

FORMULAÇÃO SUAVE DE LIMITES REATIVOS PARA ANÁLISES ESTÁTICAS DE ESTABILIDADE DE TENSÃO

ADRIANO L. ABRANTES*, ALEXANDRE P. SOHN*, LUÍS F. C. ALBERTO*

**Laboratório de Análise Computacional em Sistemas Elétricos de Potência, Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade de São Paulo
Avenida Trabalhador São-carlense, 400, São Carlos, SP, Brasil*

Emails: adrianolabrantes@gmail.com, alexandresohn@usp.br, lfcalberto@usp.br

Abstract— This paper presents a smooth formulation of hard limits that cause loss of differentiability. With smooth limits one may transform limit induced bifurcations into saddle-node bifurcations, enabling the use of consolidated methods for computing these bifurcation values. The smooth formulation was applied to the problem of load margin computation considering synchronous generator reactive power injection limits and compared to the classical hard limit formulation. Results obtained by the continuation method indicate that the error introduced by the smooth formulation is negligible. Besides, with the smooth limits, it was possible to compute an approximation of the limit induced bifurcation point using the point of collapse method.

Keywords— Limit Induced Bifurcation, Saddle-node Bifurcation, Smooth Formulation, Load Margin

Resumo— Este trabalho propõe uma formulação suave de limites causadores de não diferenciabilidade. Com a suavização, pode-se transformar bifurcações induzidas por limites em bifurcações sela-nó, possibilitando o cálculo desses valores de bifurcação através de métodos já conhecidos. A formulação suave foi aplicada ao problema de cálculo da margem de estabilidade de tensão considerando limites de geração de potência reativa em máquinas síncronas e comparada à formulação clássica de limites rígidos. Os resultados obtidos pelo método da continuação indicaram que o erro introduzido pela suavização é pouco significativo. Além disso, com a suavização foi possível calcular uma aproximação do ponto de bifurcação induzida por limite utilizando o método do ponto de colapso.

Palavras-chave— Bifurcação Induzida por Limite, Bifurcação Sela-nó, Formulação Suave, Margem de Estabilidade de Tensão

1 Introdução

O estudo estático de estabilidade de tensão em sistemas elétricos de potência (SEPs) baseia-se na solução do fluxo de potência para diferentes cenários de topologia de rede e variação de carga e de geração para determinar-se a margem de estabilidade de tensão (MET), ou seja, a quantidade de carga adicional que a rede é capaz de atender. Mais especificamente, trabalha-se com um modelo do SEP em que as tensões complexas nodais são incógnitas e as injeções de potência nodais são dadas em função de parâmetros, como na equação (1):

$$f(x, \lambda) = 0, \quad (1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ representa as tensões nodais e $\lambda \in \mathbb{R}$ um parâmetro que determina as injeções de potência nodais.

Tipicamente o ponto de máximo carregamento (PMC) coincide com um ponto de bifurcação sela-nó (BSN) e portanto, pode-se explorar as características desta bifurcação para estimar e calcular a MET (Chiang et al., 1990). Por exemplo, em Chiang et al. (1997), um método para estimar a MET baseado no comportamento quadrático da BSN é proposto. Além disso, considerando que $D_x f$ é singular no ponto de BSN, pode-se procurar por uma solução de (1) que satisfaça esta condição de singularidade (Canizares e Alvarado, 1993). No entanto, SEPs podem apresentar restrições que fazem com que o PMC ocorra em um carregamento significativamente menor do que

o do ponto de BSN, fazendo com que os métodos previamente mencionados falhem em estimar ou calcular a MET.

Um exemplo dessas restrições é o controle de magnitude de tensão realizado nas barras terminais de geradores síncronos, que está sujeito a limites de geração de potência reativa (Q-limite), ou seja, a tensão é controlada desde que esses limites sejam respeitados. Uma vez que o Q-limite é atingido, a tensão deixa de ser regulada e a geração de potência reativa passa a ser controlada para não exceder o limite estipulado. O ponto em que ambas restrições são satisfeitas, isto é, o ponto em que a magnitude de tensão está no *setpoint* (V_{set}) e a injeção de potência reativa está no valor limite (Q_{max}), será denominado ponto de troca de restrição (PTR). Esta troca de controles ou restrições implica em uma descontinuidade em $D_x f$ com relação a x e λ , o que geralmente faz com que o SEP torne-se mais sensível a variações de carga.

No entanto, em alguns cenários a troca de restrição faz com que o sistema não seja capaz de fornecer nenhuma carga adicional, ou seja, o PTR coincide com o PMC. Este fenômeno é denominado bifurcação induzida por limite (BIL), por consistir na mudança (perda) no número de soluções do problema quando um limite é aplicado devido à variação contínua de um parâmetro. Diferentemente da BSN, no ponto de BIL $D_x f$ não é singular e não há comportamento quadrático dominante, logo métodos baseados na busca pelo ponto de BSN não são adequados para tratar este

problema.

Neste contexto, o fenômeno da BIL foi investigado para possibilitar o cálculo da MET diante deste tipo de bifurcação. Em Dobson e Lu (1992), a BIL foi investigada através de um simples modelo dinâmico. Os resultados indicam que um PTR implica em uma mudança descontínua nos autovalores de $D_x f$ e que a BIL ocorre quando esta mudança faz com que um autovalor da jacobiana do sistema dinâmico passe para o outro lado do semi-plano complexo. Também propõe-se em Dobson e Lu (1992) uma análise da BIL através de uma homotopia que leva de uma restrição à outra continuamente. Em Hiskens e Chakrabarti (1996), o método “PQV” foi proposto para calcular diretamente PTRs associados a Q-limites e identificar uma possível BIL através da análise dos autovalores da matriz jacobiana. Em Yorino et al. (2004), um método semelhante é proposto, mas a identificação da BIL ocorre através da comparação dos sinais de $\frac{\partial V}{\partial \lambda}$ e $\frac{\partial Q_g}{\partial \lambda}$ sem justificativa matemática, o que indica que o método pode funcionar apenas para limites e cenários específicos. Yue e Venkatasubramanian (2007) analisaram o fenômeno da BIL através do conceito de restrições complementares e apresentaram resultados que corroboram os de Dobson e Lu (1992). Em Li e Chiang (2008) verificou-se a ocorrência de BIL em um sistema elétrico de grande porte. Já em Li e Chiang (2009) estudou-se o impacto de variar o valor máximo da potência reativa gerada na ocorrência da BIL.

Com o intuito de evitar a não diferenciabilidade que pode ocorrer no PTR, Kataoka (2005) propõe o uso de duas funções suaves para representar as restrições de controle de tensão e Q-limites. No entanto, diversas dificuldades numéricas são verificadas e a suavização, além de implicar em problemas de convergência, requer várias soluções do método de Newton-Raphson para se obter a solução do caso sob estudo (Kataoka, 2005). Apesar do atual trabalho também propor uma maneira de suavizar limites rígidos, a formulação aqui proposta pouco altera a estabilidade numérica do método de Newton-Raphson e não requer múltiplas soluções para se obter a solução de interesse.

O presente trabalho propõe uma formulação que faz com que a troca de restrição entre controle de tensão e Q-limites se dê de forma suave, fazendo com que, pelo menos numericamente, a BIL tome a forma de uma BSN.

Com a suavização, a troca de restrição é automática, não é necessário verificar se a solução obtida pelo fluxo de carga satisfaz os limites e o método da continuação passa por PTRs sem problemas numéricos, mesmo quando o PTR coincide com o PMC. Além disso, o método do ponto de colapso (PoC) (Canizares e Alvarado, 1993), que falha em calcular o PMC no caso de BIL em função da descontinuidade de $D_x f$, é capaz de calcular o PMC devido a BIL quando a formulação suave

é utilizada, já que descontinuidades em $D_x f$ são evitadas e a BIL é transformada em uma BSN.

Este artigo está organizado como segue: a seção 2 apresenta os fundamentos teóricos da formulação proposta; a seção 3 descreve os sistemas teste considerados neste estudo; a seção 4 apresenta os resultados e as análises realizadas; finalmente, as conclusões são apresentadas na seção 5.

2 Base teórica

Considere uma rede modelada pela equação (2) que possui um gerador G com *setpoint* de tensão V_{set} e Q-limite superior Q_{max} (por simplicidade, desprezou-se o Q-limite inferior):

$$f_h(x, V, \lambda) = \begin{pmatrix} g(x, V, \lambda) \\ h(x, V, \lambda) \end{pmatrix} = 0, \quad (2)$$

onde $V \in R$ representa a magnitude de tensão na barra terminal de G , $x \in R^{n-1}$ as demais componentes de tensões nodais, $\lambda \in R$ um parâmetro que determina as injeções de potência na rede, $h : R^{n+1} \rightarrow R$ a componente de f_h dada por (3) que representa o controle de tensão ou reativo de G e $g : R^{n+1} \rightarrow R^{n-1}$ as demais componentes de f_h .

$$h(x, V, \lambda) = \begin{cases} h_v(V), & \text{se } Q_g(x, V, \lambda) \leq Q_{max} \\ h_q(x, V, \lambda), & \text{se } V \leq V_{set} \end{cases} \quad (3)$$

onde

$$h_v(V) = V - V_{set}$$

e

$$h_q(x, V, \lambda) = Q_g(x, V, \lambda) - Q_{max}.$$

A equação $h(x, V, L) = 0$ restringe as soluções de (2) ao conjunto $\Gamma_\infty = \{(x, V, L) : \left\| \frac{V}{V_{set}}, \frac{Q_g(x, V, \lambda)}{Q_{max}} \right\|_\infty = 1\}$, que pode ser visualizado em amarelo na figura 1. Γ_∞ pode ser interpretado como a combinação de duas restrições, a de regulação de tensão onde $0 \leq Q_g(x, V, \lambda) \leq Q_{max}$ e a de geração de potência reativa constante onde $0 \leq V \leq V_{set}$.

A troca de restrição ocorre em $(x_t, V_{set}, \lambda_t)$, sendo que $Q_g(x_t, V_{set}, \lambda_t) = Q_{max}$, de maneira abrupta, causando uma mudança descontínua em $D_{(x,V)} h$ e, conseqüentemente, em $D_{(x,V)} f_h$. Ou seja, para um valor de λ um pouco menor (ou maior) que λ_t , $D_{(x,V)} h = D_{(x,V)} h_v$. Já para um valor de λ um pouco maior (ou menor) que λ_t , $D_{(x,V)} h = D_{(x,V)} h_q$.

Com o intuito de eliminar esta mudança abrupta, pode-se aproximar a restrição $h(x, V, \lambda) = 0$ por outra que mantenha as soluções próximas a Γ_∞ e seja diferenciável em todo o seu domínio. Considerando que $\lim_{p \rightarrow \infty} \|z\|_p = \|z\|_\infty$ (Vidyasagar, 2002), pode-se aproximar o conjunto Γ_∞ pelo conjunto $\Gamma_p = \{(x, V, \lambda) : \left\| \frac{V}{V_{set}}, \frac{Q_g(x, V, \lambda)}{Q_{max}} \right\|_p = 1\}$.

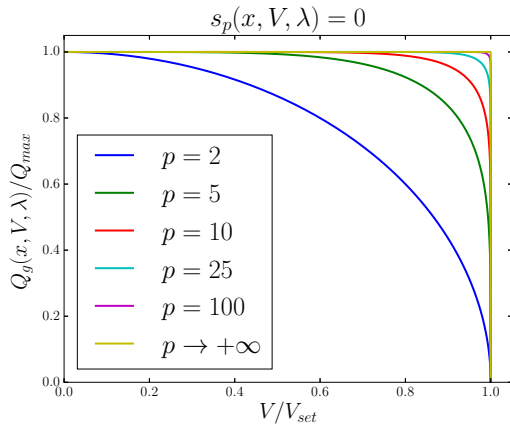


Figura 1: Restrição suave de controle de tensão com limites reativos.

Considerando que $1^p = 1$ pode-se definir a restrição suave por (4) e o modelo suave de rede por (5):

$$s_p(x, V, \lambda) = \left(\frac{V}{V_{set}} \right)^p + \left(\frac{Q_g(x, V, \lambda)}{Q_{max}} \right)^p - 1 \quad (4)$$

$$f_s(x, V, \lambda) = \left(\frac{g(x, V, \lambda)}{s_p(x, V, \lambda)} \right) = 0. \quad (5)$$

Assumindo que g é uma função contínua e diferenciável em relação a x , V e λ , verifica-se que f_s manterá estas propriedades. Portanto, os autovalores de $D_{(x,V)}f_s$ variam continuamente com x , V e λ , o que impede o comportamento típico da BIL, isto é, o salto de um autovalor de um lado do semiplano complexo ao outro. Além disso, verifica-se que nas partes de Γ_p menos curvas e mais próximas de Γ_∞ os autovalores de $D_{(x,V)}f_h$ são qualitativamente semelhantes aos de $D_{(x,V)}f_s$, salvos eventuais escalonamentos (note que pode-se multiplicar h_v e h_q por escalares não nulos sem alterar Γ_∞ para que os autovalores sejam próximos quantitativamente também). Neste contexto, é intuitivo esperar que enquanto um autovalor troca de semiplano complexo repentinamente em (2), um autovalor cruza o eixo imaginário de maneira contínua em (5), isto é, uma BIL em (2) torna-se uma BSN em (5).

Apesar deste trabalho não conter uma demonstração formal de que a formulação de restrição suave proposta transforma a BIL em uma BSN, apresenta-se aqui, além da argumentação prévia, uma verificação numérica deste fenômeno na figura 6. Além disso, as análises apresentadas adiante baseiam-se em encontrar pontos de BSN e, de fato, o método PoC converge para um ponto de BSN de (5) próximo ao ponto de BIL de (2).

Finalmente, é relevante notar que, apesar deste trabalho tratar de uma restrição específica, a ideia apresentada pode ser aplicada para suavizar restrições genericamente.

3 Sistemas teste

Dois SEPs foram utilizados para validar a formulação suave de limites proposta neste trabalho. Seguem suas descrições.

3.1 Sistema teste 1

Com o intuito de comparar a formulação de limite suave com a clássica de maneira simples, utilizou-se um sistema radial de 3 barras ilustrado na figura 2. Os parâmetros deste sistema encontram-se nas tabelas 1 e 2.

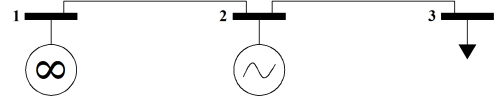


Figura 2: Sistema teste 1 - Diagrama de rede.

Tabela 1: Barras do sistema teste 1.

Barra	V	θ	P_{inj}	Q_{inj}
1	1	0	-	-
2	1	-	0	-
3	-	-	-0.8λ	-0.6λ

Tabela 2: Linhas do sistema teste 1.

Linha	r	x	b_{sh}
1-2	0.2	1.0	0.02
2-3	0.2	1.0	0.02

3.2 Sistema teste 2

Para validar a formulação proposta em um sistema de maior porte, utilizou-se o SEP ilustrado na figura 3. Os dados deste sistema podem ser encontrados em (Sohn, 2014). Nas análises realizadas neste SEP adotou-se uma única carga dependente de λ (parâmetro de carregamento) na barra 369, sendo $P_L = Q_L = 0.1 + 0.7\lambda$.

4 Resultados e análises

Para validar a formulação proposta, estudou-se dois cenários de Q-limites em cada sistema teste através do método da continuação (Chiang et al., 1995; Seydel, 1988) e do método PoC (Canizares e Alvarado, 1993; Seydel, 1988). Na formulação suave, utilizou-se s_p com $p = 100$ pois verificou-se que com esta norma a aproximação já era precisa o bastante. No entanto, pode-se aumentar a ordem da norma utilizada para obter resultados ainda mais precisos.

Inicialmente, obtiveram-se diversas soluções de cada sistema teste sob a modelagem de (2) e de (5) pelo método da continuação para que fosse

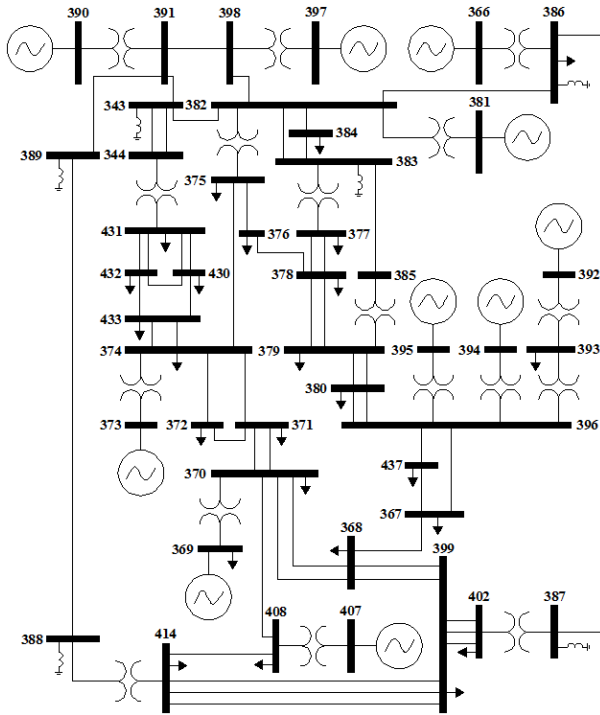


Figura 3: Sistema teste 2 - equivalente sul-brasileiro reduzido.

possível verificar visualmente o comportamento da rede quando o carregamento varia e comparar a proximidade entre as soluções das diferentes formulações. Posteriormente, utilizou-se a solução obtida com maior valor de carregamento (λ) como condição inicial para o método PoC, para cada sistema teste e cenário.

No primeiro cenário, a violação do Q-limite ocorre em um carregamento menor e apenas torna o sistema mais sensível a variações de carga. O PMC é um ponto de BSN e ocorre em um carregamento maior que o PTR.

Já no segundo cenário, a violação do Q-limite implica em uma BIL que coincide com o PMC, ou seja, se o Q-limite é violado em λ_b , a rede não apresenta solução próxima para um carregamento um pouco maior que λ_b .

4.1 Resultados para o sistema teste 1

Na figura 4 pode-se visualizar as soluções obtidas para (5) e (2) com $Q_{max} = 0.15$. O PMC obtido pelo método PoC também é apresentado para ambas formulações, (5) em vermelho e (2) em preto.

Neste caso, o método PoC convergiu com ambas formulações para o PMC, isto é, para o ponto de BSN. Além disso, pode-se verificar visualmente a sobreposição das soluções obtidas para cada formulação, o que indica que a aproximação proposta é válida.

Na figura 5, a mesma análise é apresentada, mas com $Q_{max} = 0.5$. Neste cenário, a violação do Q-limite faz com que o PTR seja um ponto de BIL e, conseqüentemente, o próprio PMC.

Obter este PMC para (5) com o método PoC é possível, pois a formulação suave, que faz com que os autovalores mudem continuamente, transforma o ponto de BIL em uma BSN. No entanto, a aplicação do método PoC diante de uma BIL sem suavização falha, já que o PMC não satisfaz as condições de BSN.

A figura 6 ilustra o efeito da formulação proposta sobre a parte real dos autovalores da matriz jacobiana de cada formulação no cenário de BIL em função do carregamento. Verifica-se que, enquanto na formulação clássica há uma mudança abrupta na parte real do autovalor que cruza o eixo imaginário, na formulação suave este cruzamento se dá de maneira contínua, garantindo a existência de um valor de λ no qual o autovalor tem parte real nula. Assumindo que apenas um autovalor cruza o eixo imaginário, sabe-se que este cruza a origem, pois teria-se um par conjugado no caso de parte imaginária não nula. Portanto, $D_{(x,V)}f_s(x,V,\lambda)$ deve satisfazer as condições de BSN para algum valor de x , V e λ .

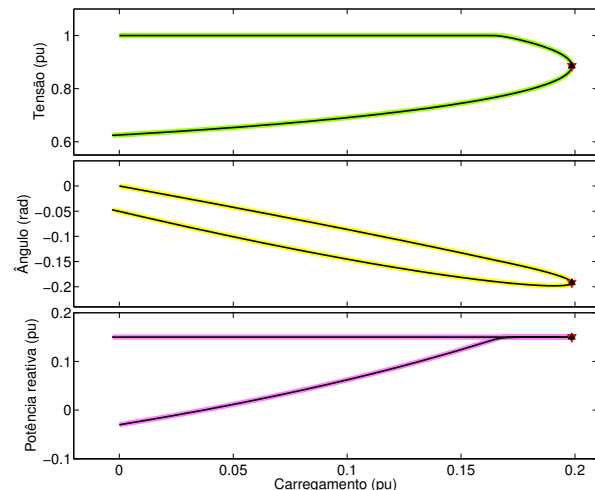


Figura 4: Tensão, ângulo e potência reativa gerada na barra 2 para o cenário de BSN. Formulação clássica (colorida). Formulação suave (preta).

4.2 Resultados para o sistema teste 2

A figura 7 apresenta a análise para o cenário cujo PMC é uma BSN, onde utilizaram-se os valores de Q-limite apresentados na tabela 3. Geradores não citados na tabela não possuem Q-limites.

Tabela 3: Q-limites utilizados para o sistema teste 2 no cenário de BSN.

Barra	369	392	394	395
Q_{max}	0.8	0.6	0.7	1.2

Comparando os resultados apresentados nas figuras 7 e 4 nota-se que há um desvio maior entre as soluções de (5) e de (2), principalmente para

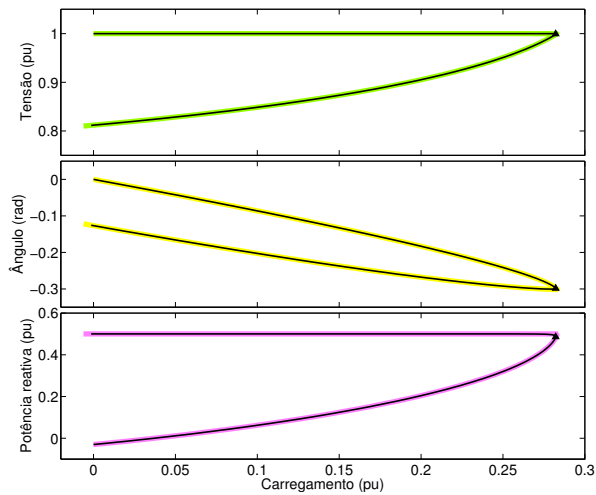


Figura 5: Tensão, ângulo e potência reativa gerada na barra 2 para o cenário de BIL. Formulação clássica (colorida). Formulação suave (preta).

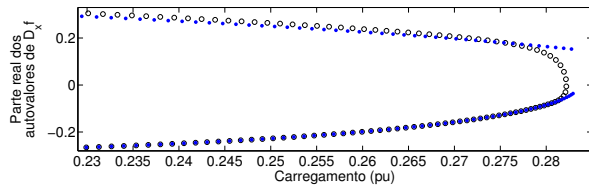


Figura 6: Parte real dos autovalores de $D_x f(x, \lambda)$ do sistema teste 1 para o caso de BIL referente à figura 5. Formulação clássica (azul). Formulação suave (branca).

soluções calculadas depois do PTR. No entanto, a MET obtida foi 2.0295 para ambas formulações.

Na figura 8 o cenário de BIL é ilustrado. A MET obtida pelo método PoC com a formulação suave foi 9.6773. Como o método PoC não convergiu com a formulação clássica, pode-se comparar esta MET com o carregamento máximo obtido pelo método da continuação com a formulação clássica, que foi de 9.6749, um erro pouco significativo.

5 Conclusões

O presente trabalho propõe uma formulação que suaviza limites que implicam em chaveamento de equações causando mudanças descontínuas de sensibilidade.

A formulação proposta possibilita que o método PoC estime o PMC devido à BIL, o que não é possível utilizando a formulação clássica. Neste contexto, a formulação foi aplicada ao problema de Q-limites em um SEP de 3 barras e a outro de 45. Obteve-se através do método PoC METs muito próximas das obtidas com a formulação clássica pelo do método da continuação.

Futuramente pretende-se demonstrar matematicamente que a formulação proposta transforma a BIL em uma BSN, determinar um limite superior para o erro introduzido pela suavização e

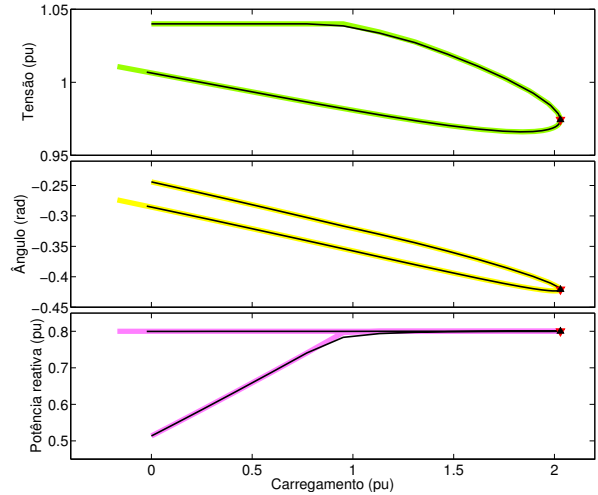


Figura 7: Tensão, ângulo e potência reativa gerada na barra 369 para o cenário de BSN. Formulação clássica (colorida). Formulação suave (preta).

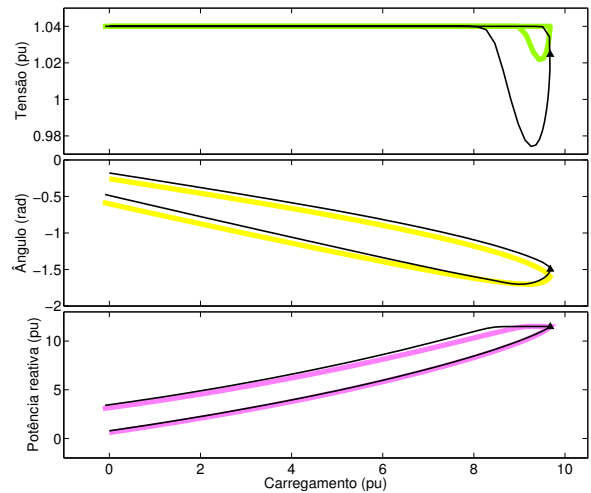


Figura 8: Tensão, ângulo e potência reativa gerada na barra 369 para o cenário de BIL. Formulação clássica (colorida). Formulação suave (preta).

aplicar a formulação proposta a outros limites.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP, processo N^o 2014/01158-0), à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ, processo N^o 455299/2014-5), pelo suporte financeiro.

Referências

Canizares, C. A. e Alvarado, F. L. (1993). Point of collapse and continuation methods for large ac/dc systems, *IEEE Transactions on Power Systems* **8**(1): 1–8.

- Chiang, H.-D., Dobson, I., Thomas, R., Thorp, J. e Fekih-Ahmed, L. (1990). On voltage collapse in electric power systems, *Power Systems, IEEE Transactions on* **5**(2): 601–611.
- Chiang, H.-D., Flueck, A. J., Shah, K. S. e Balu, N. (1995). Cpflo: a practical tool for tracing power system steady-state stationary behavior due to load and generation variations, *IEEE Transactions on Power Systems* **10**(2): 623–634.
- Chiang, H.-D., Wang, C.-S. e Flueck, A. J. (1997). Look-ahead voltage and load margin contingency selection functions for large-scale power systems, *IEEE Transactions on Power Systems* **12**(1): 173–180.
- Dobson, I. e Lu, L. (1992). Voltage collapse precipitated by the immediate change in stability when generator reactive power limits are encountered, *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on* **39**(9): 762–766.
- Hiskens, I. e Chakrabarti, B. (1996). Direct calculation of reactive power limit points, *International Journal of Electrical Power & Energy Systems* **18**(2): 121 – 129.
- Kataoka, Y. (2005). A smooth power flow model of electric power system with generator reactive power limits taken into consideration, *2005 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pp. 5286–5289 Vol. 5.
- Li, S.-H. e Chiang, H.-D. (2008). Structure-induced bifurcation in large-scale electric power systems, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **18**(5): 1415–1424.
- Li, S.-H. e Chiang, H.-D. (2009). Impact of generator reactive reserve on structure-induced bifurcation, *Power Energy Society General Meeting, 2009. PES '09. IEEE*, pp. 1–5.
- Seydel, R. (1988). *From equilibrium to chaos: practical bifurcation and stability analysis*, Elsevier.
- Sohn, A. P. (2014). *Estudos de estabilidade de sistemas elétricos de potência na presença de diferentes modelos de unidades eólicas*, 109 f. Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos, fev. 2014.
- Vidyasagar, M. (2002). *Nonlinear Systems Analysis*, Classics in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Yorino, N., Koeda, K., Li, H.-Q., Zoka, Y. e Sasaki, H. (2004). A new continuation power flow based on q-limit points, *Circuits and Systems, 2004. MWSCAS '04. The 2004 47th Midwest Symposium on*, Vol. 2, pp. II–341–II–344.
- Yue, X. e Venkatasubramanian, V. (2007). Complementary limit induced bifurcation theorem and analysis of q limits in power-flow studies, *Bulk Power System Dynamics and Control - VII. Revitalizing Operational Reliability, 2007 iREP Symposium*, pp. 1–8.