamente, com $|\phi_r(t)|$ evoluindo dentro da margem de segurança pré-estabelecida de $\phi_{max} = \pi/6$ ($= 30^\circ$). A geração de tais trajetórias ϕ_r e u_r é realizada a partir dos comandos referentes ao ângulo de esterço δ_d e à velocidade u_d enviados pelo condutor, e de um modelo simplificado para a dinâmica de ϕ , representado por um modelo de 2-GL (graus de liberdade) de uma bicicleta (a Seção 3 detalha essa estratégia de controle e descreve como a mesma resolve o referido problema de controle). No entanto, ressaltamos que os controladores serão projetados com base em um modelo não-linear com 9-GL do protótipo de um veículo inclinável de três rodas descrito anteriormente. O problema de controle descrito acima, foi resolvido em (Gaudenzi et al., 2013; Faria et al., 2010) pelo uso de controladores por modos deslizantes projetados sobre um modelo de 2-GL de uma bicicleta, e os ganhos do controlador para o modelo de 9-GL do veículo inclinável de três rodas foram ajustados heurísticamente. Já em (Morita et al., 2016) foram utilizados controladores baseados em modos deslizantes projetados diretamente sobre o modelo do veículo de 9-GL.

O controle de inclinação para veículos de quatro rodas foi tratado nos trabalhos (Mourad et al., 2014; Mourad et al., 2012; Mourad et al., 2011), com base em controle LQR, LPV (Linear Parameter-Varying) e H_2 robusto, respectivamente. O projeto desses controladores foi realizado sobre o sistema linearizado de um modelo de 3-GL de uma bicicleta, já (Claveau et al., 2014) foi projetado um controlador baseado em *flatness* sobre o modelo não-linear da bicicleta, as estratégias de controle nestes trabalhos dependem de um modelo interno linear para representar o comportamento do condutor, que é de certo modo artificial. Diferentemente destes trabalhos, neste artigo projetaremos uma realimentação linearizante diretamente sobre o modelo de 9-GL do veículo e um regulador linear quadrático (LQR) sobre o sistema linearizado de tal modelo, sem a necessidade de um modelo interno referente ao condutor.

Descreveremos agora organização deste trabalho. Apresentamos na Seção 2 o referido modelo não-linear com 9-GL do protótipo de um veículo

inclinável de três rodas, juntamente com o sistema linearizado associado que será utilizado para se projetar um controlador LQR. A Seção 3 explica em detalhes a estratégia de controle em malha-fechada adotada para se resolver problema de controle descrito acima. Na Seção 4, projetaremos os seguintes controladores para rastreamento das trajetórias de referência ϕ_r e u_r : (a) um controlador LQR através de desigualdades matriciais lineares (LMIs), e (b) um controlador não-linear baseado em realimentação linearizante. Os resultados de simulação obtidos em malha-fechada são mostrados e analisados na Seção 5.

2 Dinâmica Não-Linear e Linearizada do Veículo Inclinável de Três Rodas

Baseado na metodologia Euler-Lagrange multicorpos, a dinâmica do protótipo de um veículo inclinável de três rodas descrito na Introdução é dada pelo seguinte modelo não-linear com 9-GL:

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})[\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q})\mathbf{q} - \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)], \quad (1)$$

onde $\mathbf{q} = (x, y, z_1, z_2, z_3, z_4, \psi, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^9$ e $\dot{\mathbf{q}} = (u, v, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3, \dot{z}_4, \dot{\psi}, \dot{\phi}, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^9$ são os vetores de coordenadas e velocidades generalizadas, respectivamente, x e y são respectivamente os movimentos longitudinal e transversal, z_1 o movimento vertical da roda traseira, z_2 o movimento vertical do corpo principal do veículo, z_3 e z_4 são respectivamente os movimentos verticais das rodas dianteiras direita e esquerda, ψ , ϕ e θ são os ângulos de guinada, rolagem e arfagem, respectivamente (veja a Fig. 1c), $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^9$ é o vetor de excitação, e $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ e $\mathbf{K}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ são respectivamente as matrizes de inércia, amortecimento e rigidez. Temos que $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ é simétrica e positiva definida, para $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^9$. Detalhes completos da modelagem do veículo são apresentados em (Gaudenzi et al., 2013). De (1), temos que a dinâmica da velocidade longitudinal $u = \dot{x}$ e inclinação ϕ do veículo são descritas por

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f_1(u) + k_{21}T_m, \\ \dot{\phi} &= f_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + d_2(\phi, t) + g_2(u, \phi)\delta, \end{aligned} \quad (2)$$

onde

$$\begin{aligned} f_1(u) &= -k_{19} - k_{20}u^2, \\ f_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{\sin(\phi)}{\alpha(\phi)} \left[k_1\dot{z}_1 + k_2\dot{z}_2 + k_3(\dot{z}_3 + \dot{z}_4) \right. \\ &\quad \left. + k_4\theta + k_5z_1 + k_6z_2 + k_7(z_3 + z_4) + k_8\phi\sin(\phi) \right] \\ &\quad + \frac{\cos(\phi)}{u\alpha(\phi)} \left[k_{12}\phi u - k_{10}\dot{\psi} + k_{12}\phi u z_2 - k_{11}\dot{y} \right] \\ &\quad + \frac{1}{u\alpha(\phi)} \left[+ k_{15}\dot{\psi} + k_{16}\dot{y} + k_{18}\dot{\phi}u \right], \\ d_2(\phi(t), t) &= -k_9 \frac{\sin(\phi)}{\alpha(\phi)} \left[F_1(t) + F_2(t) + F_3(t) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\alpha(\phi)} \left[\cos(\phi)(k_{13}\cos(\phi) + k_{14})V_w^2(t)\text{sign}(V_w(t)) \right. \\ &\quad \left. + k_{17}(F_2(t) + F_3(t)) \right], \\ g_2(u, \phi) &= \frac{k_{20}u^2\cos(\phi) + k_9\cos(\phi) - k_5}{\alpha(\phi)}, \\ \alpha(\phi) &= \cos^2(\phi) + 0.8255\cos(\phi) + 9.3597, \end{aligned} \quad (3)$$

os controles são o ângulo de esterço δ das rodas dianteiras (vide Fig. 1b) e o torque mecânico T_m aplicado na roda traseira para produzir o movimento longitudinal do veículo, V_w é a velocidade dos ventos laterais sobre o veículo, e F_1, F_2, F_3 são as forças exercidas nas rodas pelo solo. Os valores dos parâmetros $k_1, \dots, k_{21} \in \mathbb{R}$ são mostrados na Tabela 1, sendo determinados a partir dos parâmetros físicos do protótipo considerados em (Gaudenzi et al., 2013). A função g_2 é positiva para $|\phi| < 90^\circ$ (graus) e $u > 0$. Ressaltamos que, em (2), $\dot{u}$ depende somente de u e de T_m , e $\ddot{\phi}$ não depende de T_m . A dinâmica das demais variáveis do vetor de estado $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ são omitidas por falta de espaço.

Tabela 1: Valores dos coeficientes em (3).

$k_1 = 124.41$	$k_2 = 207.36$	$k_3 = 41.47$
$k_4 = 755.5$	$k_5 = 12200$	$k_6 = 897.34$
$k_7 = 13200$	$k_8 = 1340$	$k_9 = 0.1375$
$k_{10} = 8940$	$k_{11} = 2710$	$k_{12} = k_8$
$k_{13} = 0.526$	$k_{14} = 1.02$	$k_{15} = 755.92$
$k_{16} = 229.06$	$k_{17} = k_9$	$k_{18} = k_3$
$k_{19} = 0.09$	$k_{20} = 0.0005$	$k_{21} = 0.007$

2.1 Modelo Linearizado

Na sequência será feita a linearização de (1). Por construção, o lado direito de (1) não depende de x e y . Por simplicidade, nesta seção consideraremos $\mathbf{X} = ((z_1, z_2, z_3, z_4, \psi, \phi, \theta), \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{16}$ como vetor de estado e $\mathbf{U} = (\delta, T_m) \in \mathbb{R}^2$ como vetor de controle, e desconsideraremos perturbações externas, isto é, $F_1 \equiv F_2 \equiv F_3 \equiv V_w \equiv 0$ em (2)–(3). Com isso, é possível rescrever (1) como

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{U}), \quad (4)$$

onde $\mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = ((\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3, \dot{z}_4, \dot{\psi}, \dot{\phi}, \dot{\theta}), \ddot{\mathbf{q}})$. Vamos agora linearizar (4) no ponto de operação $(\mathbf{X}^*, \mathbf{U}^*)$ correspondente a $u^* = 15 \text{ ms}^{-1}$ (velocidade longitudinal) e $\phi^* = 0^\circ$ (inclinação nula). As demais componentes de $(\mathbf{X}^*, \mathbf{U}^*)$ satisfazem $\mathbf{G}(\mathbf{X}^*, \mathbf{U}^*) = 0$, sendo omitidas por questão de espaço. O modelo linearizado do protótipo é então dado por

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{A} \Delta \mathbf{X} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{U}, \\ \Delta \mathbf{Y} &= \mathbf{C} \Delta \mathbf{X}, \end{aligned} \quad (5)$$

onde $\Delta \mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}^* \in \mathbb{R}^{16}$ é o vetor de estado, $\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U} - \mathbf{U}^* \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de controle e $\Delta \mathbf{Y} = (\phi - \phi^*, u - u^*) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de saída. Desse modo, $\mathbf{C} = (\mathbf{e}_6', \mathbf{e}_8')'$, onde $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{16}\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^{16}$. As matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ não são mostradas por falta de espaço. Pode-se mostrar que o modelo linearizado acima é controlável, que é uma propriedade fundamental para se utilizar um controlador LQR, porém não é detectável. A matriz de transferência é diagonal:

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1701.2(s+0.8163)}{(s+45.73)(s-3.363)(s+0.8693)} & 0 \\ 0 & \frac{0.007}{(s+0.015)} \end{bmatrix}.$$

3 Estratégia de Controle

Nesta seção, a estratégia de controle em malha-fechada adotada é descrita. O objetivo principal é projetar controladores em malha-fechada que mantenham o ângulo de esterço δ e a velocidade longitudinal u do veículo relativamente próximas das trajetórias δ_d e u_d desejadas pelo condutor, respectivamente, ao mesmo tempo em que o ângulo de inclinação ϕ do veículo permanece dentro de uma margem de segurança. Ressaltamos que não há acoplamento mecânico entre δ_d e δ : sistema *drive-by-wire*. Assumimos que todos os estados $\mathbf{X}(t)$ do veículo podem ser realimentados. O diagrama de blocos da estratégia de controle em malha-fechada é mostrado na Fig. 2, que é a mesma metodologia utilizada em (Gaudenzi et al., 2013). O condutor estabelece o ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ e a velocidade desejada $u_d(t)$, os quais dependem de $\delta(t)$, $u(t)$ e das demais variáveis de estado de $\mathbf{X}(t)$. A partir de δ_d e u_d , o *Gerador de Trajetórias* determina as trajetórias de referência ϕ_r e u_r , com $|\phi_r| \leq \phi_{max} = \pi/6$ (maiores detalhes na sequência). Na malha interna do diagrama há o *Controlador de Rastreamento* que determina os sinais controles $\delta(t)$ e $T_m(t)$ de modo que $\phi(t)$ e $u(t)$ rastreiem assintoticamente as trajetórias de referência $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$, respectivamente. O condutor faz o papel de uma malha externa de controle.

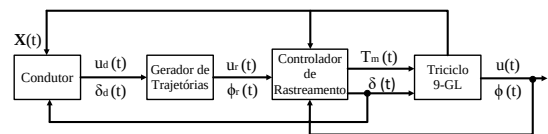


Figura 2: Diagrama da estratégia de controle.

Para o *Gerador de Trajetórias*, considere que δ_d e u_d são amostrados com um determinado período $T > 0$. As trajetórias de referências $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$ são escolhidas como funções lineares por partes dadas por:

$$\begin{aligned} \phi_r(t) &= \phi_r(kT) + \frac{\phi_r((k+1)T) - \phi_r(kT)}{T} (t - kT), \\ u_r(t) &= u_r(kT) + \frac{u_r((k+1)T) - u_r(kT)}{T} (t - kT), \end{aligned} \quad (6)$$

com $t \in [kT, (k+1)T)$, $k \in \mathbb{N}$. Por construção, $\ddot{\phi}_r \equiv 0$. Resta-nos então especificar os valores de $\phi_r(kT)$, $\phi_r((k+1)T)$, $u_r(kT)$ e $u_r((k+1)T)$. Para isto, nos basearemos em um modelo simplificado de ordem reduzida para ϕ : o modelo de uma bicicleta de 2-GL, mostrado a seguir

$$\ddot{\phi} = \frac{g}{h} \sin(\phi) + \frac{1}{lh} \cos(\phi) u^2 \delta, \quad (7)$$

onde g é a aceleração da gravidade e l o comprimento da bicicleta. Tal modelo simplificado captura as principais características da dinâmica de $\phi(t)$ do triciclo (veja (Gaudenzi et al., 2013) para

maiores detalhes). Note a semelhança de (7) com (2). Relembre que $\ddot{\phi}_r \equiv 0$. Portanto, tomando por base (7), é razoável escolhermos

$$\phi_r(kT) = -\tan^{-1} \left(\frac{u_d^2(kT) \delta_d(kT)}{gl} \right). \quad (8)$$

Seja $\phi_{max} = \pi/6$ o máximo ângulo admissível para $|\phi(t)|$ de modo a se conduzir o veículo com segurança. Se em (8) tivermos $|\phi_r(kT)| \leq \phi_{max}$, especificamos então $u_r(kT) = u_d(kT)$. Caso contrário, escolha $\phi_r(kT) = -\text{sign}(\delta(kT)) \phi_{max}$ e

$$u_r(kT) = \sqrt{-\frac{\tan(\phi_r(kT)) gl}{\delta_d(kT)}}, \quad (9)$$

ou seja, a velocidade desejada $u_d(kT)$ é penalizada de modo a manter o valor do ângulo de esterço desejado $\delta_d(kT)$. No que, neste caso, temos que $u_r(kT) \neq u_d(kT)$. A mesma idéia é aplicada para determinar $\phi_r((k+1)T)$ e $u_r((k+1)T)$. Para isto, atrasamos as amostras de $\delta_d(kT)$ e $u_d(kT)$ por $T \cong 0$, e em (8) e (9) substituímos $\delta_d(kT)$ e $u_d(kT)$ por $\delta_d((k-1)T)$ e $u_d((k-1)T)$, respectivamente. Por exemplo, se em (8) tivermos $|\phi_r(kT)| \leq \phi_{max}$, então tomamos $u_r(kT) = u_d((k-1)T)$, e assim por diante.

Por construção, $\dot{\phi}_r \equiv 0$, $|\phi_r(t)| \leq \phi_{max}$, e em geral temos $u_r(t) \cong u_d(t)$. Sob rastreamento perfeito em malha-fechada, ou seja, $\phi(t) = \phi_r(t)$ e $u(t) = u_r(t)$, a dinâmica simplificada para $\phi(t)$ em (7) juntamente com (8) e (9) asseguram que $\delta(t) \cong \delta_d(t)$, de modo que para o modelo completo do veículo com 9-GL é razoável esperarmos que $\delta(t) \cong \delta_d(t)$, resolvendo-se assim o problema de controle. A próxima seção descreve o projeto do *Controlador de Rastreamento* por 2 métodos diferentes: LQR e realimentação linearizante.

4 Projeto do Controlador de Rastreamento

Sejam $u_r(t)$ e $\phi_r(t)$ as trajetórias de referências em (6) determinadas pelo *Gerador de Trajetórias* da Figura 2 acima, e considere os erros de rastreamento $e_1 = u - u_r$ e $e_2 = \phi - \phi_r$ correspondentes, respectivamente. Para o *Controlador de Rastreamento*, propomos neste trabalho: projetar um regulador linear quadrático (LQR) com base no sistema linearizado (5), conforme (Laurent El Ghaoui, 1994); e projetar uma realimentação linearizante (RL) diretamente na dinâmica não-linear (2)–(3), conforme (Isidori, 1995). Para projetarmos estes controladores, consideraremos que $F_1 \equiv F_2 \equiv F_3 \equiv V_\omega \equiv 0$ em (2)–(3), ou seja, que não há perturbações externas. Tais perturbações serão consideradas nos resultados de simulação da Seção 5.

4.1 LQR

As trajetórias de referência $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$ em (6) são lineares por partes. Desse modo, o duplo integrador é um modelo interno para tais referências.

O sistema aumentado resultante é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_{mf}\xi + B_{mf}\Delta U - B_r r, \\ \Delta Y &= C\Delta X, \end{aligned} \quad (10)$$

onde $\xi = (\Delta X, x_m) \in \mathbb{R}^{20}$ é o vetor de estado aumentado, $x_m \in \mathbb{R}^4$ é o estado do modelo interno, $r = (\phi_r, u_r)$ é o vetor de referência, e as matrizes A_{mf} , B_{mf} , B_r são determinadas diretamente a partir de (5) e do modelo interno. Nosso objetivo é determinar uma realimentação de estados $\Delta U = K\xi$ para (10) que minimize a função custo $J = \min_{\Delta U} \int_0^\infty z'(t)z(t)dt$, onde $z = C_z\xi + D_z\Delta U$, e C_z , D_z são matrizes diagonais definidas positivas, correspondentes às ponderações sobre os estados e os controles, respectivamente. De acordo com a metodologia descrita em (Laurent El Ghaoui, 1994), recaímos na seguinte LMI (*Linear Matrix Inequality*):

$$\begin{aligned} \min_{Q, \Upsilon} \lambda \text{ sujeito a : } \\ \begin{bmatrix} \lambda & \xi'(0) \\ \xi(0) & Q \end{bmatrix} &> 0 \\ \begin{bmatrix} QA'_{mf} + A_{mf}Q + B_{mf}\Upsilon + (B_{mf}\Upsilon)' & N \\ C_zQ + D_z\Upsilon & -I \end{bmatrix} &< 0. \end{aligned} \quad (11)$$

onde $N = (C_zQ + D_z\Upsilon)'$, $\xi(0)$ é a condição inicial, e I é a matriz identidade (de ordem adequada). Sejam $Q = Q'$ e Υ soluções da LMI (11). Então, a matriz de ganho K que minimiza o funcional J é dada por $K = \Upsilon Q^{-1}$. Determinamos assim a seguinte lei de controle LQR:

$$\Delta U = (\delta - \delta^*, T_m - T_m^*) = K\xi = \Upsilon Q^{-1}\xi. \quad (12)$$

4.2 Realimentação Linearizante (RL)

Relembre que, em (2)–(3), temos $g_2(\phi, u) > 0$ para $|\phi| < 90^\circ$ e $u > 0$. Assim, as saídas $y_1 = u$ e $y_2 = \phi$ possuem grau relativo $\rho_1 = 1$ e $\rho_2 = 2$, respectivamente. Portanto, é imediato que as seguintes realimentações de estado não-lineares

$$T_m = \frac{1}{k_{21}} [-f_1(u) + v_1], \quad \delta = \frac{1}{g_2(u, \phi)} [-f_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + v_2] \quad (13)$$

asseguram que $\dot{u} = v_1$ e $\ddot{\phi} = v_2$ em malha-fechada, onde $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ são as novas entradas. Escolhendo $v_1 = \dot{u}_r - c_1 e_1$, $v_2 = \ddot{\phi}_r - c_2 \dot{e}_2 - c_3 e_2 - c_4 \int e_2$, temos que as dinâmicas dos erros de rastreamento em malha-fechada são dadas por $\dot{e}_1 + c_1 e_1 = 0$, $\ddot{e}_2 + c_2 \dot{e}_2 + c_3 e_2 + \int e_2 d\tau = 0$, onde os ganhos de controle $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0 \in \mathbb{R}$ são especificados de modos que os pólos de tais dinâmicas possuam partes reais negativas. Note que v_2 tem ação PID.

5 Resultados de Simulação

As Figs. 3b e 3c mostram a intenção do condutor do veículo para a velocidade e o ângulo de esterço durante um intervalo de tempo de 160s: $u_i(t)$ e $\delta_i(t)$, respectivamente. Porém, $\delta_i(t)$, $u_i(t)$ e $\dot{u}_i(t)$ (aceleração) apresentam variações bruscas do tipo degrau, não correspondendo assim a um comportamento realista para o condutor. Diferentemente de (Gaudenzi et al., 2013), neste trabalho

realizaremos simulações que sejam mais próximas de uma situação prática e, desse modo, propomos que as trajetórias $u_d(t)$ e $\delta_d(t)$ desejadas pelo motorista correspondam a uma suavização de $u_i(t)$ e $\delta_i(t)$, respectivamente. Isto foi atingido pela utilização de um filtro de primeira ordem com constante de tempo $\tau = 0,5$; as entradas do filtro são as intenções do motorista $u_i(t)$ e $\delta_i(t)$ (i.e. o que ele tem em mente), e as saídas são os comandos efetivamente desejados $u_d(t)$ e $\delta_d(t)$, respectivamente, como mostrado nas Figs. 3b e 3c. Escolhemos $T = 0,1s$ e $\phi_{max} = 30^\circ$. As trajetórias de referência correspondentes $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$ determinadas pelo *Gerador de Trajetórias* são exibidas nas Figs. 3a (em graus) e 3b, respectivamente.

Considere que as condições iniciais do veículo são: $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = 0$, $u(0) = 25 \text{ ms}^{-1}$, e as demais variáveis de estados são nulas. Para o controlador LQR, escolhemos as seguintes matrizes de ponderação: $D_z = \text{diag}(0,005; 0,001)$, $C_z = \text{diag}(0,5; 0,5; 0,5; 0,5; 0,5; 1; 0,25; 1; 0,5; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 25; 20; 1; 1)$. Para o controlador RL, foram utilizados os ganhos: $c_1 = 2$, $c_2 = 20$, $c_3 = 40,5$ e $c_4 = 41$. Começaremos mostrando os resultados de simulação obtidos em malha-fechada para o caso ideal, ou seja, sem perturbações externas e sem incertezas paramétricas. Percebemos pela Fig. 3a que o ângulo de inclinação do veículo rastreia a trajetória de referência $\phi_r(t)$ com uma precisão satisfatória: $\phi_{lq}(t)$ e $\phi_{rl}(t)$ são os ângulos de inclinação obtidos com os controladores LQR e RL, respectivamente. Do mesmo modo, a Fig. 3b mostra que a velocidade do veículo também rastreia a trajetória de referência $u_r(t)$ com boa precisão: $u_{lq}(t)$ para o LQR e $u_{rl}(t)$ para o RL. Analisaremos agora os sinais de controle resultantes $\delta(t)$ (ângulo de esterço das rodas dianteiras) e $T_m(t)$ (torque aplicado na roda traseira). Pela Fig. 3c, vemos que ângulos de esterço produzidos pelos controladores LQR $\delta_{lq}(t)$ e RL $\delta_{rl}(t)$ são possíveis de serem implementados no veículo, pois os mesmos não ultrapassam $\delta_{max} = 45^\circ$, que é o esterço máximo suportado pelo veículo. Conforme o esperado, temos que $\delta_d(t) \cong \delta_{lq}(t) \cong \delta_{rl}(t)$ (maiores detalhes no intervalo de tempo $[10, 20]$ na Fig. 3e). Ressaltamos que os picos de oscilação presentes em $\delta_{lq}(t)$ e $\delta_{rl}(t)$ na Fig. 3c são inerentes ao sistema STC (*Steering Tilt Control*) do veículo. A Fig. 3d mostra as entradas torque produzidos pelo LQR $T_{m_{lq}}$ e RL $T_{m_{rl}}$. Note que os picos com amplitude próxima de $\pm 5000\text{N.m}$ ocorrem nos mesmos instantes de tempo em que a velocidade de referência $u_r(t)$ apresenta variações rápidas (veja a Fig. 3b).

Agora, simularemos com perturbações externas e incertezas paramétricas em (2)–(3). Assumimos que as perturbações variam randomicamente, com $|F_i(t)| \leq 800\text{N}$, para $i = 1, 2, 3$, e $5\text{m/s} \leq$

$V_w(t) \leq 12\text{m/s}$, onde $F_1(t)$, $F_2(t)$ e $F_3(t)$ são as forças exercidas nas rodas pelo solo, e $V_w(t)$ é a velocidade dos ventos laterais sobre o veículo. Na Fig. 3f são mostradas $F_1(t)$ e $V_w(t) \times 50$. Não mostramos $F_2(t)$ e $F_3(t)$ por serem similares a $F_1(t)$. Assumindo que os valores nominais para a massa e a altura do centro do gravidade do veículo são $m = 500\text{kg}$ e $h = 1\text{m}$, respectivamente, vamos considerar incertezas paramétricas de $+20\%$ e -5% , respectivamente. Os resultados de simulação são apresentados nas Figs. 3g e 3h, os quais são semelhantes aos obtidos para o caso nominal nas Fig. 3a e 3c, respectivamente. As precisões do rastreamento de $u_r(t)$ e as entradas de torque obtidas com os controladores LQR e RL são semelhantes aos mostrados para o caso nominal nas Fig. 3b e 3d, respectivamente, não sendo exibidas por questão de espaço.

Por fim, a Tabela 2 apresenta os índices de desempenho obtidos com o controlador LQR e o RL, tanto no caso nominal (N) quanto no caso com perturbações externas e incertezas paramétricas (P). Percebemos que o controlador RL apresentou um melhor desempenho em ambos os casos: maior precisão de rastreamento e menor esforço de controle. Isto, de certa forma, era esperado, por se tratar de um controlador não-linear projetado diretamente sobre o modelo completo (2)–(3).

Tabela 2: Valores dos índices de desempenho para os controladores LQR e RL, considerando o caso nominal (N) e o caso com perturbações externas e incertezas paramétricas (P).

Índice	LQR (N)	RL (N)	LQR (P)	RL (P)
$\int e^2$	0,0079	0,00012	0,0094	0,0029
$\int \delta^2$	0,374	0,3664	0,3718	0,3775
$\int e_z^2$	110,2	6,25	110,2	6,25
$\int T_m^2$	$1,14 \times 10^8$	8×10^6	$1,14 \times 10^8$	8×10^6

6 Conclusões

Este trabalho apresentou uma estratégia de controle em malha-fechada para o rastreamento do ângulo de esterço e da velocidade longitudinal desejadas pelo condutor de um veículo inclinável de três rodas, ao mesmo tempo em que ângulo de inclinação do veículo é mantido dentro de uma margem de segurança. Projetamos um controlador LQR sobre um modelo linearizado e uma realimentação linearizante diretamente sobre um modelo completo não-linear. A realimentação linearizante apresentou um melhor desempenho em termos de uma maior precisão de rastreamento e um menor esforço de controle.

Referências

- Chiou, J. C., Lin, C. Y., Chen, C. L. and Chien, C. P. (2009). Tilting motion control in narrow tilting vehicle using double-loop pid controller, *Asian Control Conference, 2009. ASCC 2009. 7th*, pp. 913–918.
- Claveau, F., Chevrel, P. and Mourad, L. (2014). Non-linear control of a narrow tilting vehicle, *2014 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*, pp. 2488–2494.

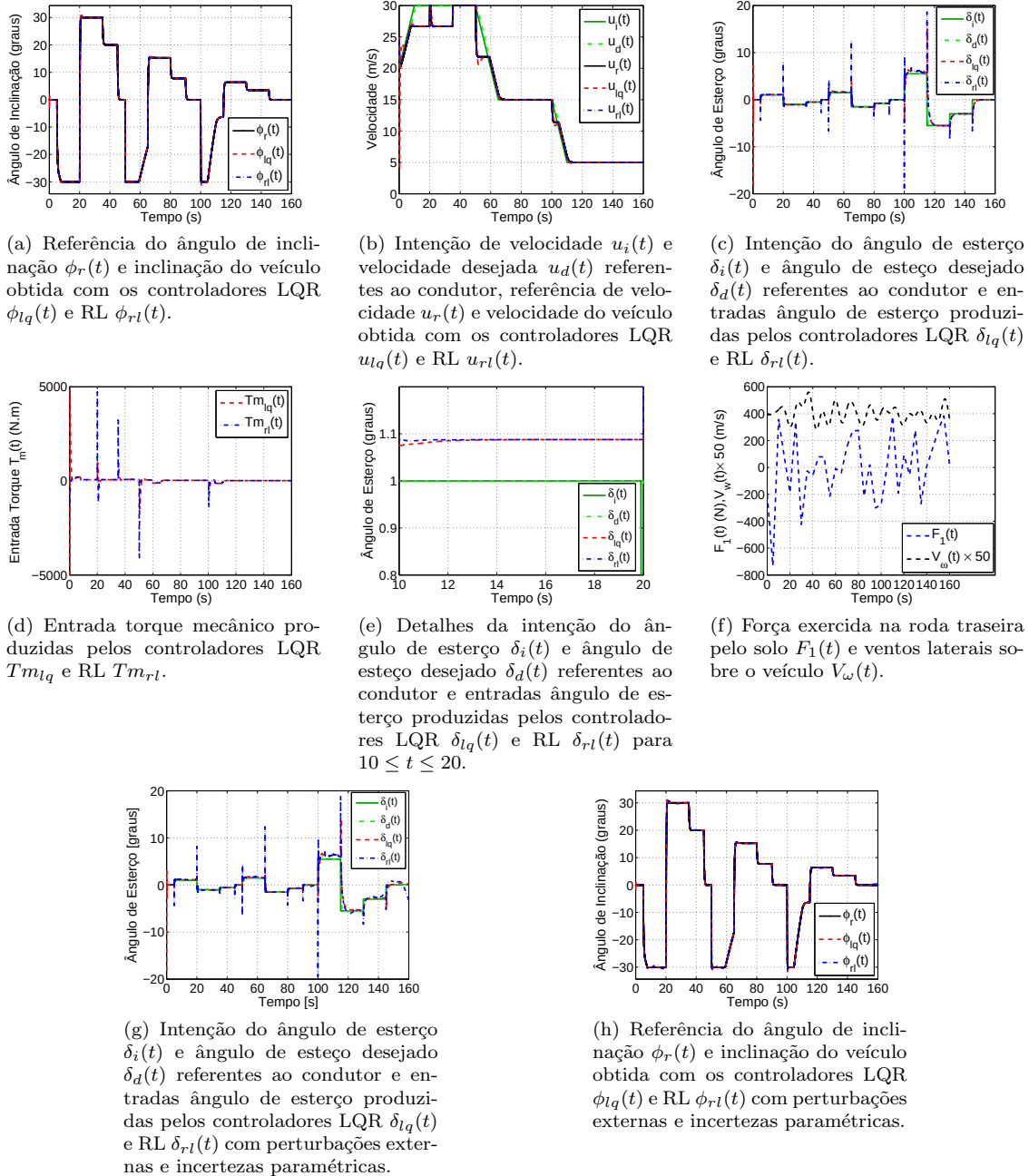


Figura 3: Resultados de simulação do sistema de controle.

Faria, M., Roqueiro, N. and Colet, E. (2010). A sliding mode controlled tilting three wheeled narrow vehicle, *XVIII Congresso Brasileiro de Automática*, pp. 1596–1602.

Gaudenzi, M., Colet, E. and Roqueiro, N. (2013). A sliding mode controlled three wheeled narrow vehicle, *International Journal of Vehicle Design* **62**(2/3/4): 123–146.

Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*, Communications and Control Engineering, 3rd edn, Springer.

Kidane, S., Rajamani, R., Alexander, L., Starr, P. J. and Donath, M. (2010). Development and experimental evaluation of a tilt stability control system for narrow commuter vehicles, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **18**(6): 1266–1279.

Laurent El Ghaoui, Eric Feron, V. B. S. P. B. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Studies in Applied Mathematics 15, Society for Industrial and Applied Mathematic.

Morita, L. Y., Roqueiro, N. and Silveira, H. B. (2016). Steering and velocity tracking of a tilting three-wheeled vehicle using sliding mode control, *2016 14th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, pp. 322–327.

Mourad, L., Claveau, F. and Chevrel, P. (2011). A lateral control strategy for narrow tilting commuter vehicle based on the perceived lateral acceleration, *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, number 2, pp. 6254–6259.

Mourad, L., Claveau, F. and Chevrel, P. (2012). Design of a two dof gain scheduled frequency shaped lq controller for narrow tilting vehicles, *American Control Conference (ACC)*, pp. 6739–6744.

Mourad, L., Claveau, F. and Chevrel, P. (2014). Direct and steering tilt robust control of narrow vehicles, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* **15**(3): 1206–1215.