

SÍNTESE DE CONTROLADOR LQR-DERIVATIVO ROBUSTO VIA LMI: SINTONIA ATRAVÉS DE ALGORITMO GENÉTICO

MARCO ANTONIO LEITE BETETO*, EMERSON R. P. DA SILVA*, LUIZ F. S. BUZACHERO*, EDVALDO ASSUNÇÃO†, MARCELO C. M. TEIXEIRA‡, RODRIGO P. CAUN‡

*Lab de Controle e Otimização de Sistemas, Departamento Acadêmico de Elétrica, Univ Tecnol Federal do Paraná
Av. Alberto Carazzai, nº 1640, 86300-000 - Cornélio Procópio, PR, Brasil

†Lab de Pesquisa em Controle, Departamento de Engenharia Elétrica, Univ Estadual Paulista
Av. José Carlos Rossi, nº 1370, 15385-000 - Ilha Solteira, SP, Brasil

‡Coordenação de Engenharia Eletrônica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Rua Cristo Rei, 19, 85902-490, Toledo, Paraná, Brasil

marcobeteto@gmail.com, emersonr@utfpr.edu.br, luizf@utfpr.edu.br, edvaldo@dee.feis.unesp.br,
marcelo@dee.feis.unesp.br, rodrigocaun@utfpr.edu.br

Abstract— In this paper, the resolution of the problem of the linear quadratic regulator (LQR) approached via linear matrix inequalities (LMIs) for linear time-invariant systems is proposed, in which the weighting matrices the vector of state-derivative and the signal vector of control are obtained by a genetic algorithm (GA). The controllers designs are based in the state-derivative feedback. The factor to the choice of the state-derivative feedback is your easy implementation in certain mechanical systems, such as in vibrations control, for example. To illustrate the efficiency of the proposed theorems, simulations considering the model of an active suspension system manufactured by Quanser® are performed.

Keywords— Linear Quadratic Regulator, Linear Matrix Inequalities, State-Derivative Feedback, Robust Stability, Structural Failures.

Resumo— Neste trabalho é proposta a resolução do problema do regulador linear quadrático (LQR) por aproximação via desigualdades matriciais lineares (LMIs) para sistemas lineares e invariantes no tempo, no qual as matrizes de ponderação do vetor da derivada dos estados e do vetor do sinal de controle são obtidas por meio de um algoritmo genético (GA). Os projetos dos controladores são baseados na realimentação derivativa. Um fator para a escolha de realimentar a derivada do vetor de estados é sua fácil implementação em determinados sistemas mecânicos, como no controle de vibrações, por exemplo. Como forma de ilustrar a eficiência dos teoremas propostos, são realizadas simulações considerando o modelo de um sistema de suspensão ativa, fabricado pela Quanser®.

Palavras-chave— Regulador Linear Quadrático (LQR), Desigualdades Matriciais Lineares (LMI), Realimentação Derivativa, Estabilidade Robusta, Falhas Estruturais.

1 Introdução

Dentro da teoria de controle ótimo, o Regulador Linear Quadrático (do inglês, *Linear Quadratic Regulator* - LQR) é uma das técnicas que vem sendo amplamente abordada, como pode ser visto em diversos trabalhos, por exemplo (Choi et al., 1998), que faz uma aproximação LQR via posicionamento de autoestrutura; em (Kanieski et al., 2010), que utiliza o LQR no controle de um condicionador de energia; em (Das et al., 2013), o qual utiliza o LQR na sintonia de controladores PID ótimos; entre outros.

Esse tipo de controlador ótimo quadrático minimiza a variação da trajetória dos estados enquanto reduz o esforço de controle, mediante a definição de uma função objetivo, cuja otimização garante a estabilidade do sistema em malha fechada e satisfaz as restrições do projeto (Robandi et al., 2001; Zhai et al., 2014; Das et al., 2013). Quando utiliza-se controladores do tipo LQR é possível se beneficiar de três principais características: (a) é possível utilizar o modelo em espaço de estados; (b) a resolução da Equação de Riccati (do inglês, *Algebraic Riccati Equation* - ARE) gera o sinal de controle ótimo; (c) é possível ponderar os vetores de estado e controle por meio das matrizes Q e R , respectivamente (Caun et al., 2015; Das et al., 2013). A escolha adequada das matrizes de ponderação garante que a amplitude dos estados e do sinal de controle estejam dentro das especificações do projeto (Burns, 2001).

Uma das maneiras de solucionar a ARE é utilizar Desigualdades Matriciais Lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMI). Uma das vantagens do uso de LMIs é

a facilidade na abordagem de incertezas presentes no modelo do sistema, além de serem resolvidas eficientemente por meio de algumas ferramentas disponíveis na literatura de programação matemática, como, por exemplo, o software MatLab® (Gahinet et al., 1995). Possibilita também, de forma fácil, a adição de restrições de desempenho no projeto do controlador. Em (Ge et al., 2002) e (Caun et al., 2015) é apresentada a resolução da ARE via LMIs, ambos os trabalhos utilizam a realimentação do vetor de estados na formulação da função quadrática do problema LQR.

Neste trabalho será apresentada a formulação da função quadrática do problema LQR utilizando a realimentação derivativa, como pode ser visto em (Abdelaziz, 2010). No entanto, a solução da ARE será feita pela resolução de LMIs, além de utilizar uma técnica de busca e otimização, o algoritmo genético (do inglês, *Genetic Algorithm* - GA), para encontrar as matrizes de ponderação, Q e R . O controle baseado na realimentação derivativa é vantajoso uma vez que em determinados sistemas, geralmente em sistemas mecânicos, sinais da segunda derivada dos estados podem ser utilizados para realimentação. Tais sinais são obtidos por meio de sensores do tipo acelerômetros, que cada vez mais estão sendo utilizados na resolução de problemas de engenharia (Lewis and Syrmos, 1991; Kwak et al., 2002; Reithmeier and Leitmann, 2003). Por meio do sinal da aceleração é possível reconstruir o sinal da velocidade com boa precisão, contudo o mesmo não ocorre com o sinal de deslocamento (Abdelaziz and Valášek, 2004). Logo, os sinais utilizados para a realimentação são ace-

lerrações e velocidades, isto é, as derivadas da velocidade e deslocamento, que na maioria das vezes representam os estados do sistema.

Por meio da técnica abordada, neste trabalho são expostas condições suficientes fundamentadas na técnica de controle LQR-derivativo aproximado via LMI. Os resultados obtidos serão generalizados para sistemas incertos invariantes no tempo, sendo feitas simulações em um modelo de um sistema de suspensão ativa, fabricado pela Quanser®. Para os autores, os resultados presentes neste trabalho são inéditos.

O trabalho é organizado como se segue: Na Seção 2 é feita uma breve introdução da realimentação derivativa. Na Seção 3 é abordado sobre o controle LQR-derivativo. Na Seção 4 é proposta a síntese do controlador LQR-derivativo via LMI. Na Seção 5 o teorema proposto é uma extensão para sistemas lineares com incertezas do tipo politópicas. Na Seção 6 é apresentado um exemplo ilustrativo.

2 Realimentação Derivativa

Considere o sistema controlável, linear invariante no tempo descrito por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x(0), \quad (1)$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrizes que descrevem o comportamento do sistema, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada de controle.

Admitindo que a matriz A é não singular, ou seja, $\det(A) \neq 0$, para viabilizar a realimentação derivativa e a matriz $(I + BK)$ seja invertível ao ser realimentado pela entrada de controle,

$$u(t) = -K\dot{x}(t), \quad (2)$$

é necessário encontrar uma matriz $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que satisfaça essa condição em malha fechada.

Assim, o sistema em malha fechada se torna

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK\dot{x}(t) \Leftrightarrow \dot{x}(t) = (I + BK)^{-1}Ax(t), \quad (3)$$

sendo $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz identidade. Para maiores detalhes vide (Abdelaziz and Valášek, 2004).

3 Controlador LQR-Derivativo

Considere o sistema controlável, linear invariante no tempo descrito por (1).

O controle LQR-derivativo com desempenho dinâmico especificado pode ser alcançado por meio do projeto do controlador que minimize a função quadrática ou índice de desempenho do tipo:

$$J(\dot{x}(t), u(t)) = \min_u \int_0^\infty (\dot{x}(t)^T Q \dot{x}(t) + u(t)^T R u(t)) dt, \quad (4)$$

sendo Q uma matriz simétrica $n \times n$ definida positiva e R uma matriz simétrica $m \times m$ definida positiva. As matrizes Q e R são as matrizes de ponderação da derivada dos estados e do sinal de controle, respectivamente. Nota-se que essa formulação é semelhante ao LQR original, porém o índice é baseado na derivada dos estados, não nos estados.

A lei de controle que soluciona o problema do LQR é dada por,

$$u(t) = -K\dot{x}(t) = -R^{-1}B^T A^{-T} P \dot{x}(t), \quad (5)$$

de modo que P satisfaça a equação de Riccati (ARE)

$$PA^{-1} + A^{-T}P - PA^{-1}BR^{-1}B^T A^{-T}P + Q = 0. \quad (6)$$

Substituindo (2) em (4), o índice J pode ser minimizado através de (7),

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (\dot{x}(t)^T Q \dot{x}(t) + (K\dot{x}(t))^T R (K\dot{x}(t))) dt = \\ &= \int_0^\infty (\dot{x}(t)^T (Q + K^T R K) \dot{x}(t)) dt. \end{aligned} \quad (7)$$

O problema de projeto é encontrar um ganho de realimentação K de modo que J seja minimizado sujeito a restrição dinâmica (3). Logo, o problema LQR com realimentação derivativa para sistemas lineares é dado por:

Problema 1: Dada a dinâmica do sistema linear (1) e as matrizes simétricas $Q > 0$ e $R > 0$, deve-se encontrar a matriz de ganho de realimentação $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de entrada de controle (2) que minimize o valor da função custo (7) e estabilize o sistema em malha fechada (3) para algum estado inicial $x(0)$.

O principal objetivo é minimizar o índice (7) para a obtenção do ganho de realimentação K . Suponha que pode-se encontrar uma matriz simétrica definida positiva, P , que satisfaça (7), então

$$\dot{x}^T (Q + K^T R K) \dot{x} = -\frac{d}{dt} (x^T P x) = -\dot{x}^T P x - x^T P \dot{x}. \quad (8)$$

Desse modo, o índice pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (\dot{x}(t)^T (Q + K^T R K) \dot{x}(t)) dt = \\ &= -x(t)^T P x(t)|_0^\infty = -x(\infty)^T P x(\infty) + x(0)^T P x(0). \end{aligned} \quad (9)$$

Levando em consideração que o sistema em malha fechada é assintoticamente estável, isto é, todos os autovalores de (3) possuem parte real negativa, então $x(\infty) \rightarrow 0$. Assim, o índice converge para o valor ótimo quando

$$J = x(0)^T P x(0). \quad (10)$$

O índice J pode ser obtido por meio das condições iniciais $x(0)$ e pela matriz P . O LQR-derivativo pode ser visto com maiores detalhes em (Abdelaziz and Valášek, 2005).

4 Controlador LQR-Derivativo via LMI

Fundamentalmente o problema LQR consiste na resolução da ARE e, levando em conta sua natureza matricial, pode ser resolvido utilizando LMIs.

Para a demonstração do controlador LQR-derivativo em termos de LMI, o Lema 1 e a Propriedade 1 são utilizados.

Lema 1 (Complemento de Schur) Considere a LMI

$$\begin{bmatrix} M_1(x) & M_2(x) \\ M_2(x)^T & M_3(x) \end{bmatrix} > 0, \quad (11)$$

sendo $M_1(x) = M_1(x)^T$, $M_3(x) = M_3(x)^T$ e $M_2(x)$ dependem de modo afim de x , é equivalente a

$$M_3(x) > 0, M_1(x) - M_2(x)(M_3(x))^{-1}M_2(x)^T > 0. \quad (12)$$

ou ainda,

$$M_1(x) > 0, M_3(x) - M_2(x)(M_1(x))^{-1}M_2(x)^T > 0. \quad (13)$$

Prova: Vide (Boyd et al., 1994). $\square$

Propriedade 1 Uma matriz M é invertível se $M + M^T < 0$ para qualquer matriz M não simétrica ($M \neq M^T$) (Slotine and Li, 1991).

Considerando a realimentação derivativa, o próximo teorema propõe condições LMIs suficientes para a estabilização do sistema (3) através do controlador LQR-derivativo.

Teorema 1 (LQR-Derivativo via LMI) Dado $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $x(0) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, o sistema (3) é estável e com desempenho otimizado se existir uma matriz simétrica $X > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que satisfaçam as LMIs:

$$\min \mu$$

$$X = X^T > 0, Y$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} \mu & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} V & X & Y^T \\ X & -\mathcal{Q}^{-1} & 0 \\ Y & 0 & -\mathcal{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

sendo $V = A^{-1}X + XA^{-T} + A^{-1}BY + Y^TB^TA^{-T}$. O ganho de realimentação da derivada dos estados pode ser dado por

$$K = YX^{-1}, \quad (16)$$

com $X^{-1} = P$.

Prova: Aplicando o complemento de Schur na LMI (14), tem-se

$$x(0)^T X^{-1} x(0) \leq \mu. \quad (17)$$

Em muitas situações práticas, o objetivo (10) pode ser modificado por (17), onde μ é o limite superior especificado. Separando a LMI (15) em blocos matriciais:

$$\left[\begin{array}{cc|c} V & X & Y^T \\ X & -\mathcal{Q}^{-1} & 0 \\ \hline Y & 0 & -\mathcal{R}^{-1} \end{array} \right] < 0. \quad (18)$$

Aplicando o complemento de Schur, tem-se:

$$\begin{bmatrix} V & X \\ X & -\mathcal{Q}^{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y^T \\ 0 \end{bmatrix} (-\mathcal{R}^{-1})^{-1} \begin{bmatrix} Y & 0 \end{bmatrix} < 0, \quad (19)$$

que reorganizando,

$$\begin{bmatrix} V + Y^T \mathcal{R} Y & X \\ X & -\mathcal{Q}^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (20)$$

Aplicando, novamente, o complemento de Schur e substituindo a variável V , tem-se:

$$A^{-1}X + XA^{-T} + A^{-1}BY + Y^TB^TA^{-T} + Y^T \mathcal{R} Y + X \mathcal{Q} X < 0, \quad (21)$$

Considerando a mudança de variável $Y = KX$ e multiplicando a direita e a esquerda por $X^{-1} = P$, tem-se:

$$PA^{-1} + A^{-T}P + PA^{-1}BK + K^TB^TA^{-T}P + K^T \mathcal{R} K + \mathcal{Q} < 0, \quad (22)$$

organizando, temos

$$PA^{-1}(I + BK) + (I + BK)^T A^{-T}P + K^T \mathcal{R} K + \mathcal{Q} < 0. \quad (23)$$

Aplicando a Propriedade 1 em (23) conclui-se que as matrizes $(I + BK)$ e A são invertíveis.

Multiplicando a esquerda por $A^T(I + BK)^{-T}$, a direita por $(I + BK)^{-1}A$ e substituindo $A_{cl} = (I + BK)^{-1}A$, sendo A_{cl} a equação do sistema em malha fechada, tem-se

$$A_{cl}^T P + PA_{cl} + A_{cl}^T K^T \mathcal{R} K A_{cl} + A_{cl}^T \mathcal{Q} A_{cl} < 0. \quad (24)$$

Multiplicando a esquerda por $x^T(t)$ e a direita por $x(t)$, tem-se que:

$$\begin{aligned} x(t)^T A_{cl}^T P x(t) + x(t)^T P A_{cl} x(t) \\ + x(t)^T A_{cl}^T K^T \mathcal{R} K A_{cl} x(t) \\ + x(t)^T A_{cl}^T \mathcal{Q} A_{cl} x(t) < 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Substituindo $\dot{x}(t) = A_{cl}x(t) = (I + BK)^{-1}Ax(t)$, tem-se:

$$\dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) \leq -\dot{x}(t)^T (K^T \mathcal{R} K + \mathcal{Q}) \dot{x}(t). \quad (26)$$

Assim,

$$\dot{V}(x(t)) \leq 0. \quad (27)$$

A prova do Teorema 1 está concluída. $\square$

5 Controlador LQR-Derivativo via LMI para sistemas incertos invariantes no tempo

Considere o sistema linear incerto e invariante no tempo descrito como uma combinação convexa dos vértices do politopo:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i x(t) + \sum_{j=1}^s \beta_j B_j u(t), \quad (28)$$

e

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1 \\ \beta_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, s, \quad \sum_{j=1}^s \beta_j = 1 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

onde r e s são os vértices do politopo de A e B , respectivamente. Em (29), $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, r$ e $\beta_j, j = 1, 2, \dots, s$, são números reais constantes e desconhecidos. Desta forma, é proposto o Teorema 2 que apresenta condições robustas para a estabilização do sistema (28).

Teorema 2 (LQR-Derivativo Robusto via LMI)

Dado $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $x(0) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, o sistema incerto (28) é estável e com desempenho otimizado se existir uma matriz simétrica $X > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que satisfaçam as LMIs:

$$\min \mu$$

$$X = X^T > 0, Y$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} \mu & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (30)$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} V_{i,j} & X & Y^T \\ X & -Q^{-1} & 0 \\ Y & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, r, \\ j = 1, 2, \dots, s, \end{matrix} \right\}, \quad (31)$$

sendo $V_{i,j} = A_i^{-1}X + XA_i^{-T} + A_i^{-1}B_jY + Y^TB_j^TA_i^{-T}$. O ganho de realimentação da derivada dos estados pode ser dado por

$$K = YX^{-1}, \quad (32)$$

com $X^{-1} = P$.

Prova: De (29), considerando $V_{i,j}$ e multiplicando a esquerda por A_i e a direita por A_i^T , segue que

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i \sum_{j=1}^s \beta_j [XA_i^T + A_iX + B_jYA_i^T + A_iY^TB_j^T]$$

$$\begin{aligned} &= X \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i A_i^T \right) \left(\sum_{j=1}^s \beta_j \right) + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i A_i \right) \left(\sum_{j=1}^s \beta_j \right) X + \left(\sum_{j=1}^s \beta_j B_j \right) Y \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i A_i^T \right) + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i A_i \right) Y^T \left(\sum_{j=1}^s \beta_j B_j^T \right) \\ &= X \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i A_i^T \right) + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i A_i \right) X + \left(\sum_{j=1}^s \beta_j B_j \right) Y \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i A_i^T \right) + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i A_i \right) Y^T \left(\sum_{j=1}^s \beta_j B_j^T \right) < 0. \end{aligned}$$

Logo, a condição (15) do Teorema 1 se mantém para o sistema incerto (28), onde $A = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_r A_r$ e $B = \beta_1 B_1 + \dots + \beta_s B_s$. Agora, as condições (30) e (32) são equivalentes às condições (14) e (16). Finalmente, a partir do Teorema 1, a existência das matrizes $X = X^T$ e Y tal que (30) e (31) se mantêm é uma condição suficiente para a solução de (3). $\square$

6 Exemplo Ilustrativo

Considere um modelo de suspensão ativa de um automóvel, produzido pela Quanser[®], cujo esquemático está presente na Figura 1. O sistema é composto por duas massas, M_s e M_{us} , duas molas, k_s e k_{us} , dois amortecedores, b_s e b_{us} , e um atuador (motor), controlado pela força F_c (da Silva et al., 2013).

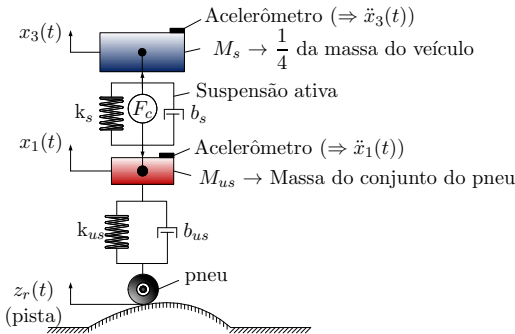


Figura 1: Modelo suspensão ativa de um veículo.

A dinâmica do sistema é dada pelas equações descritas em (33):

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{M_s} & -\frac{b_s}{M_s} & 0 & \frac{b_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_{us}} & \frac{b_s}{M_{us}} & -\frac{k_{us}}{M_{us}} & -\frac{(b_s+b_{us})}{M_{us}} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{M_{us}} \end{bmatrix} u(t). \quad (33)$$

com

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_3(t) - x_1(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ x_1(t) - z_r(0) \\ \dot{x}_1(t) \end{bmatrix} \text{ e } u(t) = [F_c].$$

Tabela 1: Parâmetros suspensão ativa.

Parâmetros	Símbolo	Valor
Massa de $\frac{1}{4}$ do corpo total do veículo (kg)	M_s	2,45
Massa do conjunto do pneu (kg)	M_{us}	1
Constante de rigidez da mola (N/m)	k_s	900
Constante de rigidez da mola (N/m)	k_{us}	2500
Coefficiente de amortecimento (Ns/m)	b_s	7,5
Coefficiente de amortecimento (Ns/m)	b_{us}	5

Considerando o modelo físico da suspensão ativa, é visto que o sistema possui duas cargas iguais, as quais compõem a massa M_s . Cada uma dessas cargas possui um peso de 0,4975 kg, sendo que a soma das cargas com a estrutura resulta no valor mostrado na Tabela 1, 2,45 kg. Dessa forma, a massa M_s pode ser considerada uma incerteza do sistema, já que pode assumir valores entre 1,455 kg (massa da estrutura) e 2,45 kg (massa da estrutura mais as duas cargas). Isso significa que a massa M_s pode pertencer ao intervalo $1,455 \leq M_s \leq 2,45$ (kg) (da Silva et al., 2013).

Neste trabalho, além de considerar a massa M_s incerta, consideramos a ocorrência de uma eventual falha no amortecedor b_{us} . Caso ocorra a falha, aplicará em

$b_{us} = 0$, neste caso b_{us} é incerto e irá pertencer ao intervalo $0 \leq b_{us} \leq 5$ (Ns/m).

Para a resolução das LMIs foi utilizado o software MatLab®, juntamente com o solver "SeDuMi" (Sturm, 1999). As matrizes de ponderação, $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$, foram obtidas por meio de um algoritmo genético (GA), cuja função objetivo é minimizar o critério de desempenho *ITAE* (do inglês, *Integral of Time-weight Absolute Error*), o qual representa a integral do erro absoluto entre a entrada e a saída, $e(t)$, vezes o tempo, t :

$$ITAE = \int_0^{T_s} t|e(t)|dt. \quad (34)$$

A Figura (2) apresenta um fluxograma explicando o funcionamento do GA. Informações adicionais podem ser vistas em (Konak et al., 2006).

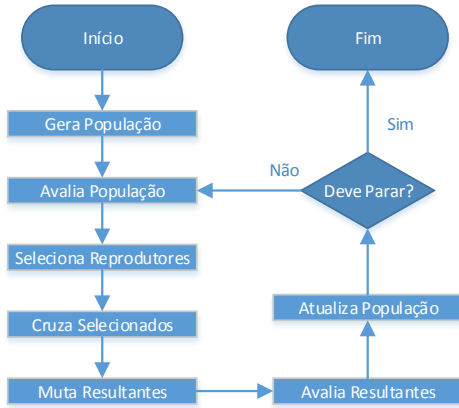


Figura 2: Fluxograma de funcionamento de um algoritmo genético.

Após a execução do GA, as matrizes de ponderação que obtiveram o melhor critério de desempenho foram:

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 814,4588 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8336 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 328,6466 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3996 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$$\mathcal{R} = [0,2105]. \quad (36)$$

Por meio das matrizes de ponderação, $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$, e das LMIs (30) e (31), projetou-se o seguinte controlador Robusto:

$$K_R = [161,6209 \quad 6,8789 \quad -101,5929 \quad -0,5946]. \quad (37)$$

Para a realização da simulação foi utilizada a função *ODE45* do software MatLab®, considerando a condição inicial $x(0) = [0,02 \quad 0 \quad 0,02 \quad 0]^T$, que é a mesma condição inicial usada na LMI (30). Nas Figuras 3, 4 e 5, $x_1(t)$ é o deslocamento da massa M_{us} e $x_3(t)$ o deslocamento da massa M_s .

Como é possível observar na Figura 3, e mesmo o sistema sendo estável por natureza, o tempo de acomodação é elevado. Ainda, possui oscilações abruptas, o que pode causar desconforto aos passageiros e motorista no interior do veículo, bem como gerar danos ao sistema de suspensão. Tais oscilações podem ser minimizadas através da técnica proposta.

A Figura 4 mostra o comportamento do sistema considerando apenas a massa da estrutura (1,455 kg), juntamente com a ocorrência de falha no amortecedor b_{us} e sem a ocorrência de falha.

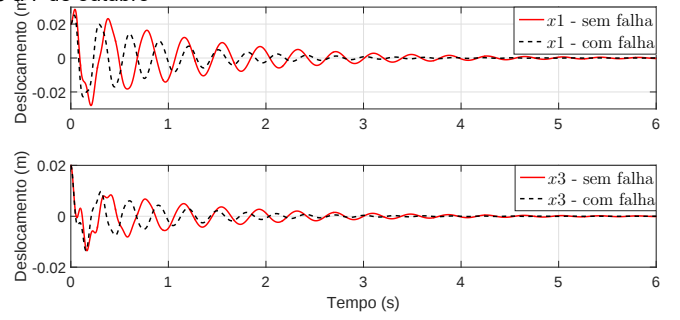


Figura 3: Comportamento do sistema na ausência de controle.

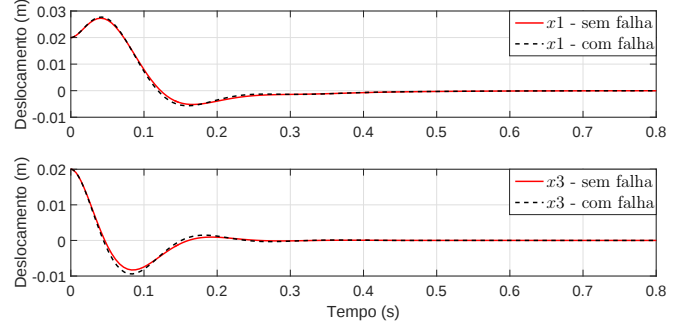


Figura 4: Comportamento do sistema considerando apenas a massa da estrutura (1,455 kg).

A Figura 5 mostra o comportamento do sistema considerando a massa da estrutura (1,445 kg) mais a massa das duas cargas (0,995 kg), juntamente com a ocorrência de falha no amortecedor b_{us} e sem a ocorrência de falha.

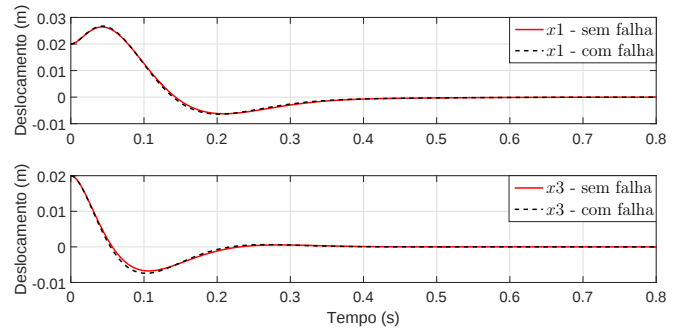


Figura 5: Comportamento do sistema considerando a massa da estrutura (1,455 kg) mais a massa das duas cargas (0,995 kg).

Por meio da análise de ambas as Figuras, 4 e 5, observa-se que o controlador LQR-derivativo robusto, K_R , minimizou as oscilações e levou o sistema ao setpoint (origem) em um menor tempo, comparado com a Figura 3.

A Figura 6 exibe o sinal de controle para a situação na qual se considera apenas a massa da estrutura e o sinal de controle para a situação na qual se considera a massa da estrutura e a massa das duas cargas. Analisando ambos os gráficos, observa-se que mesmo com a matriz de ponderação $\mathcal{R}$ não sendo tão elevada, o sinal de controle apresentou baixa amplitude para ambos os casos, com e sem falha, diminuindo o tempo de acomodação do sistema. Essa é uma importante característica da realimentação derivativa.

7 Conclusões

Neste trabalho são propostas novas condições para a síntese de controladores ótimos de sistemas lineares incer-

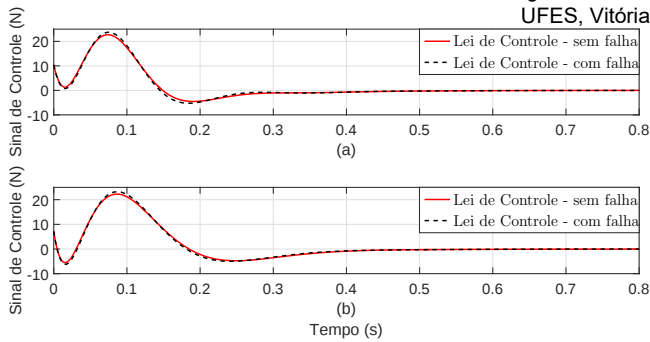


Figura 6: (a) Sinal de controle considerando apenas a massa da estrutura (1,455 kg); (b) Sinal de controle considerando a massa da estrutura (1,455 kg) mais a massa das duas cargas (0,995 kg).

tos e sujeitos a falhas estruturais. No projeto foi utilizada a realimentação derivativa, tal técnica se mostra eficiente em sistemas que dispõem de sensores do tipo acelerômetros. Ainda, técnicas de controle fundamentadas em LMIs possuem a vantagem de permitir a inclusão de incertezas do tipo politópicas no sistema, bem como o projeto de controladores se torna relativamente simples. O projeto por meio do LQR-derivativo se mostrou uma importante ferramenta no controle de sistemas mecânicos, uma vez que é possível ponderar o vetor da derivada dos estados e o vetor do sinal de controle, sendo estes escolhidos por meio de um GA baseado no índice de desempenho *ITAE*, de acordo com as especificações do projeto.

Agradecimentos

Os autores agradecem a UTFPR-CP pelo apoio a este trabalho e ao CNPq e a FAPESP (Proc. n. 2011/17610-0) pelo apoio financeiro.

Referências

- Abdelaziz, T. H. S. (2010). *Optimal Control Using Derivative Feedback for Linear Systems*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering March 1, 224:185-202.
- Abdelaziz, T. H. S. and Valášek, M. (2004). *Pole placement for SISO linear systems by state-derivative feedback*, IEE Proceedings-Control Theory Applications. 151(4):377-385.
- Abdelaziz, T. H. S. and Valášek, M. (2005). *State derivative Feedback by LQR for Linear Time-Invariant Systems*, International Federation of Automatic Control. IFAC.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, Studies in Applied Mathematics, 15, 2 edn, SIAM Studies in Applied Mathematics.
- Burns, R. S. (2001). *Advanced Control Engineering*, 1st ed. London, UK: Butterworth.
- Caun, R. P., Assunção, E., Lins, L. I. H. and Teixeira, M. C. M. (2015). *Controlador LQR via aproximação LMI com restrição de taxa de decaimento aplicado ao helicóptero 3-DOF de bancada*, XII SBAI - XII Simpósio Brasileiro de Automática Inteligente, pp 49 a 54.
- Choi, J. W., See, Y. B., Yoo, W. S. and Lee, M. H. (1998). *LQR approach using eigenstructure assignment with an active suspension control application*, Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Control Applications, Trieste, pp. 1235-1239 vol.2.
- da Silva, E. R. P., Fazzolari, H. A., de Oliveira, P. C., Assunção, E., Teixeira, M. C. M. and Lordelo, A. D. S. (2013). *Implementação prática da D-estabilidade robusta via realimentação derivativa em um sistema de suspensão ativa*, XI SBAI - XI Simpósio Brasileiro de Automática Inteligente.
- Das, S., Pan, I., Halder, K., Das, S. and Gupta, A. (2013). *LQR Based Improved Discrete PID Controller Design Via Optimum Selection of Weighting Matrices Using Fractional Order Integral Performance Index*, Applied Mathematical Modelling, Vol. 37, pp. 4253-4268.
- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. and Chilali, M. (1995). *LMI control toolbox - For use with MATLAB*, The Math Works Inc.
- Ge, M., Chiu, M.-S. and Wang, Q.-G. (2002). *Robust PID controller design via LMI approach*, Journal of Process Control, Vol. 12, pp. 3-13.
- Kanieski, J. M., ndling, H. A. G. and Cardoso, R. (2010). *A New LQR Modeling Approach for Power Quality Conditioning Devices*, IECON 2010-36th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society, p. 2001-2006.
- Konak, A., Coit, D. W. and Smith, A. E. (2006). *Multi-objective optimization using genetic algorithms: A tutorial*, Reliability Engineering & System Safety, Elsevier, Vol. 91, (9):992-1007.
- Kwak, S. K., Washington, G. and Yedavalli, R. K. (2002). *Acceleration Feedback-based Active and Passive Vibration Control of Landing Gear Components*, Journal of Aerospace Engineering, New York, v. 15, n.1, p. 1-9, Jan.
- Lewis, F. L. and Syrmos, V. L. (1991). *A Geometric Theory for Derivative Feedback*, IEEE Transactions on Automatic Control, New York, v. 36, n. 9, p. 1111-1116.
- Reithmeier, E. and Leitmann, G. (2003). *Robust Vibration Control of Dynamical Systems Based on the Derivative of the State*, Archive of Applied Mechanics, Heidelberg, v. 72, n. 11-12, p. 856-864, June.
- Robandi, I., Nishimorib, K., Nishimurab, R. and Ishiharab, N. (2001). *Optimal Feedback Control Design Using Genetic Algorithm in Multimachine Power System*, Electrical Power and Energy Systems, Vol. 23, pp. 263-271.
- Slotine, J.-J. E. and Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall. 460 p.
- Sturm, J. (1999). *Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones*, Optimization Methods and Software 11-12: 625-653.
- Zhai, J., Shenb, B., Feng, E. and Yin, H. (2014). *Optimal Control of Switched Systems and its Parallel Optimization Algorithm*, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 261, pp. 287-298.