

ESTUDO TEÓRICO DAS TÉCNICAS SINCRONIZADAS DE COMPENSAÇÃO DE DESBALANÇO DE ROTORES VIA TEORIA DE SISTEMAS

YURI PERIM*, PAULO SERGIO PEREIRA DA SILVA*

*Escola Politécnica da USP - PTC, Av Prof. Luciano Gualberto Trav. 03, 158 - CEP 05508-010
Cidade Universitária - São Paulo SP

Email: yuriperim@usp.br, paulo@lac.usp.br

Abstract— In this paper we consider the well known classic synchronous unbalance compensation in active bearing control of rotating machines. We consider this problem from a precise mathematical point of view. It is known that this method cannot produce fast compensation of the unbalance. This paper justifies this limitation from a theoretical point of view. The first contribution is to establish a discrete model of the hybrid system (continuous-discrete) that results from the application of this standard method. The second contribution is a proof of the closed loop stability of the entire standard control scheme. The third contribution is the presentation of new unbalance compensation scheme. This new method of unbalance compensation considers a kind of amplitude modulation and it can consider fast regulators.

Keywords— Linear Control Theory, Linear Digital Control, Rotor Control, Magnetic Bearings, Unbalance Compensation, Synchronous Control

Resumo— Neste trabalho consideramos as técnicas bem conhecidas de compensação síncrona de desbalanço no contexto do controle de máquinas rotativas via mancais ativos. Consideramos este problema de um ponto de vista matematicamente preciso. É sabido que tal método não é adequado para obtenção de compensadores de regulação rápidos. Neste trabalho justifica-se esta limitação de um ponto de vista teórico. A primeira contribuição é estabelecer um modelo discreto do sistema resultante da aplicação da metodologia tradicional. A segunda contribuição é a demonstração da estabilidade em malha fechada do esquema de controle híbrido tradicional (contínuo-discreto). A terceira contribuição é a introdução de uma nova abordagem, baseada num tipo de modulação em amplitude, que é compatível com o projeto de reguladores rápidos.

Palavras-chave— Teoria de Controle Linear, Controle Digital Linear, Controle de Rotores, Mancais Magnéticos, Compensação de Desbalanço, Controle Sincronizado.

1 Introdução

As aplicações de mancais magnéticos ao controle de máquinas rotativas é um campo de pesquisa que já apresentou muitos resultados importantes. Um problema relevante é a estabilização do sistema, pois a força magnética é naturalmente instável por ser inversamente proporcional ao quadrado da distância (Schweitzer and Maslen, 2009). A estabilização somente via controladores lineares e eventualmente linearização exata da força magnética não é capaz de eliminar completamente as vibrações devido ao desbalanço do rotor (Schweitzer and Maslen, 2009). Os modelos dos rotores são comumente complexificados, e o desbalanço é modelado como uma força de perturbação girante da forma $d(t) = D\Omega^2 e^{j\Omega t}$, em geral com D desconhecido, sendo $D \in \mathbb{C}^n$ um vetor que representa a ação do desbalanço ao longo dos planos transversais à rotação, e gerado pelas assimetrias geométricas e de distribuição de massa com relação ao eixo de rotação e Ω a frequência angular de rotação (Genta, 2005). Técnicas tradicionais de regulação não são efetivas porque a regulação tradicional produz soluções dedicadas a uma frequência de rotação constante e pouco robustas com relação às incertezas no modelo da planta e à variação da frequência de rotação (Mizuno, 1998). Uma técnica bastante utilizada é a compensação síncrona do desbalanço. Esta técnica consiste no esquema

da Figura 1 que é descrito abaixo. Considera-se a ação do controle discreto (complexo) $\tilde{u}_k$, com período de amostragem h segundos. Seja $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ o período de rotação em segundos. O sistema estabilizado (A, B, C) pode ser o sistema em malha fechada com o controlador de estabilização, no caso em que a estabilização se dá por mancais ativos, ou pode ser o modelo do sistema estabilizado pelos mancais passivos. Em todos os casos a entrada $u(t)$ representa a ação dos mancais ativos para o controle síncrono de compensação de desbalanço. Assumimos que o sistema estabilizado está sujeito à ação do desbalanço $d(t) = D(t)e^{j\Omega t}$, e coloca-se esta ação concentrada na entrada do sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Bd(t) \quad (1a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1b)$$

Uma ferramenta fundamental deste trabalho é o operador $\mathcal{F}$ que transforma um sinal analógico $\phi(t)$ em um outro sinal analógico $\tilde{\phi}(t)$ dado por:

$$\tilde{\phi}(t) = \mathcal{F}(\phi(t)) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \phi(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau. \quad (2)$$

Aplica-se na planta estabilizada o sinal analógico (complexo):

$$u(t) = \mathcal{O}(\tilde{u}_k) = \tilde{u}_k e^{j\Omega t}, t \in [kh, (k+1)h) \quad (3)$$

e mede-se na saída o fasor resultante $\tilde{y}_k$, calculado através de:

$$\tilde{y}_k = \mathcal{F}(y(t))|_{t=kh} = \frac{1}{T} \int_{kh-T}^{kh} y(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau. \quad (4)$$

Note que $\tilde{y}_k$ é um sinal discreto complexo, resultante da amostragem de $\tilde{y}(t)$ na frequência $1/h$. Realçamos que $\tilde{y}_k$ representa o primeiro harmônico da vibração resultante em $y(t)$ calculado por uma integral de Fourier. Em geral considera-se que $h > T$ é suficientemente alto para que a resposta permanente tenha se estabelecido após $kh - T$ segundos. Do ponto de vista prático, o valor de h suficientemente grande é em geral determinado experimentalmente. No esquema de controle da Figura 1 o efeito da aplicação de um sinal $d(t) = De^{j\Omega t}$, com D constante, é o mesmo efeito da aplicação de um sinal discreto constante $\tilde{d}_k = D$. Assim, considera-se a matriz de influência M na velocidade angular de rotação Ω , onde $M = G(s)|_{s=j\Omega}$, e $G(s)$ é matriz de transferência do sistema estabilizado. Isso equivale a desprezarmos toda a dinâmica do sistema, pois assumimos que o processo discreto enxerga somente a resposta permanente. Dessa forma, o modelo do sistema dinâmico com entrada $\tilde{u}_k$ e saída $\tilde{y}_k$ mostrado na Figura 1 é substituído por um sistema discreto estático (a menos de um atraso), dado por:

$$\tilde{y}_k = G(j\Omega)(\tilde{u}_{k-1} + \tilde{d}_k) \quad (5)$$

onde $\tilde{d}_k$ modela o efeito (desconhecido) do desbalanço na entrada do sistema (que pode variar com a rotação). Se $\tilde{d}_k$ variar lentamente, o problema de regulação contínuo em questão se transforma num problema de regulação de um sistema discreto estático sujeito a um distúrbio constante. O controlador discreto $\tilde{H}(z)$ “*dead-beat*” tradicional para solucionar tal problema é dado por

$$\tilde{u}_k = \tilde{u}_{k-1} - G(j\Omega)^{-1} \tilde{y}_k \quad (6)$$

É fácil verificar que o sistema em malha fechada (5)-(6) possui dois polos em zero, sendo portanto estável. É fácil verificar que a saída tende a zero em dois passos na presença do distúrbio constante. Note que esta lei de controle necessita do conhecimento de $\tilde{G} = G(j\Omega)$ e é por esta razão que muitas vezes tal controle é combinado com uma estratégia de identificação de $\tilde{G}$. Na prática o controle não se comporta como *dead-beat* perfeito mesmo que $G(j\Omega)$ fosse perfeitamente conhecido, porque a dinâmica discreta verdadeira não é dada por (5), mas é dada por um sistema que será determinado neste trabalho (vide Teorema 1).

Vários autores trataram este problema discreto com abordagens diversas como controle ótimo, técnicas de identificação, controle adaptativo etc (Chiba et al., 2005), (Clements, 2000),

(Dyer, 1999), (Fernandes et al., 2011), (Herzog et al., 1996), (Knospe and Tamer, 1997b), (Knospe and Tamer, 1997a), (Knospe et al., 1997), (Liang and Yiqing, 2007), (Liu et al., 2002), (Lum et al., 1996), (Markert et al., 2002), (Mizuno, 1998), (Shi et al., 2002), (Shi et al., 2004), (Tamisier et al., 2002), (Tanaka et al., 2008), (Zhou and Shi, 2001). Alguns autores afirmam que h deve ser um múltiplo inteiro de T para que a integral de Fourier não perca o sincronismo e forneça o valor correto de $\tilde{y}_k$ sem erros de fase (veja por exemplo (Mizuno, 1998), (Segura, 1999), (Fernandes, 2012)).

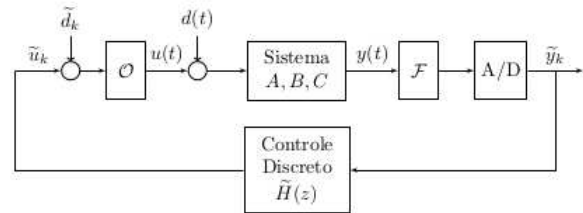


Figura 1: Método Tradicional

O presente trabalho apresenta as seguintes contribuições inovadoras:

- (a) Determinação do modelo (dinâmico) do sistema discreto com entrada $\tilde{u}_k$ e saída $\tilde{y}_k$ visto na Figura 1. Tal modelo pode ser bastante útil para simulação discreta do esquema de controle levando em conta a dinâmica do sistema, sem que seja preciso simular toda a dinâmica contínua que em geral exige alto esforço computacional.
- (b) Mostramos que h não precisa ser um múltiplo inteiro de T (na verdade nem precisaria ser muito maior que T , ao custo da aproximação estática ser completamente inválida). Isso faz com que o sinal de sincronismo seja necessário apenas para determinação de T (e consequentemente Ω) sem a necessidade de sincronizar o cálculo da integral de Fourier. Note que T pode ser determinado simplesmente pela computação da diferença entre os instantes dos últimos dois pulsos de sincronismo.
- (c) Demonstramos a estabilidade assintótica exponencial do esquema híbrido contínuo-discreto em malha fechada quando o controlador discreto garantir a estabilidade exponencial do modelo discreto e a planta (A, B, C) for assintoticamente estável. Demonstramos que a solução do problema de regulação discreta implica na solução do problema de compensação assintótica de desbalanço.
- (d) Propomos uma nova abordagem de compensação de desbalanço que é baseada em um tipo de modulação em amplitude. Tal abordagem é compatível com uma regulação rápida.

O trabalho está organizado como se segue. Na seção 2 apresentamos o modelo discreto do método tradicional de compensação sincronizada de desbalanço. Na seção 3 apresentamos uma nova abordagem para a compensação sincronizada de

desbalanço baseada na modulação em amplitude dos sinais de entrada e saída. Na seção 4 apresentamos um exemplo simples e os resultados de simulação. Na seção 5 apresentamos algumas conclusões.

2 Modelo Discreto do Método Tradicional de Compensação Sincronizada de Desbalanço

O modelo discreto do sistema dinâmico utilizado na abordagem tradicional de compensação sincronizada de desbalanço é apresentado no seguinte teorema:

Teorema 1 *O modelo do sistema dinâmico discreto com entrada $\tilde{u}_k$ e saída $\tilde{y}_k$ do sistema da Figura 1 é dado pelo sistema discreto*

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{k+1} \\ \tilde{w}_{k+1} \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{w}_k \end{bmatrix} + \bar{B} \tilde{u}_k \quad (7a)$$

$$\tilde{y}_k = \bar{C} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{w}_k \end{bmatrix} \quad (7b)$$

onde

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ I \end{bmatrix} \quad (7c)$$

$$\bar{C} = [C \ 0] \quad (7d)$$

$$\bar{A}_{11} = e^{h\tilde{A}} \quad (7e)$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{12} = & e^{(h-T)\tilde{A}} \frac{(\tilde{A}^{-1})^2}{T} (-e^{T\tilde{A}} + I + \\ & + T\tilde{A}e^{T\tilde{A}})B \end{aligned} \quad (7f)$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_1 = & -\tilde{A}^{-1}B + \\ & + e^{(h-T)\tilde{A}} \frac{(\tilde{A}^{-1})^2}{T} (e^{T\tilde{A}} - I)B \end{aligned} \quad (7g)$$

$$\tilde{A} = (-j\Omega I + A) \quad (7h)$$

Além disso, temos:

(A) Os pólos do sistema discreto (7) são dados por

$$\{e^{h(\lambda_1 - j\Omega)}, \dots, e^{h(\lambda_n - j\Omega)}\} \bigcup \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{m \text{ vezes}}$$

onde n é a dimensão do estado e m é a dimensão da entrada do sistema estabilizado, o conjunto dos pólos da planta estabilizada é dado por $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, e $\bigcup$ denota união com repetição. Em particular, como o sistema (A, B, C) é estável então o sistema discreto (7) é estável.

(B) O ganho DC discreto do sistema (7) é dado por:

$$\begin{aligned} G_{DC} &= G(j\Omega) = C(j\Omega I - A)^{-1}B = \\ &= \bar{C}(zI - \bar{A})^{-1}\bar{B}|_{z=1} \end{aligned}$$

(C) Quando h tende para infinito, temos que $\bar{A}_{11}$

e $\bar{A}_{12}$ tendem para zero e $\bar{B}_1$ tende para $-\tilde{A}^{-1}B$. Em particular o comportamento do sistema discreto se aproxima do comportamento do sistema estático

$$\tilde{y}_{k+1} = -\tilde{C}\tilde{A}^{-1}\tilde{B}\tilde{u}_k = G(j\Omega)\tilde{u}_k \quad (8)$$

É importante ressaltar que o teorema anterior implica que:

(a) O ganho DC do sistema discreto é sempre igual à matriz de ganhos $G(s)$ do sistema estabilizado calculada em $s = j\Omega$.

(b) Para valores altos de h os pólos do sistema discreto são muito rápidos, justificando a aproximação do sistema dinâmico discreto (7) pelo sistema estático (8) quando h é suficientemente grande.

(c) Não há nenhuma necessidade de termos h igual a um múltiplo exato de T , pois a validade dos resultados necessita apenas que h seja maior que T .

(d) A tentativa de usar o esquema tradicional de controle para tentar uma regulação rápida tem muitas limitações. De fato, por exemplo, mesmo usando $h = T$, obtemos em geral uma dinâmica discreta (7) “pouco controlável” e “pouco observável” no sentido de (Moore, 1981). Isto ocorre por subamostragem, principalmente quando o sistema tem pólos de frequências comparáveis com as frequências da perturbação. Como o sistema discreto é estável, poderia ser tentada uma redução de ordem segundo (Moore, 1981). No entanto, neste artigo consideramos uma abordagem completamente diferente para o tratamento do problema de regulação rápida.

A partir do teorema anterior é fácil demonstrar o seguinte resultado, que garante a efetividade da metodologia clássica de solução do problema de compensação de desbalanço:

Teorema 2 *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(A) Assuma que o sistema (A, B, C) é assintoticamente estável (inicialmente na ausência da perturbação). Considere que um sistema de controle discreto garante a estabilidade exponencial do sistema discreto (7) em malha fechada. Então o sistema híbrido discreto-contínuo em malha fechada da Figura 1 também é exponencialmente estável.

(B) Assuma que o controle discreto fornece uma solução do problema de regulação para distúrbio d_k constante para o esquema da Figura 1. Então o esquema da Figura 1 será uma solução para compensação assintótica do desbalanço $d(t)$ na frequência Ω .

Observação : Para plantas não complexificadas, a metodologia descrita neste trabalho também pode ser aplicada. Nesse caso a perturbação

seria da forma $d(t) = \Re[D(t)e^{j\Omega t}]$ e todos os sinais $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$ seriam reais ao invés de complexos. Nesse caso teríamos que substituir também a expressão de (2) de $\mathcal{F}(\phi(t))$ do sinal real $\phi(t)$ por $\tilde{\phi}(t) = \mathcal{F}(\phi(t)) = \frac{2}{T} \int_{t-T}^t \phi(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau$. $\diamond$

3 Nova Abordagem para Compensação Sincronizada de Desbalanço

Considera-se $\phi(t)$ uma função diferenciável. Define a transformada¹ $\mathcal{H}$ por:

$$\mathcal{H}(\phi(t)) = e^{-j\Omega t} \phi(t) \quad (9)$$

É evidente que $\mathcal{H}$ é inversível e que sua inversa é o operador $\mathcal{P}$ definido por:

$$\mathcal{P}(\phi(t)) = e^{j\Omega t} \phi(t) \quad (10)$$

Denotando-se $\mathcal{H}(\phi(t))$ por $\hat{\phi}(t)$, $\frac{d\mathcal{H}(\phi(t))}{dt}$ por $\dot{\hat{\phi}}(t)$, e $\mathcal{H}(\dot{\phi}(t))$ por $\hat{\dot{\phi}}(t)$, é imediato verificar que:

$$\dot{\hat{\phi}}(t) = -j\Omega \hat{\phi}(t) + \hat{\dot{\phi}}(t) \quad (11)$$

Considere o diagrama da Figura 2. Aplicando-se o operador $\mathcal{H}$ em ambos os lados da equação (1) e utilizando a propriedade mostrada na equação (11), obtém-se:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + B\hat{u}(t) + B\hat{d}(t) \quad (12a)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \quad (12b)$$

onde $\hat{A} = -j\Omega I + A$.

Dessa forma, o sistema (12) é o modelo da dinâmica com entrada $\hat{u}$ e distúrbio $\hat{d}$ com saída $\hat{y}$. A Figura 2 ilustra esse sistema. Note que a aplicação de $d(t) = \hat{D}e^{j\Omega t}$ é equivalente à aplicação de um sinal $\hat{d}$ constante e igual a $\hat{D}$. Dessa forma, resolver o problema de regulação para o sistema (1) é equivalente a solucionar o problema de regulação para o sistema (12) com distúrbio constante. É importante ressaltar que, nesta segunda metodologia, o sistema (A, B, C) não precisa ser estável, e o sistema de controle é contínuo.

O seguinte teorema é uma consequência imediata do fato de que a transformação $\mathcal{H}$ e sua inversa não alteram a norma dos sinais e do fato de que uma perturbação na frequência Ω aditiva ao sistema (A, B, C) equivale a uma perturbação aditiva constante no sistema (12):

Teorema 3 As seguintes afirmações são verdadeiras para o esquema de controle da Figura 2:

(A) Assuma que o um sistema de controle contínuo $\hat{H}(s)$ garante a estabilidade assintótica em malha fechada do sistema 12. Então o sistema da Figura 2 também será assintoticamente estável

¹ $\mathcal{H}$ é essencialmente uma modulação em amplitude.

(com a mesma taxa de convergência).

(B) Se o controle contínuo $\hat{H}(s)$ resolve o problema de regulação para distúrbio $\hat{d}(t)$ constante para o sistema 12, então o esquema de controle da Figura 2 é solução do problema de regulação para distúrbios $d(t)$ na frequência Ω agindo no sistema original.

Pode se mostrar que as propriedades de controlabilidade e observabilidade são mantidas no sistema transformado (12). Desta forma a metodologia apresentada não apresenta as limitações da primeira.

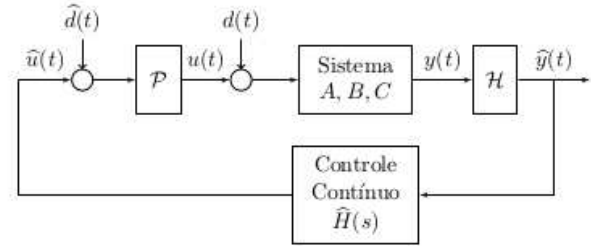


Figura 2: Nova Abordagem

4 Exemplo e Simulações

Adotamos $\Omega = 2\pi$ em todas as simulações e consideramos um sistema (A, B, C) dado por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -39.87 & -1.26 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tal sistema tem uma ressonância pouco amortecida na frequência Ω .

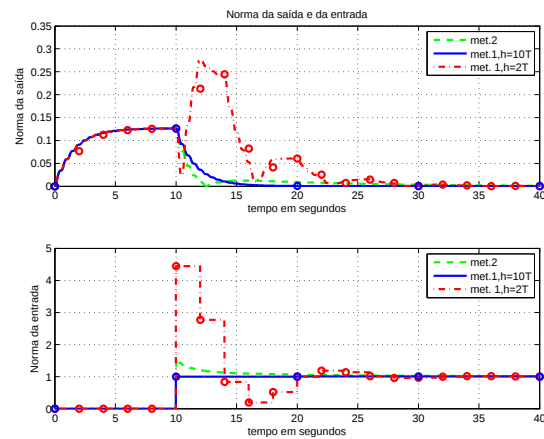


Figura 3: Resultados dos dois métodos. O método 1 foi testado com $h = 10T$ (indicado, pois a resposta permanente se estabelece, e com $h = 2T$ (neste caso $G(j\Omega)$ não é boa aproximação). Os círculos mostram o resultado com o modelo discreto (7)-(6). O método 2 com os polos adequadamente impostos é bem mais rápido.

Primeira Simulação - Método 1 (Tradicional) Mostramos na Figura 3 as simulações

do sistema híbrido discreto-contínuo em malha fechada para $h = 10T$ e $h = 2T$. Note que o sistema em malha fechada não se comporta como *dead-beat* para $h = 2T$ pois h não é suficientemente grande neste caso. Note que os resultados da simulação do sistema discreto 7 em malha fechada com o controle discreto (6) (pequenos círculos da Figura 3) corresponde à simulação do sistema híbrido contínuo-discreto a menos de erros numéricos.

Segunda Simulação - Método 2 (Nova Abordagem) Na Figura 3 também mostramos o resultado da simulação do novo esquema de controle apresentado na Figura 2. Para isso incluímos integradores no sistema (12) e projetamos um compensador de regulação para distúrbios constantes via compensador observador-controlador. Note que o compensador de regulação neste caso é bem mais rápido que o compensador do método 1. É provável, no entanto, que tal compensador seja menos robusto por exigir o conhecimento da dinâmica (A, B, C) do sistema, enquanto o método 1 exige apenas o conhecimento do comportamento em regime $G(j\Omega)$ que pode ser identificado por métodos tradicionais (Fernandes, 2012).

5 Conclusões

Neste trabalho desenvolvemos uma abordagem teórica para o estudo dos sistemas de compensação sincronizada do desbalanceo. Desenvolvemos um modelo discreto que representa a dinâmica do esquema de regulação sincronizada. Este modelo permite dar uma prova formal da estabilidade em malha fechada do sistema híbrido-discreto que representa a metodologia clássica de compensação síncrona de desbalanceo. A abordagem tradicional não é adequada para que se obtenha um regulador rápido. Este trabalho apresenta uma abordagem alternativa para o problema de compensação de desbalanceo que permite o projeto de reguladores tão rápidos quanto desejado. De qualquer forma, é importante ressaltar que é difícil estabelecer uma metodologia que garanta ao mesmo tempo a robustez e o desempenho da metodologia tradicional.

Agradecimentos

O trabalho do primeiro autor e do segundo autores possuem financiamento CNPq (respectivamente, bolsa de mestrado e bolsa PQ, processo 303399/2012-9).

Referências

- Chiba, A., Fukao, T., Ichikawa, O., Oshima, M., Takemoto, M. and Dorrell, D. G. (2005). *Magnetic bearings and bearingless drives*, 1 edn, Newnes.
- Clements, J. R. (2000). *The experimental testing of an active magnetic bearing/rotor system undergoing base excitation*, Master's thesis, Virginia Tech, Blacksburg, VA, Estados Unidos da América.
- Dyer, S. W. (1999). *Adaptive optimal control of active balancing systems for high-speed rotating machinery*, PhD thesis, University of Michigan, Ann Arbor, MI, Estados Unidos da América.
- Fernandes, J. R. M. (2012). *Redução de vibrações de rotor usando regulação sincronizada*, Master's thesis, USP, São Paulo, SP, Brasil.
- Fernandes, J. R. M., Pereira da Silva, P. S. and Rocha, P. H. (2011). Balanceamento ativo de rotor usando regulação sincronizada, *DINCON 2011 - X Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações*, Águas de Lindóia, SP, Brasil, pp. 691–694.
- Genta, G. (2005). *Dynamics of rotating systems*, Springer.
- Herzog, R., Bühler, P., Gähler, C. and Larsson, R. (1996). Unbalance compensation using generalized notch filters in the multi-variable feedback of magnetic bearings, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 4(5): 580–586.
- Knospe, C. R. and Tamer, S. M. (1997a). Experiments in robust control of rotor unbalance response using magnetic bearings, *Mechatronics* 7(3): 217–229.
- Knospe, C. R. and Tamer, S. M. (1997b). Robust adaptive control of unbalance response for a flexible rotor, *JSME International Journal* 40(4): 599–606.
- Knospe, C. R., Tamer, S. M. and Fittro, R. (1997). Rotor synchronous response control: approaches for addressing speed dependence, *Journal of Vibration and Control* 3(4): 435–458.
- Liang, T. and Yiqing, C. (2007). Model development and adaptive imbalance vibration control of magnetic suspended system, *Chinese Journal of Aeronautics* 20(5): 434–442.
- Liu, Z.-H., Nonami, K. and Ariga, Y. (2002). Adaptive unbalance vibration control of magnetic bearing systems with rotational synchronizing and asynchronizing harmonic disturbance, *JSME International Journal* 45(1): 142–149.
- Lum, K.-Y., Coppola, V. T. and Bernstein, D. S. (1996). Adaptive autocentering control for an active magnetic bearing supporting a rotor with unknown mass imbalance, *IEEE*

Transactions on Control Systems Technology
4(5): 587–597.

Markert, R., Skricka, N. and Zhang, X. (2002). Unbalance compensation on flexible rotors by magnetic bearings using transfer functions, *The Eighth International Symposium on Magnetic Bearings*, Mito, IB, Jap o, pp. 417–422.

Mizuno, T. (1998). An unified approach to controls for unbalance compensation in active magnetic bearings, *International Conference on Control Applications*, Trieste, TS, It lia, pp. 1063–1067.

Moore, B. C. (1981). Principal component analysis in linear systems: controllability, observability, and model reduction, *IEEE Transactions on Automatic Control* 26(1): 17–32.

Schweitzer, G. and Maslen, E. H. (2009). *Magnetic bearings: theory, design, and application to rotating machinery*, Springer.

Segura, V. I. C. (1999). *Regulação sincronizada de distúrbios senoidais*, Master’s thesis, USP, São Paulo, SP, Brasil.

Shi, J., Zmood, R. and Qin, L. J. (2002). The direct method for adaptive feed-forward vibration control of magnetic bearing systems, *7th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision*, Singapura, Singapura, pp. 675–680.

Shi, J., Zmood, R. and Qin, L. J. (2004). Synchronous disturbance attenuation in magnetic bearing systems using adaptive compensating signals, *Control Engineering Practice* 12(3): 283–290.

Tamisier, V., Font, S. and Carrere, F. (2002). A new anti-vibration algorithm for active magnetic bearings application, *IEEE International Conference on Control Applications*, Glasgow, Esc cia, Reino Unido, pp. 168–173.

Tanaka, N., Watanabe, T. and Seto, K. (2008). Levitation and vibration control of a flexible rotor by using magnetic bearing, *The Eleventh International Symposium on Magnetic Bearings*, Nara, NR, Jap o, pp. 75–82.

Zhou, S. and Shi, J. (2001). Active balancing and vibration control of rotating machinery: a survey, *The Shock and Vibration Digest* 33(4): 361–371.

A Esboço da prova do Teorema 1

Denote $\tilde{x}(t) = \mathcal{F}(x(t))$, $\dot{\tilde{x}}(t) = \frac{d\mathcal{F}(x(t))}{dt}$ e $\tilde{\dot{x}}(t) = \mathcal{F}(\dot{x}(t))$, onde $\mathcal{F}$ é definido por (2). Então   fácil

mostrar que

$$\dot{\tilde{x}}(t) = -j\Omega\tilde{x}(t) + \tilde{\dot{x}}(t)$$

Logo, aplicando-se o operador $\mathcal{F}$ em ambos os lados do sistema 1, obtemos um sistema análogo ao sistema (12)

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) + B\tilde{d}(t) \quad (13a)$$

$$\tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t) \quad (13b)$$

onde $\tilde{A} = -j\Omega I + A$. Também   fácil mostrar que a transformada $\mathcal{F}$ de $u(t) = \mathcal{O}(\tilde{u}_k)$   da forma:

$$\tilde{u}(\tau) = \begin{cases} \tilde{u}_T(\tau) &= \tilde{u}_{k-1} + \frac{(\tau-kh)}{T}(\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}), \\ &\tau \in [kh, kh+T) \\ \tilde{u}_k, &\tau \in [kh+T, (k+1)h] \end{cases}$$

Denote $\tilde{x}(kh) = \tilde{x}_k$. Após c culos tediosos, podemos obter o modelo (7) a partir das expressões abaixo:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(kh+T) &= e^{T\tilde{A}}\tilde{x}_k + \int_0^T e^{(T-\tau)\tilde{A}}B\tilde{u}_T(\tau)d\tau \\ \tilde{x}_{k+1} &= e^{(h-T)\tilde{A}}\tilde{x}(kh+T) + \\ &\int_0^{h-T} e^{(h-T-\tau)\tilde{A}}B\tilde{u}_k d\tau \end{aligned}$$

As propriedades (A), (B), (C) são imediatas a partir de (7).

B Esboço da prova do Teorema 2

Por construção, se $\tilde{u}_k$ tender para zero exponencialmente então $u(t) = \mathcal{O}(\tilde{u}_k)$ também vai tender a zero exponencialmente, isto é, existem M e λ_1 positivos tais que $\|u(t)\| \leq Me^{-\lambda_1 t}$. Como (A, B, C)   um sistema exponencialmente estável, se $H(\tau) = e^{\tau A}B$, então existem N e λ_2 positivos tais que $\|H(\tau)\| \leq Ne^{-\lambda_2 \tau}$. Sabendo-se que

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Para mostrar a estabilidade exponencial é suficiente, portanto, mostrar a convergência exponencial da resposta forçada. Note que

$$\|H(t-\tau)u(\tau)\| \leq MNe^{-\lambda_2(t-\tau)-\lambda_1\tau}$$

Por outro lado, note que $h(\tau) = -\lambda_2(t-\tau) - \lambda_1\tau$ representa a equação de uma reta tal que $h(0) = -\lambda_2 t$ e $h(t) = -\lambda_1 t$. Seja $\gamma = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Então $h(t) \leq -\gamma t$. Logo, $\|H(t-\tau)u(\tau)\| \leq MNe^{-\gamma t}$ e, portanto, após a integração, a norma da resposta forçada   limitada por $te^{-\gamma t}MN$, que tende a zero exponencialmente.

A segunda parte da prova   imediata a partir da primeira parte e do fato de que a ação do distúrbio aditivo $\mathcal{O}(\tilde{d}) = \tilde{d}e^{j\Omega t}$ na entrada no sistema contínuo equivale à ação do distúrbio aditivo constante $\tilde{d}$ no sistema discreto.