

ADAPTAÇÃO DE SEGUNDO NÍVEL USANDO MODELOS FIXOS COM DESLIGAMENTO DO SINAL PERSISTENTEMENTE EXCITANTE

PEDRO YOCHINORI GUSHIKEN*, ALDAYR DANTAS DE ARAÚJO*

**Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Laboratório de Automação, Controle e Instrumentação
Natal, Rio Grande do Norte, Brasil*

Emails: pedrogush@gmail.com, aldayr@dca.ufrn.br

Abstract— A new approach, described as second level adaptation, was introduced in (Han and Narendra, 2012) for the control of unknown linear time-invariant plants using multiple identification models, and its robustness properties were discussed in (Narendra et al., 2014). If $\theta_p \in R^n$, and if the unknown parameter vector of a LTI system lies in the convex hull $P(0)$ of $(n+1)$ vectors $\theta_i(0)$ in parameter space, then the estimate $\hat{\theta}_p(t)$ may be computed from a linear convex combination of the $(n+1)$ vectors and the problem of identifying the plant parameter vector becomes that of estimating the coefficient vector $\bar{\alpha}(t)$ such that $\bar{\Theta}\bar{\alpha}(t) = \theta_p$, with $\bar{\Theta}$ being the matrix formed by the $(n+1)$ vectors. If the representations of the plants and models are in companion form, and all the state variables are accessible, simulation results were presented to demonstrate that the new method would result in much better performance than conventional adaptive control. In this paper, we introduce a scheme for turning off the persistently exciting signal needed for identification after the convergence of the parameter estimates by evaluating the rate of adaptation of the coefficients α . We also highlight some details regarding the implementation of the second level adaptation concept, namely the need for projection of the coefficients α and the possibility of choosing a gain for the adaptive equation for $\dot{\alpha}$.

Keywords— Adaptive Control, Identification, Persistently Exciting Signal, Multiple Models

Resumo— Uma nova abordagem, descrita como adaptação de segundo nível, foi introduzida em (Han and Narendra, 2012) para o controle de plantas lineares invariantes no tempo usando múltiplos modelos de identificação, e suas propriedades de robustez foram discutidas em (Narendra et al., 2014). Se $\theta_p \in R^n$, e se o vetor de parâmetros desconhecidos de um sistema LTI se encontra no fecho convexo $P(0)$ de $(n+1)$ vetores $\theta_i(0)$ no espaço de parâmetros, então a estimativa $\hat{\theta}_p(t)$ pode ser calculada como uma combinação linear convexa dos $(n+1)$ vetores e o problema da identificação do vetor de parâmetros da planta se torna o de estimar o vetor de coeficientes $\bar{\alpha}(t)$ tal que $\bar{\Theta}\bar{\alpha}(t) = \theta_p$, com $\bar{\Theta}$ sendo a matriz formada pelos $(n+1)$ vetores. Se as representações das plantas e modelos se encontram em forma canônica, e todas as variáveis de estado são acessíveis, resultados de simulação demonstraram que o novo método resulta em uma melhoria significativa de desempenho em relação ao controle adaptativo convencional. Neste trabalho, introduzimos uma estratégia para o desligamento do sinal persistentemente excitante necessário para a identificação após a convergência das estimativas dos parâmetros através da avaliação da taxa de adaptação dos coeficientes α . Também destacamos alguns detalhes em relação à implementação do conceito de adaptação de segundo nível: a necessidade do uso de técnicas de projeção nos coeficientes α e a possibilidade de escolher um ganho para a equação adaptativa para $\dot{\alpha}$.

Palavras-chave— Controle Adaptativo, Identificação, Sinal Persistentemente Excitante, Múltiplos Modelos

1 Introdução

O controle adaptativo tem sido estudado como forma de lidar com incertezas paramétricas desde os anos de 1960 e uma literatura extensiva existe na área (Ioannou and Sun, 1996; Narendra and Annaswamy, 1989; Tao, 2003; Goodwin and Sin, 1984; M. Krstic and Kokotovic, 1995). Hoje é geralmente aceito que quando tais incertezas são pequenas o controle adaptativo convencional é capaz de garantir estabilidade e robustez do sistema. No entanto, na presença de grandes incertezas paramétricas, o que se observa são comportamentos transitórios muito oscilatórios. Na tentativa de lidar com grandes incertezas paramétricas, uma abordagem envolvendo o uso de múltiplos modelos de identificação, que delimitem um fecho convexo dentro do qual o vetor de parâmetros da planta se localiza, foi proposta em (Han and Narendra, 2012). Esta abordagem apresenta propriedades promissoras de robustez, estabilidade e rapidez de convergência como mostrado em (Narendra

et al., 2014), pois as informações dos diferentes modelos são usadas em conjunto. No entanto, para que se garanta a convergência das estimativas dos parâmetros da planta para seus valores corretos, é necessário que seja introduzido na planta um sinal persistentemente excitante, como por exemplo um sinal rico em frequências. Tais sinais, por definição, produzem respostas oscilatórias na saída da planta, o que de forma geral é indesejável.

Neste trabalho, introduzimos uma figura de mérito $\eta \in [0, 1]$, que nos permite avaliar qual a rapidez de atualização das estimativas dos parâmetros da planta. A partir desta avaliação podemos decidir com algum grau de confiança se o vetor de parâmetros $\hat{\alpha}$ atingiu seus valores corretos. Explicitamos um detalhe relativo à projeção do vetor de parâmetros $\hat{\alpha}$ e mostramos que é possível obter tempos de convergência ainda menores caso introduzamos um ganho na equação de adaptação de $\hat{\alpha}$.

2 Formulação do Problema

Discutimos aqui algumas ideias referentes ao controle adaptativo convencional quando o objetivo é fazer com que a planta rastreie a saída de um modelo de referência. Assumimos que o vetor de estado da planta é acessível e que as matrizes A_p da planta e A_m do modelo estão em forma canônica.

A. Controle Adaptativo Convencional com Variáveis de Estado Acessíveis

Seja a planta descrita por:

$$\Sigma_p : \dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + b u(t) \quad (1)$$

onde $x_p(t) \in R^n$, $u(t) \in R$ e A_p e b estão na seguinte forma canônica:

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Consideremos o vetor b conhecido e os parâmetros $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ como sendo desconhecidos. Seja o vetor $\theta_p^T = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ o vetor de parâmetros desconhecidos da planta e assumimos que o mesmo se localiza em uma região conhecida do R^n .

Seja o modelo de referência descrito por:

$$\Sigma_m : \dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + b r(t) \quad (2)$$

com A_m no mesmo formato de A_p , escolhido de forma que o modelo de referência seja estável. A referência $r(t)$ é escolhida pelo projetista e uniformemente limitada.

B. Caracterização

Queremos escolher a entrada $u(t)$, na presença de incertezas paramétricas, que garanta a saída da planta seguindo a saída do modelo de forma assintótica. Adicionalmente, queremos que o vetor de estimativas dos parâmetros da planta tenda aos valores corretos e que a referência não seja um sinal rico em frequências para todo o tempo t . O controle adaptativo direto e indireto são duas formas de resolver este problema. Neste trabalho discutiremos apenas conceitos ligados ao método indireto proposto.

No controle adaptativo indireto convencional, escolhemos a entrada:

$$u(t) = r(t) + k^T x_p(t) \quad (3)$$

O modelo usado para identificação:

$$\dot{\hat{x}}_p = A_m \hat{x}_p(t) + [A_1(t) - A_m] x_p(t) + b u(t) \quad (4)$$

que gera o erro entre os vetores de estado da planta e de sua estimativa:

$$e_1(t) = \hat{x}_p(t) - x_p(t) \quad (5)$$

onde A_1 se encontra na forma canônica mostrada anteriormente e sua última linha consiste do vetor θ_1^T adaptado através de:

$$\dot{\theta}_1 = -e_1^T P b x_p(t) \quad (6)$$

e k^T da lei de controle é dado por:

$$k^T = \theta_m - \theta_1 \quad (7)$$

onde θ_m corresponde à última linha transposta da matriz A_m e θ_1 é uma estimativa de θ_p .

3 Adaptação de Segundo Nível

A. Fecho Convexo

Em (Han and Narendra, 2012), foi provado que, se θ_p se encontra em um fecho convexo de pelo menos $n+1$ vetores adaptativos $\theta_i(0)$, e as condições iniciais da planta e dos modelos são iguais, então o fecho convexo formado por $\theta_i(0)$ continuará a conter θ_p para todo o tempo. Desta forma, é possível calcular θ_p através de uma combinação convexa dos vetores $\theta_i(t)$.

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \theta_i = \theta_p, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \quad (8)$$

ou seja, o problema da estimação de θ_p pode ser transformado no problema da estimação de α_i . É possível usar esta propriedade do fecho para combinar múltiplos modelos usando a estratégia de adaptação convencional, e também se torna possível o uso de múltiplos modelos fixos.

B. Múltiplos Modelos

Sejam os modelos de identificação:

$$\Sigma_i : \dot{x}_i = A_m x_i(t) + [A_i(t) - A_m] x_p(t) + b u(t) \quad (9)$$

onde θ_i^T é a última linha de cada matriz A_i e θ_i pode ser fixo ou adaptado segundo as leis convencionais.

Sabemos que, se θ_p se encontra no fecho convexo delimitado por pelo menos $n+1$ modelos, existem $0 \leq \alpha_i \leq 1$, e $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \theta_i(t_0) = \theta_p \quad (10)$$

Definimos o erro entre os modelos e a planta:

$$e_i(t) = x_i(t) - x_p(t) \quad (11)$$

e o erro entre os parâmetros da planta e dos modelos:

$$\phi_i(t) = \theta_i(t) - \theta_p \quad (12)$$

Então segue que:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \phi_i(t_0) = \theta_p - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \theta_i(t_0) = 0 \quad (13)$$

Destas equações, temos que:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i e_i(t) = 0 \quad (14)$$

E, em forma matricial:

$$\bar{\Theta}(t)\bar{\alpha} = \theta_p \quad (15)$$

$$\bar{E}(t)\bar{\alpha} = 0 \quad (16)$$

onde $\bar{\Theta}$ e $\bar{E}$ são matrizes $n \times (n+1)$.

Podemos expressar:

$$\Theta(t)\alpha = \theta_p - \theta_{n+1} \quad (17)$$

$$E(t)\alpha = -e_{n+1}(t) \quad (18)$$

onde $\Theta(t)$ e $E(t)$ são matrizes $n \times n$, onde cada vetor coluna é $\theta_i(t) - \theta_{n+1}(t)$ e $e_i(t) - e_{n+1}(t)$, respectivamente, e $\alpha^T = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$. A partir de (18), podemos obter uma lei adaptativa para α :

$$\dot{\hat{\alpha}} = -E^T(t)E(t)\hat{\alpha} - E^T(t)e_{n+1}(t) \quad (19)$$

Notamos que a multiplicação da equação no lado direito por um escalar não altera o ponto de equilíbrio. E definindo o erro entre a estimativa $\hat{\alpha}$ e seu valor correto α como $\tilde{\alpha} = \hat{\alpha}(t) - \alpha$, temos a equação:

$$\dot{\tilde{\alpha}} = -E^T(t)E(t)\tilde{\alpha} \quad (20)$$

Alternativamente, α pode ser calculado algebricamente por:

$$\alpha = E^{-1}(t)e_{n+1}(t) \quad (21)$$

onde e_{n+1} é o erro do modelo (n+1):

$$e_{n+1} = x_{n+1} - x_p \quad (22)$$

4 Desligamento do Sinal Persistentemente Excitante

Para garantir a convergência dos parâmetros, tanto no controle adaptativo convencional quanto na adaptação de segundo nível, é necessária na entrada da planta a presença de um sinal persistentemente excitante, como por exemplo um sinal rico em frequências, de forma que seja garantido um certo nível de excitação da planta. De forma geral, para cada dois parâmetros a serem estimados, é necessária uma senoide numa frequência capaz de excitar a planta. No entanto, a introdução de um sinal senoidal em uma planta linear produz uma saída com essa mesma característica. Desejamos eliminar este

sinal quando o mesmo não for mais necessário.

Definimos a figura de mérito η como:

$$\eta = q \frac{\dot{\hat{\alpha}}^T \dot{\hat{\alpha}}}{1 + q \dot{\hat{\alpha}}^T \dot{\hat{\alpha}}} \quad (23)$$

onde $q > 0$ é um escalar, de forma que, para $\dot{\hat{\alpha}} \uparrow$ grande tenhamos o valor de $\eta \rightarrow 1$ e quando $\dot{\hat{\alpha}} \downarrow$, $\eta \rightarrow 0$.

Introduzimos o seguinte sinal de referência:

$$r(t) = \begin{cases} r_1(t), & \text{se } \eta < m \\ r_2(t), & \eta \geq m \end{cases}, \quad (24)$$

onde

$$\dot{r}_1(t) = v * (-r(t) + c) \quad (25)$$

$$r_2(t) = c + l \sum_{i=1}^{\text{ceil}(n/2)} \sin(w_i t) \quad (26)$$

As constantes c, l, m, w_i, v são escolhidas pelo projetista com $m, l \in]0, 1[$, $v, w_i > 0$. $r_2(t)$ é rico em frequências em relação a uma planta de ordem n . A função $\text{ceil}(n/2)$ tem valor $n/2$ quando n é par e valor $(n/2 + 1/2)$ quando n é ímpar.

5 Controle e Identificação

Nesta seção, discutiremos apenas os resultados obtidos usando a equação (19) para adaptar $\hat{\alpha}$, modificada da seguinte forma:

$$\dot{\hat{\alpha}} = -\gamma E^T(t)E(t)\hat{\alpha} - \gamma E^T(t)e_{n+1}(t) \quad (27)$$

onde γ é um escalar positivo.

Começamos com estudos de simulação para plantas instáveis, que devem ser controladas para garantir a saída uniformemente limitada. Os modelos de identificação escolhidos são fixos.

5.1 Projeção

Um detalhe importante na adaptação de $\hat{\alpha}$, é que a equação (19) não garante que $0 \leq \hat{\alpha}_i \leq 1$ e, desta forma, é necessário implementar projeção destes parâmetros, já que $\hat{\alpha}$ deve se manter no fecho convexo. Como a região em que $\hat{\alpha}$ se encontra é retangular para os parâmetros $i = 1, \dots, n$, implementamos as seguintes modificações no algoritmo:

$$\dot{\hat{\alpha}}_i = \begin{cases} 0, & \text{se } \hat{\alpha}_i \geq 1 \text{ e } \dot{\hat{\alpha}}_i > 0 \\ & \text{ou } \hat{\alpha}_i \leq 0 \text{ e } \dot{\hat{\alpha}}_i < 0 \\ \dot{\hat{\alpha}}_i, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (28)$$

e como $1 - \sum_{i=1}^n \hat{\alpha}_i = \hat{\alpha}_{n+1}$, e $-\sum_{i=1}^n \dot{\hat{\alpha}}_i = \dot{\hat{\alpha}}_{n+1}$:

$$\dot{\hat{\alpha}}_i = \begin{cases} 0, & \text{se } \hat{\alpha}_{n+1} \geq 1 \text{ e } \dot{\hat{\alpha}}_{n+1} > 0 \\ & \text{ou } \hat{\alpha}_{n+1} \leq 0 \text{ e } \dot{\hat{\alpha}}_{n+1} < 0 \\ & \text{e } \text{sgn}(\dot{\hat{\alpha}}_{n+1}) = \text{sgn}(\dot{\hat{\alpha}}_i) \\ \dot{\hat{\alpha}}_i, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (29)$$

5.2 Simulação 1 - Planta Instável de Segunda Ordem

Para demonstrar os resultados obtidos, simulamos uma planta de segunda ordem sem ruído de medição e sem perturbações. O vetor de parâmetros da planta é $\theta_p^T = [2.3 \text{ } 3.6]$, correspondendo à função de transferência $G(s) = \frac{1}{s^2 + 3.6s - 2.3}$. Escolhemos os modelos de identificação $\theta_1^T = [-4 \text{ } 5]$, $\theta_2^T = [-3 \text{ } 2]$, $\theta_3^T = [8 \text{ } 4]$. Queremos que a planta siga o modelo de referência $\theta_m^T = [-4 \text{ } 4]$. Partimos do repouso com a planta e modelos de identificação, e escolhemos $x_m^T(0) = [0.2 \text{ } 0.3]$ e as condições iniciais da estimativa da planta $\hat{\alpha}^T(0) = [0 \text{ } 1]$. Escolhemos $c = 5$, $\gamma = 20$, $q = 10^4$, $v = 10$, $l = 0.2$, $w_1 = 1$, $m = 10^{-2}$. Os resultados se encontram na Figura 1. Em particular, verificamos que os parâmetros convergem para seus valores corretos após deslizar na superfície do fecho durante algum tempo. E também que, dada esta convergência, a parcela PE da referência é desligada pois $\eta \rightarrow 0$.

5.3 Simulação 2 - Planta Instável de Terceira Ordem

Simulamos também uma planta de terceira ordem sem ruído de medição e sem perturbações. O vetor de parâmetros da planta é $\theta_p^T = [-6 \text{ } 9 \text{ } 2]$, correspondendo à função de transferência $G(s) = \frac{1}{s^3 - 2s^2 - 9s + 6}$. Escolhemos os modelos de identificação $\theta_1^T = [-8 \text{ } 7 \text{ } 1]$, $\theta_2^T = [-2 \text{ } 13 \text{ } 6]$, $\theta_3^T = [14 \text{ } -6 \text{ } -2]$ e $\theta_4^T = [-15 \text{ } 7 \text{ } 9]$. Queremos que a planta siga o modelo de referência $\theta_m^T = [-9 \text{ } -10 \text{ } -12]$. Partimos com a planta e modelos de identificação com as condições iniciais $x_p^T(0) = x_i^T(0) = [0.1 \text{ } 0.2 \text{ } 0.3]$ e com o modelo de referência em repouso, e as condições iniciais da estimativa da planta $\hat{\alpha}^T(0) = [0 \text{ } 0 \text{ } 0]$. Escolhemos $c = 5$, $\gamma = 100$, $q = 10^4$, $v = 10$, $l = 0.2$, $w_1 = 1, w_2 = 2$, $m = 10^{-2}$. Os resultados se encontram na Figura 2. Novamente, os parâmetros convergem e a parcela PE da referência é desligada.

5.4 Simulação 3 - Planta Instável de Segunda Ordem com Perturbação na Entrada

Neste caso introduzimos uma perturbação na planta de segunda ordem estudada na simulação 1, no tempo $t_0 = 16s$, com $p(t_0) = -1$, e retiramos a perturbação em $t_1 = 22s$. Observamos que a introdução de uma perturbação na planta se reflete nas estimativas dos parâmetros e que, após a retirada, os valores retornam para uma vizinhança de θ_p . Os resultados se encontram na Figura 3.

5.5 Simulação 4 - Planta Instável de Segunda Ordem com Ruído de Medição

Também simulamos o que acontece no caso em que as medidas das variáveis de estado da planta não

são livres de ruído. Com um ruído distribuído de forma normal no valor de $\pm 7.5\%$ do valor da saída em regime permanente introduzido nas medições das variáveis de estado da planta, se verificou a convergência dos parâmetros e do erro de saída, porém com os seguintes ajustes: $m = 0.2$, $\gamma = 20$. Os resultados se encontram na Figura 4. Nota-se a influência do ruído mais pronunciadamente em η , enquanto que os outros gráficos permanecem praticamente idênticos aos da simulação 1. Todas as simulações foram feitas usando passo de integração fixo $h = 10^{-3}s$

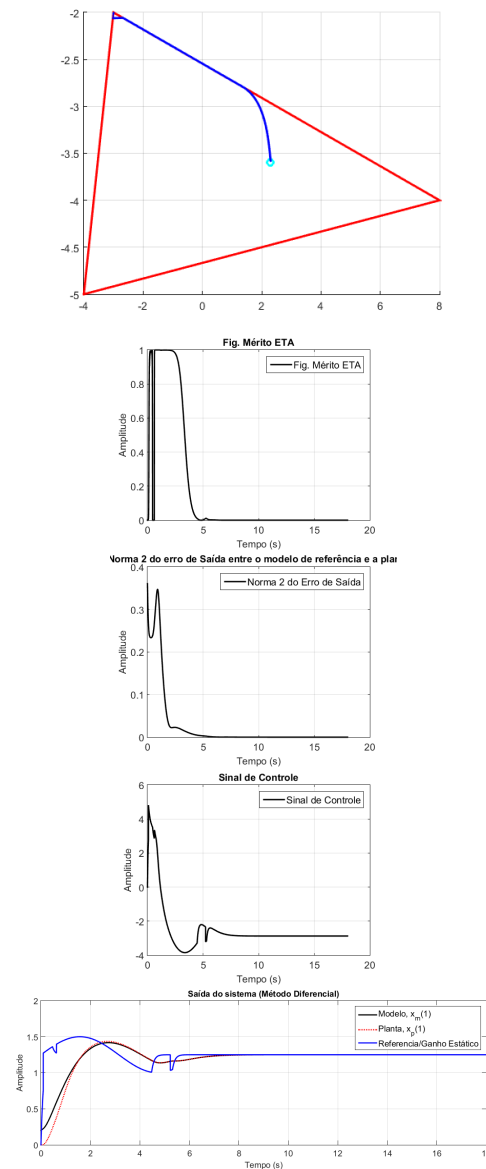


Figura 1: a)Trajetória dos parâmetros b)Comportamento da figura de Mérito η c)Norma do vetor de erros entre as variáveis de estado da planta e do modelo de referência d)Sinal de Controle e)Comportamento da Saída da Planta, Referência/Ganho Estático e Saída do Modelo de Referência

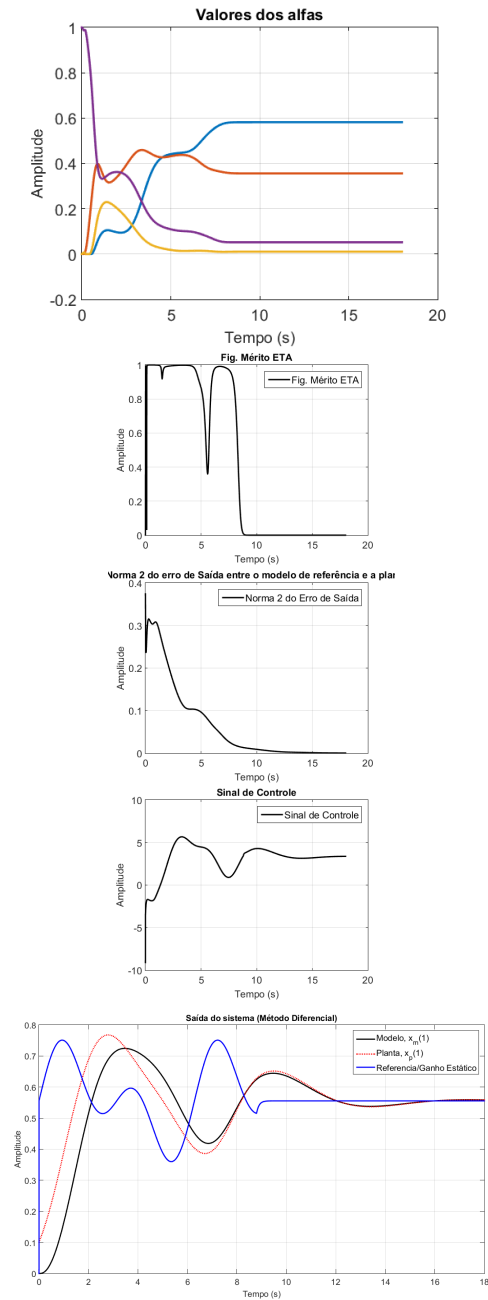


Figura 2: *a)* Trajetória dos parâmetros em termos do valor de cada α_i *b)* Comportamento da figura de Mérito η *c)* Norma do vetor de erros entre as variáveis de estado da planta e do modelo de referência *d)* Sinal de Controle *e)* Comportamento da Saída da Planta, Referência/Ganho Estático e Saída do Modelo de Referência

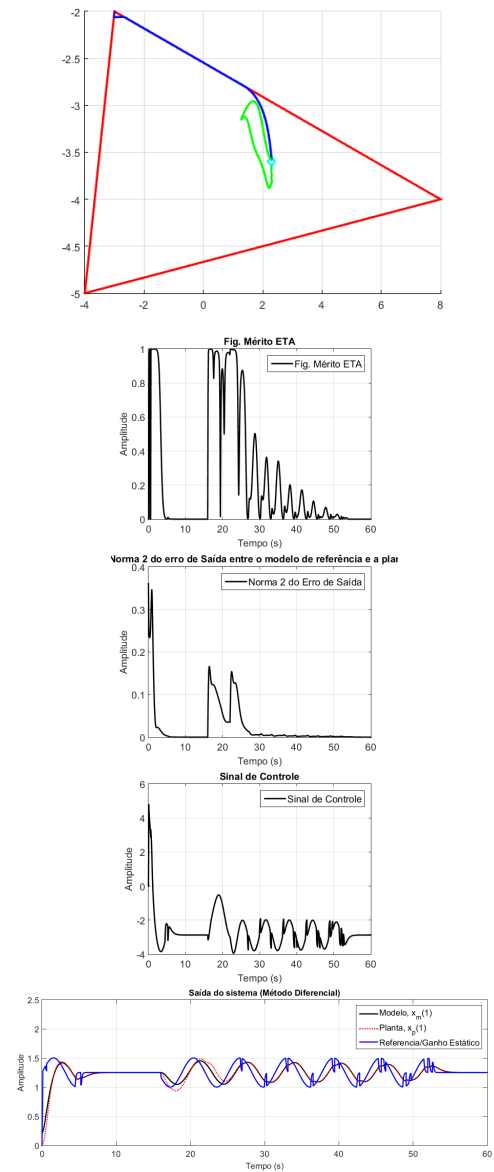


Figura 3: *a)* Trajetória dos parâmetros onde a linha em verde é o caminho feito após a introdução da perturbação *b)* Comportamento da figura de Mérito η *c)* Norma do vetor de erros entre as variáveis de estado da planta e do modelo de referência *d)* Sinal de Controle *e)* Comportamento da Saída da Planta, Referência/Ganho Estático e Saída do Modelo de Referência

6 Conclusões

A adaptação de segundo nível se mostra uma alternativa promissora em relação aos métodos convencionais de identificação e controle de plantas LTI com incertezas, dentro das limitações discutidas, pois demonstra boa rapidez de convergência dos parâmetros para seus valores corretos. As propriedades de robustez e estabilidade são iguais ou melhores que as da adaptação convencional, como mostrado em (Narendra et al., 2014). Também mostrou-se nas simulações que a necessidade da presença de um sinal PE de forma a garantir tal convergência pode ser avaliada por uma figura de mérito criada a partir das leis adaptativas escolhidas.

7 Agradecimentos

Estendemos nosso obrigado à Universidade Federal do Rio Grande do Norte e aos nossos colegas no Laboratório de Automação, Controle e Instrumentação que possibilitaram a existência deste trabalho. Somos gratos à CAPES e CNPq pelas bolsas de fomento que permitem a continuidade sustentável dos trabalhos de pesquisa. Finalmente gostaríamos de agradecer especificamente a Leonardo Rodrigues de Lima Teixeira pela ajuda prestada, intuições, conceitos e revisões.

Referências

- Goodwin, G. C. and Sin, K. S. (1984). *Adaptive Filtering Prediction and Control*, Prentice-Hall.
- Han, Z. and Narendra, K. S. (2012). New concepts in adaptive control using multiple models, *IEEE Transactions on Automatic Control* **57**(1): 78–89.
- Ioannou, P. A. and Sun, J. (1996). *Robust Adaptive Control*, Pearson Education, Inc.
- M. Krstic, I. K. and Kokotovic, P. (1995). *Nonlinear and Adaptive Control Design*, Wiley.
- Narendra, K. S. and Annaswamy, A. M. (1989). *Stable Adaptive Systems*, Prentice-Hall.
- Narendra, K. S., Wang, Y. and Chen, W. (2014). Stability, robustness, and performance issues in second level adaptation, *American Control Conference (ACC), 2014*, pp. 2377–2382.
- Tao, G. (2003). *Adaptive Control Design and Analysis*, Wiley.

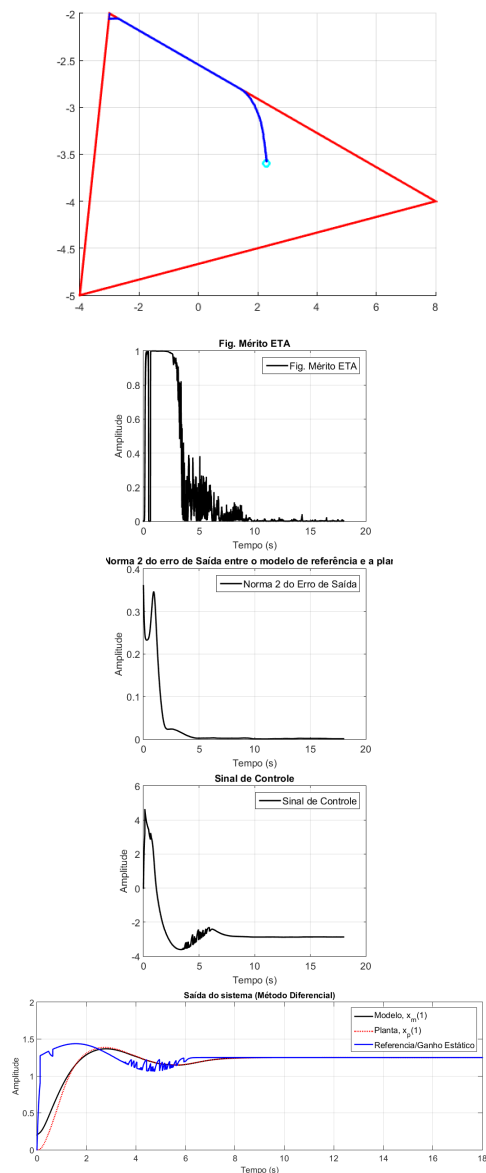


Figura 4: a)Trajetória dos parâmetros b)Comportamento da figura de Mérito η c)Norma do vetor de erros entre as variáveis de estado da planta e do modelo de referência d)Sinal de Controle e)Comportamento da Saída da Planta, Referência/Ganho Estático e Saída do Modelo de Referência