

DIFERENCIADOR GLOBAL E EXATO COM GANHOS DINÂMICOS PARA CONTROLE POR MODOS DESLIZANTES VIA REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA

TIAGO ROUX OLIVEIRA*, ANTONIO ESTRADA†, LEONID M. FRIDMAN‡, MANUCHI DANSÁ*

**Dept. of Electronics and Telecommunication Engineering, State University of Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, RJ 20550-900, Brazil.*

†*CONACYT Research Fellow - Center for Engineering and Industrial Development (CIDESI), Quaretaró, C.P. 76125, Mexico.*

‡*Dept. of Control Engineering and Robotics, National Autonomous University of Mexico (UNAM), Federal District, C.P. 04510, Mexico.*

Emails: tiagoroux@uerj.br, anntonio.estrada@gmail.com, lfridman@unam.mx, manuchid@gmail.com

Abstract— In this paper, we propose a global exact differentiator with dynamic gains based on higher-order sliding modes to solve the problem of global trajectory tracking via output-feedback for a class of uncertain nonlinear plants with disturbances. Norm observers for the unmeasured state are employed to dominate the disturbances as well as to adapt the gains of the proposed differentiator since the nonlinearities may be state-dependent and time-varying. Differently from some previous works in the literature, no hybrid switching scheme is necessary to state global stability using only input-output information. For the first time, uniform global exponential stability and ultimate exact tracking are guaranteed exclusively employing higher-order sliding modes based exact differentiators. Numerical simulations are presented to validate the analysis and show the effectiveness of the proposed method.

Keywords— higher-order sliding modes; differentiators; output-feedback; tracking; global stability

Resumo— Deseja-se, neste artigo, resolver o problema de rastreamento global de trajetória, via realimentação de saída, para uma classe de plantas não-lineares, incertas e com distúrbios. Para isto, é proposto um diferenciador global, exato e com ganhos dinâmicos que seja baseado em modos deslizantes de ordem superior. Observadores da norma para o estado não mensurado são utilizados. Isto é feito com duas finalidades: dominar os distúrbios e adaptar os ganhos do diferenciador proposto. Isto é necessário, uma vez que as não-linearidades podem ser dependentes do estado e variantes no tempo. Diferentemente de alguns trabalhos anteriores na literatura, nenhum esquema híbrido de chaveamento é necessário para garantir a estabilidade global utilizando-se apenas informações de entrada-saída. Pela primeira vez, a estabilidade global exponencial uniforme e o rastreamento exato são garantidos empregando-se exclusivamente diferenciadores exatos baseados em modos deslizantes de ordem superior. Simulações numéricas são apresentadas para validar a análise e demonstrar a eficiência do método proposto.

Palavras-chave— modos deslizantes de ordem superior; diferenciadores; realimentação de saída; rastreamento; estabilidade global

1 Introdução

O controle de estabilização e de rastreamento para sistemas não-lineares é um problema antigo e ainda vem sendo estudado em controle por modos deslizantes (*Sliding Mode Control* – SMC). Muitas dificuldades podem ser apontadas. Dentre elas, estão: a condição de grau relativo mal definida (Levant, 2013), a hipótese de fase não-mínima (Baev et al., 2008), a presença de perturbações e incertezas (Estrada and Fridman, 2010; Angulo et al., 2012; Angulo et al., 2013) ou a necessidade de aplicar SMC adaptativo para lidar com distúrbios com limites desconhecidos (Plestan et al., 2010). Em particular, o uso SMC via realimentação de saída para rastreamento exato de sistemas com distúrbios e grau relativo arbitrário é um problema desafiador nesse contexto (Floquet et al., 2011). Este cenário é ainda mais problemático se propriedades de estabilidade global são também perseguidas (Nunes et al., 2009; Nunes et al., 2014). Por exemplo, para compensar o grau relativo, observadores de alto-ganho (Emelyanov et al., 1992; Esfandiari and Khalil, 1992; Cunha et al., 2009) podem ser usados. Entretanto, resultados de estabilidade global ou semi-global

foram obtidos apenas com erros residuais de saída.

Recentemente, problemas de estimação exata e controle de estabilização baseados em uma nova geração de diferenciadores e controladores por modos deslizantes de ordem superior (*Higher-Order Sliding Mode* – HOSM) foram considerados por alguns autores (Estrada and Fridman, 2010; Angulo et al., 2012; Angulo et al., 2013; Levant and Livne, 2012). Contudo, os obstáculos de estimação/estabilidade global não puderam ser superados. Por outro lado, os autores em (Nunes et al., 2009; Nunes et al., 2014) resolveram o problema de rastreamento exato para o sinal de saída de plantas lineares com grau relativo arbitrário e distúrbios de entrada uniformemente limitados, garantindo propriedades globais de estabilidade. O resultado foi alcançado introduzindo um projeto híbrido de estimação que seleciona através de leis de chaveamento entre um filtro de avanço e um diferenciador localmente exato baseado em HOSM.

Neste artigo, introduziu-se um diferenciador global exato com ganhos dinâmicos e então isto foi aplicado ao problema de rastreamento global via realimentação de saída. As principais contribuições são: construir um limitante superior global para a derivada das

variáveis de estado do sistema usando apenas informações de entrada-saída; e mostrar que nenhum projeto de chaveamento híbrido é necessário para obter propriedades globais de estabilidade/estimação como feito em (Nunes et al., 2009; Nunes et al., 2014). Pela primeira vez, um diferenciador global, exato e baseado em HOSM é desenvolvido, garantindo estabilidade global exponencial quando usado para controle em malha-fechada. Além disso, os resultados anteriores (Nunes et al., 2009; Nunes et al., 2014) apenas consideraram distúrbios de entrada uniformemente limitados. Aqui, os distúrbios casados com a entrada podem crescer linearmente com o estado não medido, e os distúrbios descasados variantes no tempo, ignorados anteriormente, são agora considerados.

A metodologia de realimentação de saída para majoração dos distúrbios e para adaptação dos ganhos do diferenciador também é nova, uma vez que observadores de norma do estado são utilizados. Tais observadores de norma do estado são obtidos a partir de filtros de entrada-saída comumente usados em controle adaptativo por modelo de referência (Ioannou and Sun, 1996). Além de ser um projeto de estimação mais simples, uma outra vantagem do diferenciador global proposto com ganhos variáveis é que eles podem eventualmente convergir para valores pequenos, reduzindo a sensibilidade a ruído do sistema em malha-fechada como um todo em cenários reais, além de preservar a globalidade.

Prólogo: A seguir, todos os κ 's e os k 's denotam constantes positivas. Os termos $\pi(t)$ denotam funções que decaem exponencialmente, i.e., $|\pi(t)| \leq K e^{-\lambda t}$, $\forall t$, onde K possivelmente depende das condições iniciais do sistema e λ é uma constante (genérica) positiva. A notação $|\cdot|$ se refere à norma Euclidiana para vetores, ou a norma induzida para matrizes, enquanto que $\|f_t\|$ denota a norma $\mathcal{L}_{\infty}$ do sinal $f(t)$, i.e., $\sup_{0 \leq \tau \leq t} |f(\tau)|$. A propriedade de Estabilidade Entrada-Saída (*Input-to-State Stability* – ISS) é definida como de costume em (Khalil, 2002). A definição de Filippov para a solução de equações diferenciais descontínuas (Filippov, 1964) é assumida neste trabalho. Por uma questão de simplicidade, “s” vai representar tanto a variável de Laplace quanto o operador diferencial (d/dt), de acordo com o contexto.

2 Formulação do Problema

Considere uma planta não-linear incerta descrita por:

$$\dot{x} = A_p x + B_p [u + d(x, t)] + \phi(t), \quad y = H_p x, \quad (1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u \in \mathbb{R}$ é a entrada, $y \in \mathbb{R}$ é a saída, $d(x, t) \in \mathbb{R}$ é um distúrbio não-linear incerto dependente do estado e $\phi(t) \in \mathbb{R}^n$ é um distúrbio externo, descasado, incerto e variante no tempo. O termo “descasado” se refere a $\phi(t)$ não contido no espaço imagem de B_p . Caso contrário, $\phi(t)$ poderia ser diretamente incorporado ao distúrbio “casado” $d(x, t)$. As matrizes incertas A_p , B_p e H_p pertencem a algum conjunto compacto, de tal modo que os limitantes das incertezas, que necessariamente serão definidos mais adiante, estão disponíveis para o projeto.

As suposições básicas a seguir são usuais em controle adaptativo (Ioannou and Sun, 1996):

(A1) $G(s) = H_p(sI - A_p)^{-1}B_p$ é de fase mínima.

(A2) O subsistema linear é controlável e observável.

(A3) A função de transferência $G(s)$ tem um grau relativo conhecido ρ e é de ordem n . O ganho de alta frequência $K_p \in \mathbb{R}$ satisfaz $K_p = \lim_{s \rightarrow \infty} s^\rho G(s)$. Sem perda de generalidade, assume-se que $K_p > 0$.

Para atingir rastreamento global exato usando realimentação de saída, a seguinte hipótese é feita:

(A4) Assume-se que o distúrbio de entrada $d(x, t)$ é incerto, localmente integrável e limitado em norma por $|d(x, t)| \leq k_x |x| + k_d$, $\forall x, t$, onde $k_x, k_d \geq 0$ são escalares conhecidos. Assume-se que o distúrbio descasado $\phi(t)$ é suficientemente suave. Além disso, existe uma constante conhecida $k_\phi \geq 0$, tal que $|\phi^{(i)}(t)| \leq k_\phi$, $\forall i = 0, \dots, \rho$.

Note que o grau relativo de (1) depende apenas de sua parte linear, uma vez que a perturbação descasada ϕ independe de x e o único distúrbio d dependente do estado está casado com a entrada de controle. Embora esta hipótese restrinja a classe de distúrbios em questão, ela representa um desafio no contexto de SMC por realimentação de saída, uma vez que estabilidade global e rastreamento exato serão atingidos.

Observação 1 (Forma Normal e Limitantes para Derivadas) Tomando as hipóteses (A1)–(A4) como base, é fácil demonstrar que o sistema não-linear (1) pode ser transformado por $z = Tx$ na seguinte forma normal (Khalil, 2002):

$$\dot{\eta} = A_0 \eta + B_0 y, \quad (2)$$

$$\dot{\xi} = A_\rho \xi + B_\rho K_p [u + d_e(x, t)], \quad (3)$$

onde a saída medida é $y = C_\rho \xi$, $z^T = [\eta^T \ \xi^T] \in \mathbb{R}^n$ com $\eta \in \mathbb{R}^{(n-\rho)}$ referindo-se ao estado da dinâmica zero e $\xi = [y \ \dot{y} \ \dots \ y^{(\rho-1)}]^T$ o estado da dinâmica externa. A tripla (A_ρ, B_ρ, C_ρ) está na forma do controlador de Brunovsky (Khalil, 2002) e A_0 é Hurwitz. O distúrbio de entrada equivalente $d_e(x, t)$ é limitado de modo afim pela norma $|d_e(x, t)| \leq \kappa_1 |x| + \kappa_2$ onde $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ são constantes conhecidas. Logo, pode-se concluir o seguinte limitante superior dependente do estado para a derivada de ordem ρ do sinal de saída

$$|y^{(\rho)}| \leq K_p [\kappa_1 |x| + \kappa_2 + |u|]. \quad (4)$$

┘

Seja o sinal de referência $y_m(t) \in \mathbb{R}$ gerado pelo seguinte modelo de referência:

$$y_m = W_m(s) r, \quad W_m(s) = (s + \gamma_m)^{-1} L_m^{-1}(s), \quad \gamma_m > 0, \quad (5)$$

onde $r(t) \in \mathbb{R}$ é um sinal de referência contínuo por partes, uniformemente limitado e arbitrário e

$$L_m(s) = s^{(\rho-1)} + l_{\rho-2} s^{(\rho-2)} + \dots + l_1 s + l_0, \quad (6)$$

com $L_m(s)$ sendo um polinômio Hurwitz. A função de transferência $W_m(s)$ tem o mesmo grau relativo que $G(s)$ e seu ganho de alta frequência é unitário.

O principal objetivo é encontrar uma lei de controle, u , tal que o erro de saída

$$e(t) := y(t) - y_m(t) \quad (7)$$

tenda assintoticamente para zero, para condições iniciais arbitrárias.

Quando a planta é conhecida e $d \equiv 0$, $\phi \equiv 0$, uma lei de controle que alcança o casamento ideal entre a função de transferência em malha-fechada e $W_m(s)$ é dada por $u^* = \theta^{*T} \omega$, onde o vetor de parâmetros ideais é escrito como $\theta^* = [\theta_1^{*T} \theta_2^{*T} \theta_3^{*T} \theta_4^{*T}]^T$, onde $\theta_1^*, \theta_2^* \in \mathbb{R}^{(n-1)}$, $\theta_3^*, \theta_4^* \in \mathbb{R}$ e o vetor regressor $\omega = [\omega_u^T \omega_y^T y^T r^T]^T$, $\omega_u, \omega_y \in \mathbb{R}^{(n-1)}$ é obtido a partir de filtros de entrada/saída descritos por:

$$\dot{\omega}_u = \Phi \omega_u + \Gamma u, \quad \dot{\omega}_y = \Phi \omega_y + \Gamma y, \quad (8)$$

onde $\Phi \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ é Hurwitz e $\Gamma \in \mathbb{R}^{(n-1)}$ é escolhido de modo que o par (Φ, Γ) seja controlável. As condições de casamento exigem que $\theta_4^* = K_p^{-1}$.

Seja o vetor de estado aumentado definido por $X = [x^T, \omega_u^T, \omega_y^T]^T$, cuja dinâmica é descrita por $\dot{X} = A_0 X + B_0 u + B_0' d + B_\phi \phi$, $y = H_o X$. Assim, somando e subtraindo $B_0 \theta^{*T} \omega$ e notando que existem matrizes Ω_1 e Ω_2 tais que

$$\omega = \Omega_1 X + \Omega_2 r, \quad (9)$$

tem-se

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A_c X + B_c K_p [\theta_4^* r + u - u^*] + B_0' d + B_\phi \phi, \\ y &= H_o X, \end{aligned} \quad (10)$$

onde $A_c = A_0 + B_0 \theta^{*T} \Omega_1$, $B_c = B_0 \theta_4^*$ e $B_\phi^T = [I \ 0 \ 0]$. Note que (A_c, B_c, H_o) é uma realização não-mínima de $W_m(s)$.

Para fins de análise, o modelo de referência pode ser descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{X}_m &= A_c X_m + B_c K_p [\theta_4^* r - d_f] + B_0' d + B_\phi \phi, \\ y_m &= H_o X_m, \end{aligned} \quad (11)$$

com distúrbio equivalente de entrada $d_f = W_d(s)d + W_\phi(s)\phi$, onde

$$W_d(s) = [W_m(s)K_p]^{-1} \bar{W}_d(s), \quad (12)$$

$$\bar{W}_d(s) = H_o (sI - A_c)^{-1} B_0', \quad (13)$$

$$W_\phi(s) = [W_m(s)K_p]^{-1} \bar{W}_\phi(s), \quad (14)$$

$$\bar{W}_\phi(s) = H_o (sI - A_c)^{-1} B_\phi. \quad (15)$$

Logo, $y_m = W_m(s)K_p [\theta_4^{*T} r - W_d(s)d - W_\phi(s)\phi] + \bar{W}_\phi(s)\phi + \bar{W}_d(s)d$ e é fácil concluir que $y_m = W_m(s)r$. Note que (12) e (14) são matrizes de transferência estáveis (a primeira é própria e a segunda, possivelmente imprópria), de modo que as derivadas de $\phi(t)$ podem aparecer no canal de entrada. Além disso, $[W_m(s)K_p]^{-1} = \bar{K}_\rho s^\rho + \bar{K}_{\rho-1} s^{\rho-1} + \dots + \bar{K}_0$, onde $\bar{K}_i \in \mathbb{R}$, $i=0, \dots, \rho$ são constantes. Usando os parâmetros de Markov (Kailath, 1980) para representar $\bar{W}_\phi = H_o (sI - A_c)^{-1} B_\phi = \frac{H_o B_\phi}{s} + \frac{H_o A_c B_\phi}{s^2} + \frac{H_o A_c^2 B_\phi}{s^3} + \dots$, o termo $d_f(t)$ pode ser reescrito como

$$d_f := K_{\rho-1} \phi^{(\rho-1)} + \dots + K_1 \dot{\phi} + W_p(s) * \phi + W_d(s) * d, \quad (16)$$

onde $*$ denota o operador convolução, $K_j \in \mathbb{R}^{1 \times n}$,

$$W_p(s) = \sum_{i=1}^{\rho} \bar{K}_i H_o A_c^{i-1} B_\phi + \sum_{i=0}^{\rho} \bar{K}_i H_o A_c^i (sI - A_c)^{-1} B_\phi \quad (17)$$

é uma matriz de transferência estável e própria com dimensões apropriadas e

$$K_j = \sum_{i=j+1}^{\rho} \bar{K}_i H_o A_c^{i-j-1} B_\phi, \quad j = 1, \dots, \rho-1. \quad (18)$$

A dinâmica do erro com estado $X_e := X - X_m$ é

$$\begin{aligned} \dot{X}_e &= A_c X_e + B_c K_p [u - \theta^{*T} \omega + d_f], \\ e &= H_o X_e, \end{aligned} \quad (19)$$

cujas relação entrada-saída é dada por

$$e = W_m(s)K_p [u - \theta^{*T} \omega + d_f]. \quad (20)$$

Observação 2 (Distúrbio Equivalente Variante no Tempo e Dependente do Estado) As equações de erro (19) e (20) são similares àquelas encontradas em alguns trabalhos anteriores (Nunes et al., 2009; Nunes et al., 2014). Entretanto, neste artigo, uma diferença fundamental deve ser destacada: o distúrbio de entrada equivalente $d_f(x, t)$ é dependente do estado. As ferramentas de projeto de controle propostas em (Nunes et al., 2009; Nunes et al., 2014) não são capazes de lidar com $d_f(x, t)$, uma vez que o estado da planta não está disponível para realimentação. Dessa maneira, aqui foram usados observadores da norma do estado para obter um limitante para $d_f(x, t)$, como será discutido na seção a seguir. $\lrcorner$

3 Estimação da Norma de Estado

Considerando a hipótese (A4) e aplicando (Hsu et al., 2003, Lemma 3) à equação dinâmica em (10), é possível encontrar $k_x^* > 0$ tal que, para $k_x \in [0, k_x^*]$, um limitante em norma para X e x pode ser obtido através da aproximação por filtros estáveis de primeira ordem (First Order Approximation Filters – FOAFs) (veja detalhes em (Hsu et al., 2003)). Desse modo, tem-se

$$|x(t)| \leq |\hat{x}(t)| + \hat{\pi}(t), \quad (21)$$

$$\hat{x}(t) := \frac{1}{s + \lambda_x} [c_1(k_d + k_\phi) + c_2|\omega(t)|], \quad (22)$$

com $c_1, c_2, \lambda_x > 0$ sendo constantes apropriadas que podem ser calculadas pelos métodos de otimização descritos em (Cunha et al., 2008). Nesse sentido, (21)–(22) garantem que a estimativa do observador da norma $\hat{x}(t)$ fornece um majorante válido para o estado x não medido da planta incerta e perturbada, i.e., $|x| \leq |\hat{x}|$ a menos de termos exponencialmente decrescentes devido às condições iniciais do sistema, denotadas aqui por $\hat{\pi}(t)$. Uma vez que foram assumidas diferenciabilidade suficiente para ϕ e limitação uniforme para suas derivadas temporais, pode-se encontrar uma constante $\bar{k}_\phi > 0$, tal que $|K_1 \dot{\phi} + \dots + K_{\rho-1} \phi^{(\rho-1)}| \leq \bar{k}_\phi$ e $|d_f| \leq \bar{k}_\phi + |W_p(s) * \phi| + |W_d(s) * d|$. Além disso, a partir de (A4) e (22), tem-se $|d(x, t)| \leq k_x \hat{x}(t) + k_d$, a menos de um termo $\hat{\pi}$, e pode-se escrever $|d_f| \leq \hat{d}_f + \hat{\pi}_f$, onde $\hat{\pi}_f$ é exponencialmente decrescente,

$$\hat{d}_f(t) := \bar{k}_\phi + \frac{c_f}{s + \lambda_f} [k_\phi + k_x \hat{x}(t) + k_d], \quad (23)$$

e $\frac{c_f}{s + \lambda_f}$ é um FOAF projetado para $W_d(s)$ e $W_p(s)$, com constantes positivas e adequadas c_f e λ_f . Ao preço de algum conservadorismo, pode-se simplificar o projeto do FOAF escolhendo-se c_f suficientemente grande e λ_f suficientemente pequeno.

4 Diferenciadores Globais Exatos Baseados em HOSM e Ganhos Dinâmicos

Para obter rastreamento exato, pode-se usar o diferenciador exato e robusto (*Robust Exact Differentiator – RED*) de (Levant, 2003). Contudo, apenas resultados locais ou semiglobais poderiam ser garantidos.

A ideia chave é usar a estrutura do RED, mas adaptando os seus coeficientes, usando a estimação para a norma do estado x fornecido na equação (21), a fim de alcançar uma estimativa global e exata, *i.e.*, diferenciação exata de sinais com quaisquer condições iniciais e derivadas ilimitadas.

4.1 Diferenciador RED Padrão com Ganhos Fixos

O diferenciador RED padrão de ordem $p = \rho - 1$ para o erro de saída $e \in \mathbb{R}$ é dado por (Levant, 2003):

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_0 &= v_0, \\ v_0 &= -\lambda_0 C_\rho^{\frac{1}{p+1}} |\zeta_0 - e(t)|^{\frac{p}{p+1}} \operatorname{sgn}(\zeta_0 - e(t)) + \zeta_1, \\ &\vdots \\ \dot{\zeta}_i &= v_i, \\ v_i &= -\lambda_i C_\rho^{\frac{1}{p-i+1}} |\zeta_i - v_{i-1}|^{\frac{p-i}{p-i+1}} \operatorname{sgn}(\zeta_i - v_{i-1}) + \zeta_{i+1}, \\ &\vdots \\ \dot{\zeta}_p &= -\lambda_p C_\rho \operatorname{sgn}(\zeta_p - v_{p-1}),\end{aligned}\quad (24)$$

onde C_ρ é uma constante conhecida, tal que $|e^{(\rho)}(t)| \leq C_\rho$ é um limitante superior válido localmente. Em outras palavras, C_ρ é uma estimativa para a constante Lipschitz (se ela existir) para a p -ésima derivada de $e(t)$. Se os parâmetros λ_i são escolhidos recursivamente¹, então as igualdades

$$\zeta_0 = e(t), \quad \zeta_i = e^{(i)}(t), \quad i = 1, \dots, p \quad (25)$$

são estabelecidas em tempo finito (Levant, 2003).

Observação 3 (Região de Convergência) O parâmetro C_ρ é relacionado ao tamanho da região D_R no espaço do erro, onde a convergência do diferenciador pode ser garantida (Levant and Livne, 2012; Levant, 2003). Quanto maior C_ρ , maior será também o tamanho de D_R e mais alta a sensibilidade a ruídos de medição e discretização. $\square$

4.2 Diferenciador Global com Ganhos Dinâmicos

A partir das equações (4) e (7), pode-se escrever:

$$|e^{(\rho)}(t)| \leq L(x, t) = K_p[\kappa_1|x| + \kappa_2 + |u|] + |y_m^{(\rho)}(t)|. \quad (26)$$

Assumindo que a entrada de controle satisfaz

$$|u| = \varrho(t) \leq \kappa_3 \|X_t\| + \kappa_4, \quad (27)$$

para $\kappa_3, \kappa_4 > 0$ apropriados, e uma função de modulação $\varrho(t) \geq 0$ contínua a ser definida posteriormente.

¹Em particular, a seguinte escolha é válida para $p \leq 3$: $\lambda_0 = 5, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1.5, \lambda_3 = 1.1$. Para mais detalhes, veja (Levant, 2003).

Então, aplicando-se a desigualdade (21), pode-se obter o seguinte limitante superior com a variável $\hat{x}(t)$ do observador da norma em (22):

$$|e^{(\rho)}(t)| \leq K_p[\kappa_1|\hat{x}| + \kappa_2 + \varrho(t)] + |y_m^{(\rho)}(t)|, \quad (28)$$

a menos de termos com decaimento exponencial devido a condições iniciais que levam em consideração o transiente do FOAF. A constante k_m , conhecida e positiva, satisfaz $|y_m^{(\rho)}(t)| \leq k_m$.

Escolhendo-se $k_1 \geq K_p \kappa_1$, $k_2 \geq K_p \kappa_2 + k_m$ e $k_3 \geq K_p$, pode-se definir

$$\mathcal{L}(\hat{x}, t) := k_1|\hat{x}| + k_2 + k_3\varrho(t), \quad (29)$$

e construir o seguinte limitante superior

$$|e^{(\rho)}(t)| \leq \mathcal{L}(\hat{x}, t), \quad \forall t \geq T, \quad (30)$$

para algum tempo finito $T > 0$.

A partir de (29)–(30), pode-se introduzir o seguinte diferenciador global baseado em HOSM:

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_0 &= v_0, \\ v_0 &= -\lambda_0 \mathcal{L}(\hat{x}, t)^{\frac{1}{p+1}} |\zeta_0 - e(t)|^{\frac{p}{p+1}} \operatorname{sgn}(\zeta_0 - e(t)) + \zeta_1, \\ &\vdots \\ \dot{\zeta}_i &= v_i, \\ v_i &= -\lambda_i \mathcal{L}(\hat{x}, t)^{\frac{1}{p-i+1}} |\zeta_i - v_{i-1}|^{\frac{p-i}{p-i+1}} \operatorname{sgn}(\zeta_i - v_{i-1}) + \zeta_{i+1}, \\ &\vdots \\ \dot{\zeta}_p &= -\lambda_p \mathcal{L}(\hat{x}, t) \operatorname{sgn}(\zeta_p - v_{p-1}).\end{aligned}\quad (31)$$

Condições suficientes para convergência finita de diferenciadores com ganhos variáveis e baseados em HOSM foram formuladas em (Levant and Livne, 2012). A principal diferença é que lá os autores assumem que o vetor de estado é medido. No diferenciador proposto (31), o limitante global superior $\mathcal{L}(\hat{x}, t)$ deve ser absolutamente contínuo e sua derivada logarítmica $\dot{\mathcal{L}}/\mathcal{L}$ deve ser limitada, isto é, $|\dot{\mathcal{L}}/\mathcal{L}| \leq M$, onde $M > 0$ é uma constante qualquer. Isto implica que $\mathcal{L}(\hat{x}, t)$ pode crescer no máximo exponencialmente.

De acordo com a condição de crescimento linear assumida em (A4) para as não-linearidades do sistema e a condição de regularidade (Sasthy and Bodson, 1989) assumida em (27) para o sinal de controle, qualquer escape-finito é evitado e apenas sinais de crescimento exponencial são possíveis no sistema de malha fechada, como será mostrado na prova do teorema final.

Uma vez mais, os mesmos resultados de convergência em tempo finito mostrados em (25) são preservados, mas com a vantagem teórica de serem válidos para qualquer condição inicial. A convergência do diferenciador (31) é global, uma vez que a estimativa superior (30) se mantém, independente de qualquer condição inicial de sinais em malha-fechada (D_R não está restrito no espaço de estado do erro).

5 Rastreamento Global via Realimentação de Saída

O passo seguinte é demonstrar que a lei de controle proposta irá satisfazer (27), de modo que o diferenciador global acima possa ser de fato construído.

5.1 Caso de Grau Relativo Unitário

Para sistemas com grau relativo unitário, *i.e.*, $\rho = 1$, a principal ideia é fechar a malha de controle com um relé para lidar com incertezas e distúrbios no sistema de erro (19):

$$u = -\varrho(t)\text{sgn}(e), \quad \varrho \in \mathbb{R}, \quad (32)$$

onde a função de modulação $\varrho(t) \geq 0$ é projetada para induzir um modo deslizante na superfície $e = 0$. Para atender a este objetivo, $\varrho(t)$ deve satisfazer:

$$\varrho(t) \geq |-\theta^{*T}\omega(t) + d_f(t)| + \delta, \quad \delta > 0, \quad (33)$$

onde a constante δ pode ser arbitrariamente pequena. Uma vez que A_p , B_p e H_p pertencem a algum conjunto compacto conhecido, um limitante superior $\bar{\theta} \geq |\theta^*|$ pode ser obtido. Desse modo, uma escolha possível para a função de modulação satisfazendo (33) é

$$\varrho(t) = \bar{\theta}|\omega(t)| + \hat{d}_f(t) + \delta, \quad (34)$$

com $\hat{d}_f(t)$ definido em (23).

Para plantas de grau relativo unitário, $W_m(s) = (s + \gamma_m)^{-1}$ (com $L_m(s) = 1$) e, aplicando-se o Lema 1 de (Hsu et al., 1997), pode-se concluir que a lei de controle acima é globalmente exponencialmente estável e o erro de saída e se torna identicamente nulo depois de algum tempo finito.

5.2 Caso de Grau Relativo Arbitrário

Em plantas com grau relativo maior pode-se usar o operador $L_m(s)$ em (6) para superar o obstáculo do grau relativo. O operador $L_m(s)$ é tal que $L_m(s)G(s)$ e $L_m(s)W_m(s)$ têm grau relativo unitário. A variável de deslizamento ideal $\sigma = L_m(s)e$ é dada por

$$\begin{aligned} \sigma &= e^{(\rho-1)} + \dots + l_1 \dot{e} + l_0 e \\ &= \sum_{i=0}^{\rho-1} l_i H_o A_c^{(i)} X_e = \bar{H} X_e, \end{aligned} \quad (35)$$

onde a segunda igualdade é obtida a partir da hipótese (A3) e (19). Note que $\{A_c, B_c, \bar{H}\}$ é uma realização não mínima de $L_m(s)W_m(s)$.

Se o sinal de controle fosse dado por

$$u = -\varrho(t)\text{sgn}(\sigma), \quad (36)$$

com a mesma função de modulação $\varrho(t)$ em (34) satisfazendo (33), então o sistema de erro em malha-fechada seria globalmente exponencialmente estável e a variável de deslizamento ideal σ se tornaria identicamente nula após algum tempo finito, de acordo com (Hsu et al., 1997, Lemma 1).

Entretanto, σ não está diretamente disponível para implementar a lei de controle. Dessa forma, usando o diferenciador global RED proposto, a seguinte estimativa para σ pode ser obtida:

$$\hat{\sigma} = \zeta_{\rho-1} + \dots + l_1 \zeta_1 + l_0 \zeta_0. \quad (37)$$

A partir de (9), (22) e (23), é fácil demonstrar que o seguinte sinal de controle

$$u = -\varrho(t)\text{sgn}(\hat{\sigma}), \quad (38)$$

com função de modulação $\varrho(t)$ em (34), verifica a desigualdade (27). Para mostrar esta propriedade, basta

escrever $|\omega| \leq \kappa_5 |X| + \kappa_6$ a partir de (9), com $\kappa_5, \kappa_6 > 0$ e considerando que $r(t)$ é um sinal de referência uniformemente limitado. Logo, a partir da relação ISS dos sinais filtrados em (22) e (23) com respeito a ω , conclui-se que $|\hat{d}_f| \leq \kappa_a \|X_t\| + \kappa_b$ e $|\hat{x}| \leq \kappa_c \|X_t\| + \kappa_d$, para constantes apropriadas $\kappa_a, \kappa_b, \kappa_c, \kappa_d > 0$.

Desse modo, o diferenciador global (31) pode de fato ser construído e suas variáveis de estado substituem exatamente as derivadas temporais do sinal $e(t)$ na variável de deslizamento $\hat{\sigma}$, dada em (37), após algum tempo finito.

Conforme será apresentado no teorema a seguir, o projeto de controle por realimentação de saída garante estabilidade global e rastreamento exato, uma vez que a convergência do diferenciador RED com ganhos dinâmicos não requer *a priori* que o sinal $e^{(\rho)}(t)$ seja uniformemente limitado, tal como foi assumido anteriormente em (Levant, 2003). Em contrapartida, os ganhos variantes no tempo baseados no diferenciador proposto em (Levant and Livne, 2012) parecem funcionar apenas para situações que digam respeito à diferenciação em malha aberta. Em cenários de controle em malha-fechada, tais ganhos dependeriam explicitamente do estado não mensurado.

5.3 Resultado de Estabilidade Principal

Teorema 1 Considere a planta (1) e o modelo de referência (5)–(6). A lei de controle u por realimentação de saída é dada por (38) com função de modulação ϱ definida em (34) satisfazendo (33) e a estimativa exata e global $\hat{\sigma}$ dada por (37) e construída com o estado $\zeta = [\zeta_0 \dots \zeta_{\rho-1}]^T$ do diferenciador proposto (31). Suponha que as hipóteses (A1) a (A4) sejam válidas. Para $\lambda_i, i = 0, \dots, \rho-1$, escolhido adequadamente e $\mathcal{L}(\hat{x}, t)$ em (31) satisfazendo (29), a estimação da variável de deslizamento ideal σ torna-se exata depois de algum tempo finito, *i.e.*, $\hat{\sigma} \equiv \sigma$. Assim, o sistema de erro em malha-fechada com dinâmica (19) é globalmente exponencialmente estável, no sentido de que $X_e(t)$ e, consequentemente, o erro de rastreamento de saída $e(t)$ convergem exponencialmente para zero e todos os sinais de malha-fechada se mantêm uniformemente limitados.

Prova: Apenas o esboço da prova será apresentado. A demonstração é dividida em dois passos. No primeiro, é necessário mostrar que não é possível haver escape em tempo finito nos sinais do sistema em malha-fechada. Devido à hipótese (A4), referente à condição de crescimento linear dos distúrbios não-lineares com respeito ao estado não mensurado x , pode-se mostrar que a entrada de controle u , bem como o termo d_f e o vetor regressor ω em (19) são limitados de modo afim por X_e :

$$|u|, |d_f|, |\omega| \leq k_a \|(X_e)_t\| + k_b, \quad (39)$$

para algumas constantes $k_a, k_b > 0$. Desse modo, os sinais do sistema serão *regulares* e, por esse motivo, podem crescer, no máximo, exponencialmente (Sasthy and Bodson, 1989). Este fato nos leva ao segundo passo da prova. Existem dois instantes de tempo finito $T_1 > 0$ e $T_2 > 0$, de modo que (30) e (33) sejam satisfeitos, $\forall t > \max\{T_1, T_2\}$. Assim, a variável de deslizamento ideal é exatamente estimada, *i.e.*, $\hat{\sigma} \equiv \sigma$ e a compensação de grau relativo é perfeitamente

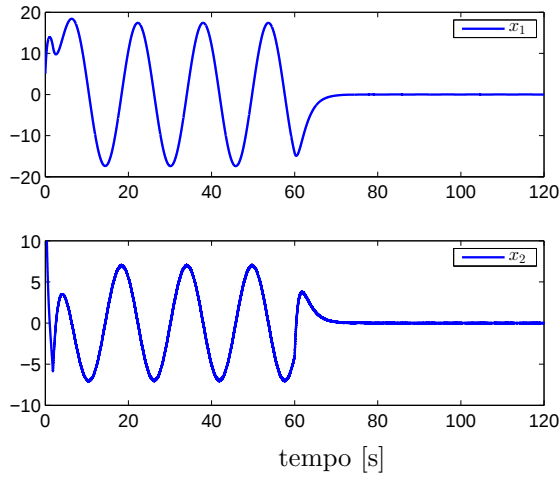


Figura 1: Variáveis de estado do sistema.

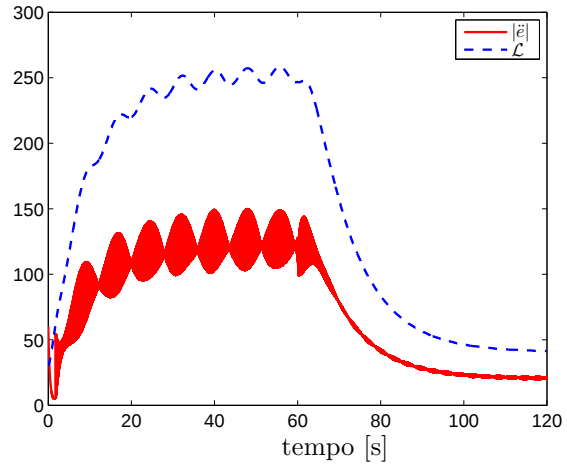


Figura 2: $\mathcal{L}(\hat{x}, t)$ (limitante para $\ddot{e}$).

alcançada. Além disso, a partir do Lema 1 em (Hsu et al., 1997), o modo deslizante ideal $\hat{\sigma}(t) \equiv \sigma(t) \equiv 0$ é alcançado em tempo finito. Uma vez que σ é a saída de grau relativo unitário para (19), é possível reescrevê-la na *forma normal* (Khalil, 2002), de tal modo que o estado do sistema de erro é ISS com respeito a σ , para uma função de classe $\mathcal{KL}$ exponencial. Sendo assim, X_e e $e = H_o X_e$ tendem exponencialmente para zero, bem como o estado ζ do diferenciador, que tem como entrada o sinal $e(t)$. Finalmente, a partir de (39), é fácil concluir que todos os sinais remanescentes são uniformemente limitados. $\square$

6 Resultados de Simulação

Considere o seguinte sistema linear perturbado com grau relativo dois:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - \cos(t) \\ \dot{x}_2 &= -1.5x_2 + x_1 + u + 0.5x_1^{2/3}x_2^{1/3}\sin(t),\end{aligned}$$

onde $y = x_1$ está disponível e o rastreamento de $y_m = \frac{1}{s^2 + 1.5s + 0.5}r$ com $r(t) = 12\sin(0.4t) + 0.2\sin(6t)$ é o objetivo de controle. Em $t = 60$ segundos, o sinal r é alterado para $r = 0$ a fim de mostrar que os ganhos dinâmicos podem ser reduzidos com a norma do estado e a estabilidade é preservada. Os filtros de entrada/saída a seguir foram usados: $\omega_u = \frac{1}{s+2}u$ e $\omega_y = \frac{1}{s+2}y$. A partir do projeto do observador da norma, os seguintes parâmetros foram selecionados: $\gamma_f = 0.1$, $k_\phi = 0$, $k_d = 12$, $c_1 = 10$, $c_2 = 20$. As condições iniciais foram fixadas como $x_1(0) = 5$, $x_2(0) = 25$. Uma vez que $e = x_1 - y_m$, o limitante superior, variante no tempo, estimado para $\ddot{e}$ é calculado por $\mathcal{L}(\hat{x}, t) = |\hat{x}| + |u| + k_m$, com $k_m = 15$. O controlador $u = -(3|\hat{x}| + 2.2)\text{sgn}(\hat{\sigma})$ com superfície de deslizamento $\hat{\sigma} = \zeta_1 + \zeta_0$ é aplicado (com estimativas de e , é usando o diferenciador robusto de primeira ordem (31)). Os resultados de simulação obtidos são mostrados nas Figuras 1 – 4. Na Fig. 4, pode ser visto que depois de um tempo finito, o observador da norma supera o valor real da norma de x . Analogamente, para o diferenciador, existe também um tempo transitente após o qual o limitante superior $\mathcal{L}(\hat{x}, t)$ é sempre

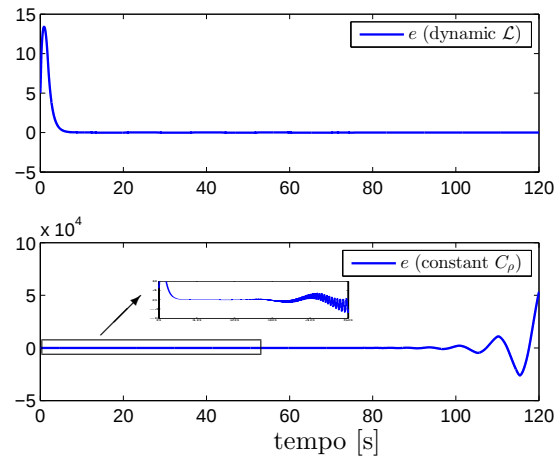


Figura 3: Sinal de erro $e = y - y_m$: ganhos dinâmicos $\times$ ganhos constantes.

válido, veja Fig. 2. Apesar dos distúrbios, o rastreamento exato é alcançado depois de um tempo finito, conforme pode ser observado a partir da trajetória de erro na parte superior da Fig. 3. A parte inferior da Fig. 3 corresponde ao resultado obtido quando um ganho constante, $C_\rho = 25$, é usado para o diferenciador HOSM (24), e considerando que a planta e o controlador estavam sob as mesmas condições aplicadas ao caso do diferenciador com ganhos dinâmicos proposto. É possível observar que o sistema de erro em malha-fechada torna-se instável com o diferenciador de ganho fixo. O projeto com ganhos constantes funciona bem durante os primeiros 20 segundos, intervalo durante o qual o limitante superior $C_\rho = 25$ para $\ddot{e}$ é válido, e então o sinal de erro começa a divergir, uma vez que esse limitante superior é violado. Além disso, quando a referência é alterada para zero em $t = 60$ segundos, a estabilidade não pode ser recuperada outra vez. Isto ocorre porque a magnitude da constante escolhida C_ρ não é suficiente para que se tenha uma estimativa válida, mesmo no caso de estabilização. Isto ocorre devido à grande magnitude das variáveis de estado no momento em que o sinal de referência é alterado. Caso

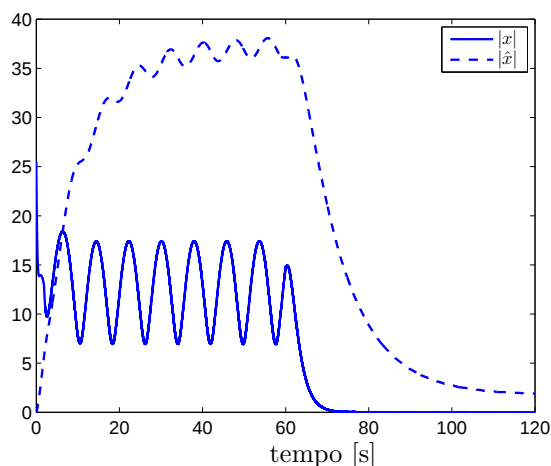


Figura 4: Observador da norma.

se deseje aumentar o ganho arbitrariamente, o preço a ser pago é ter um alto ganho que se mantenha fixo por todo o tempo, aumentando-se assim a sensibilidade do sistema em malha-fechada.

Em nosso projeto de ganhos dinâmicos, existe um transiente, mas a estabilidade é alcançada independentemente das condições iniciais e os ganhos são automaticamente adaptados. Além disso, é importante destacar que com o projeto proposto não há necessidade de implementar qualquer mecanismo para detectar quando o diferenciador converge, como foi feito em (Angulo et al., 2012; Angulo et al., 2013).

7 Conclusões

Um novo controlador de rastreamento por modos deslizantes com realimentação de saída para plantas incertas e não-lineares com grau relativo arbitrário na presença de distúrbios foi proposto. O controlador é baseado em um diferenciador global com ganhos dinâmicos que é atualizado por um observador de norma de estado. Pela primeira vez, estabilidade exponencial global e uniforme é garantida para um projeto de controle por modos deslizantes de ordem superior, bem como rastreamento exato da saída do modelo de referência. A abordagem proposta permite modos de deslizamento ideal em teoria. Portanto, o efeito de *chattering* não é considerado no caso ideal, *i.e.*, na ausência de imperfeições próprias do mundo real, tais como ruído e atrasos de chaveamento. De fato, a variável de deslizamento, estimada pelo diferenciador global/exato e que é o argumento da função relé, se torna identicamente nula depois de algum tempo finito. Além disso, a generalização do algoritmo super-twisting com ganhos variáveis (VGSTA) utilizando somente realimentação de saída através do diferenciador global aqui proposto é apresentada em um artigo companheiro (Oliveira et al., 2016), considerando também plantas de grau relativo arbitrário.

Agradecimentos

Os autores agradecem às agências brasileiras CAPES, CNPq e FAPERJ pelo apoio financeiro.

Referências

- Angulo, M. T., Fridman, L. and Levant, A. (2012). Output-feedback finite-time stabilization of disturbed LTI systems, *Automatica* **48**: 606–611.
- Angulo, M. T., Fridman, L. and Moreno, J. A. (2013). Output-feedback finite-time stabilization of disturbed feedback linearizable nonlinear systems, *Automatica* **49**: 2767–2773.
- Baev, S., Shtessel, Y. and Shkolnikov, I. (2008). Nonminimum-phase output tracking in causal systems using higher-order sliding modes, *IEEE* **18**: 454–467.
- Cunha, J. P. V. S., Costa, R. R. and Hsu, L. (2008). Design of first-order approximation filters for sliding-mode control of uncertain systems, *IEEE Trans. Ind. Electronics* **55**: 4037–4046.
- Cunha, J. P. V. S., Costa, R. R., Lizarralde, F. and Hsu, L. (2009). Peaking free variable structure control of uncertain linear systems based on a high-gain observer, *Automatica* **45**: 1156–1164.
- Emelyanov, S. V., Korovin, S. K., Nersisyan, A. L. and Nisenzon, Y. Y. (1992). Discontinuous output feedback stabilizing an uncertain MIMO plant, *Int. J. Contr.* **55**: 83–107.
- Esfandiari, F. and Khalil, H. K. (1992). Output feedback stabilization of fully linearizable systems, *Int. J. Contr.* **56**: 1007–1037.
- Estrada, A. and Fridman, L. M. (2010). Integral HOSM semiglobal controller for finite-time exact compensation of unmatched perturbations, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **55**: 2645 – 2649.
- Filippov, A. F. (1964). Differential equations with discontinuous right-hand side, *American Math. Soc. Translations* **42**: 199–231.
- Floquet, T., Spurgeon, S. K. and Edwards, C. (2011). An output feedback sliding mode control strategy for MIMO systems of arbitrary relative degree, *Int. J. Robust and Nonlinear Contr.* **21**: 119–133.
- Hsu, L., Costa, R. R. and Cunha, J. P. V. S. (2003). Model-reference output-feedback sliding mode controller for a class of multivariable nonlinear systems, *Asian Journal of Control* **5**: 543–556.
- Hsu, L., Lizarralde, F. and Araujo, A. D. (1997). New results on output-feedback variable structure model-reference adaptive control: design and stability analysis, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **42**: 386–393.
- Ioannou, P. and Sun, J. (1996). *Robust Adaptive Control*, Prentice Hall.
- Kailath, T. (1980). *Linear Systems*, Prentice Hall.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*, Prentice Hall.
- Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control, *Int. J. Contr.* **76**: 924–941.
- Levant, A. (2013). Practical relative degree approach in sliding-mode control, *Springer-Verlag* **440**: 97–115.
- Levant, A. and Livne, M. (2012). Exact differentiation of signals with unbounded higher derivatives, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **57**: 1076–1080.
- Nunes, E. V. L., Hsu, L. and Lizarralde, F. (2009). Global tracking for uncertain systems using output-feedback sliding mode control, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **54**: 1141–1147.
- Nunes, E. V. L., Peixoto, A. J., Oliveira, T. R. and Hsu, L. (2014). Global exact tracking for uncertain MIMO linear systems by output feedback sliding mode control, *Journal of the Franklin Institute* **351**: 2015–2032.
- Oliveira, T. R., Estrada, A. and Fridman, L. (2016). Output-feedback generalization of variable gain super-twisting sliding mode control via global HOSM differentiators, *14th International Workshop on Variable Structure Systems* p. to appear.
- Plestan, F., Shtessel, Y., Brégeault, V. and Poznyak, A. (2010). New methodologies for adaptive sliding mode control, *Int. J. Contr.* **83**: 1907–1919.
- Sastry, S. S. and Bodson, M. (1989). *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*, Prentice Hall.