

ROBUSTEZ DO CONTROLADOR EM MODO DUAL ADAPTATIVO ROBUSTO INDIRETO NA PRESENÇA DE PERTURBAÇÃO NA ENTRADA DA PLANTA

LEONARDO RODRIGUES DE LIMA TEIXEIRA*, JOSENALDE BARBOSA DE OLIVEIRA*, ALDAYR DANTAS
DE ARAÚJO†

*Escola Agrícola de Jundiaí, Universidade Federal do Rio Grande do Norte (EAJ/UFRN)
RN 160, Km 03, s/n, Distrito de Jundiaí, 59280-000
Macaíba, RN, Brasil

†Depto. de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte (DEE/UFRN)
Campus Universitário, s/n, Lagoa Nova, 59078-970
Natal, RN, Brasil

Emails: leonardo@eaj.ufrn.br, josenalde@eaj.ufrn.br, aldayr@dca.ufrn.br

Abstract— This paper presents the Lyapunov's stability analysis for the Indirect Dual Mode Adaptive Robust Controller (IDMARC), when bounded input disturbances are considered. It is proven that the state error vector $e(t)$ and the parametric error vector $\theta_p(t)$ converge exponentially to a feasible residual set. Simulations results for an unstable plant suggest non oscillatory and fast transient response, and a smooth control signal in steady-state, provided by its hybrid nature.

Keywords— Stability Analysis, Robustness, Input Disturbance.

Resumo— Este trabalho apresenta a análise de estabilidade de Lyapunov para o Controlador em Modo Dual Adaptativo Robusto Indireto (IDMARC), considerando perturbações limitadas na entrada da planta. É provado que o vetor de erro do estado $e(t)$ e o vetor de erros paramétricos $\tilde{\theta}_p(t)$ convergem exponencialmente para um conjunto residual. Resultados de simulações para uma planta instável apresentam uma resposta transitória rápida e sem oscilações, além de um sinal de controle suave em regime permanente, devido a sua natureza híbrida.

Palavras-chave— Análise de Estabilidade, Robustez, Perturbação na Entrada da Planta.

1 Introdução

O IDMARC surgiu a partir da ideia de combinar as boas propriedades de transitório e robustez dos sistemas a estrutura variável, com um sinal de controle suave em regime permanente dos controladores adaptativos convencionais.

Trata-se da versão indireta do Controlador em Modo Dual Adaptativo Robusto (DMARC) (Cunha et al., 2007) (Cunha et al., 2005), o qual atua entre o Controlador Adaptativo por Modelo de Referência (MRAC) (Narendra and Valavani, 1978) e o Controlador Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável (VS-MRAC) (Hsu, 1990). Dessa forma, ele mantém as principais características do DMARC, porque atua entre o MRAC indireto (IMRAC) (Ioannou and Sun, 1996) e o VS-MRAC indireto (IVS-MRAC) (Oliveira and Araujo, 2004) e, adicionalmente, permite uma fase de projeto mais intuitiva, devido a abordagem indireta, pois o projeto se baseia nos parâmetros físicos da planta, os quais geralmente são conhecidos com incertezas.

Os coeficientes dos polinômios da planta e o ganho de alta frequência são representados pelo vetor θ_p^* . A estimativa $\theta_p(t)$ de θ_p^* , gerada por uma lei adaptativa, é usada para calcular o vetor de parâmetros do controlador $\theta(t)$ em cada instante t , usando explicitamente as equações de *matching* no algoritmo (Ioannou and Sun, 1996).

Apesar do aumento na carga computacional,

isso não é um problema, pois atualmente existem dispositivos eletrônicos cuja principal característica é a possibilidade de operar em altas frequências e, assim, oferecer um rápido processamento, tais como: *Digital Signal Processor* (DSP) e *Field Programmable Gate Array* (FPGA).

Resultados de simulação e uma primeira análise de estabilidade, sem considerar a presença de perturbação, do IDMARC foram apresentadas em (Teixeira et al., 2015), no qual os autores garantiram que todos os sinais do sistema em malha fechada são uniformemente limitados, e que $\|e(t)\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Neste trabalho, será estudado o desempenho do IDMARC na presença de perturbações limitadas na entrada da planta, apresentando análise de estabilidade e simulações.

2 Formulação do Problema

Considere uma planta linear, SISO (*Single Input-Single Output*), invariante no tempo, e com parâmetros desconhecidos ou conhecidos com incertezas, com função de transferência

$$\begin{aligned} W(s) &= k_p \frac{N_p(s)}{D_p(s)}, \\ N_p(s) &= s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i s^{n-1-i}, \\ D_p(s) &= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i+1} s^{n-1-i}, \end{aligned} \quad (1)$$

e entrada u e saída y .

O modelo de referência tem entrada r , saída y_m , e função de transferência da forma

$$\begin{aligned} M(s) &= k_m \frac{N_m(s)}{D_m(s)}, \\ N_m(s) &= s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{m,i} s^{n-1-i}, \\ D_m(s) &= s^n + \alpha_{m,1} s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{m,i+1} s^{n-1-i}. \end{aligned} \quad (2)$$

A proposta é determinar uma lei de controle u tal que o erro de saída

$$e_0 = y - y_m \quad (3)$$

tenda a zero para condições iniciais arbitrárias, sinais de referência $r(t)$ uniformemente limitados e contínuos por partes arbitrários, e perturbação na entrada da planta limitada.

As seguintes hipóteses são feitas:

- A planta é observável e controlável, com $\text{grau}[D_p(s)] = n$ e $\text{grau}[N_p(s)] = n-1$, ou seja, grau relativo $n^* = 1$;
- $\text{sgn}(k_p) = \text{sgn}(k_m)$, positivo por simplicidade;
- $N_p(s)$ é Hurwitz - $W(s)$ é de fase mínima;
- $M(s)$ tem o mesmo grau relativo da planta e é escolhido ser Estritamente Real Positivo (ERP);
- Somente a entrada e a saída da planta são usadas para gerar o sinal de controle u ;
- $d(t)$ é uniformemente contínuo por partes, e $\bar{d}$ é um limitante superior para $|d(t)|$, sendo $\sup|d(t)| \leq \bar{d}$.

Considere os seguintes filtros de entrada e saída:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \Lambda v_1 + g u, \\ \dot{v}_2 &= \Lambda v_2 + g y, \end{aligned} \quad (4)$$

onde $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$, $g = [0 \dots 0 \ \gamma]^T \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\gamma > 0$, e $\Lambda \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ é escolhido tal que $N_m(s) = \det(sI - \Lambda)$.

Definindo $\theta^T(t) = [\theta_{v1}^T(t) \ \theta_n(t) \ \theta_{v2}^T(t) \ \theta_{2n}(t)]$ como o vetor dos parâmetros adaptativos do controlador, e $\omega^T = [v_1^T \ y \ v_2^T \ r]$ como o vetor regressor, a lei de controle é definida como:

$$u = \theta^T(t) \omega(t). \quad (5)$$

Se a planta $W(s)$ for conhecida, então é possível determinar o valor do vetor constante θ^* tal que a função de transferência da planta em malha fechada seja $M(s)$. Quando esse vetor é obtido, a

condição de *matching* é alcançada com $u = \theta^{*T} \omega$. Quando $W(s)$ é desconhecida, $\theta(t)$ é adaptado até que $e_0(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$. Sob uma condição de riqueza de sinal, temos $\theta(t) \rightarrow \theta^*$.

Considere A, b, h^T como uma realização mínima da planta e $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado. Definindo $X^T = [x^T \ v_1^T \ v_2^T] \in \mathbb{R}^{3n-2}$, a planta, os filtros e a perturbação na entrada da planta podem ser representados no espaço de estado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A_0 X + b_0 u + b_d d, \\ y &= h_c^T x, \end{aligned} \quad (6)$$

onde

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ g h^T & 0 & \Lambda \end{bmatrix}, \quad b_0 = \begin{bmatrix} b \\ g \\ 0 \end{bmatrix}, \\ b_d &= \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_c^T = [h^T \ 0 \ 0]. \end{aligned}$$

Somando $b_0 \theta^{*T} \omega - b_0 \theta^{*T} \omega$ no lado direito de $\dot{X}$, temos:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A_c X + b_c r + \frac{b_c}{\theta_{2n}^*} \tilde{\theta}^T \omega + b_d d, \\ y &= h_c^T X. \end{aligned} \quad (7)$$

onde $A_c = A_0 + b_0 [\theta_n^* h^T \ \theta_{v1}^{*T} \ \theta_{v2}^{*T}]$, $b_c = b_0 \theta_{2n}^*$, e $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$.

Representando o modelo de referência por variáveis de estado

$$\begin{aligned} \dot{X}_m &= A_c X_m + b_c r, \\ y_m &= h_c^T X_m, \end{aligned} \quad (8)$$

e definindo o vetor erro $e \triangleq X - X_m$, é possível encontrar a equação do erro:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A_c e + \frac{b_c}{\theta_{2n}^*} \tilde{\theta}^T \omega + b_d d, \\ e_0 &= h_c^T e. \end{aligned} \quad (9)$$

No caso indireto, os parâmetros da planta são estimados a cada instante t , representados por $\hat{\theta}_p^T(t) = [\hat{k}_p(t) \ \hat{\beta}^T(t) \ \hat{\alpha}_1(t) \ \hat{\alpha}^T(t)]$, onde:

- $\hat{\beta}(t) \in \mathbb{R}^{(n-1)}$ é um vetor composto pelos elementos β_i , $i = n-1, \dots, 1$ de $N_p(s)$ no instante t ;
- $\hat{\alpha}_1(t) \in \mathbb{R}$ é o elemento α_1 de $D_p(s)$ no instante t ;
- $\hat{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^{(n-1)}$ é um vetor composto pelos elementos α_{i+1} , $i = n-1, \dots, 1$ de $D_p(s)$ no instante t ;
- $\beta_m \in \mathbb{R}^{(n-1)}$ é um vetor composto pelos elementos $\beta_{m,i}$, $i = n-1, \dots, 1$ de $N_m(s)$;
- $\alpha_{m1} \in \mathbb{R}$ é o elemento α_{m1} de $D_m(s)$;

- $\alpha_m \in \mathbb{R}^{(n-1)}$ é um vetor composto pelos elementos $\alpha_{m,i+1}$, $i = n-1, \dots, 1$ de $D_m(s)$.

A partir de $\hat{\theta}_p(t)$, os parâmetros do controlador podem ser calculados da seguinte forma (Ioannou and Sun, 1996):

$$\begin{aligned}\theta_{v1}(t) &= \frac{\beta_m - \hat{\beta}(t)}{\gamma}, \\ \theta_n(t) &= \frac{\hat{\alpha}_1(t) - \alpha_{m1}}{\hat{k}_p(t)}, \\ \theta_{v2}(t) &= \frac{\hat{\alpha}(t) - \alpha_m + (\alpha_{m1} - \hat{\alpha}_1(t))\beta_m}{\hat{k}_p(t)\gamma}, \\ \theta_{2n}(t) &= \frac{k_m}{\hat{k}_p(t)},\end{aligned}\quad (10)$$

com $|\hat{k}_p(t)| \neq 0, \forall t \geq 0$.

Os erros paramétricos são definidos como

$$\begin{aligned}\tilde{k}_p &= \hat{k}_p - k_p^*, \tilde{\beta} = \hat{\beta} - \beta^*, \\ \tilde{\alpha}_1 &= \hat{\alpha}_1 - \alpha_1^*, \tilde{\alpha} = \hat{\alpha} - \alpha^*.\end{aligned}\quad (11)$$

A partir de (Oliveira and Araujo, 2008), foi possível obter a nova equação do erro considerando perturbação na entrada da planta:

$$\dot{e} = A_c e + \frac{b_c}{k_m} [\tilde{k}_p \zeta_p + k_p^* \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha] + b_d d, \quad (12)$$

onde

$$\begin{aligned}\zeta_p &= \frac{\beta_m^T v_1}{\gamma} - u - \frac{\hat{\beta}^T v_1}{\gamma}, \\ \zeta_{\beta i} &= \frac{-v_{1,i}}{\gamma}, i = 1, \dots, n-1, \\ \zeta_1 &= y - \frac{\beta_m^T v_2}{\gamma}, \\ \zeta_{\alpha i} &= \frac{v_{2,i-1}}{\gamma}, i = 2, \dots, n,\end{aligned}\quad (13)$$

com $\gamma > 0$.

3 Controlador em Modo Dual Adaptativo Robusto Indireto

Como citado anteriormente, o IDMARC atua entre o IMRAC e o IVS-MRAC, obtendo um transitório rápido e sem oscilações, típico do IVS-MRAC, com um sinal de controle suave em regime permanente, típico do IMRAC. A transição entre essas estratégias ocorre em tempo real, a depender do erro de saída em cada instante.

Essa transição é possível devido ao parâmetro μ na lei adaptativa. Ele é representado por uma função gaussiana, expressa por (14) e pela Figura 1. É interessante observar que quando o erro de saída e_o cresce, $\mu \rightarrow 0$, e o IDMARC tende ao IVS-MRAC. Entretanto, quando o erro de saída decresce, $\mu \rightarrow 1$, e o IDMARC tende ao IMRAC.

L é um parâmetro definido no projeto, e é o responsável por definir a largura de atuação do IVS-MRAC no sistema.

$$\mu = e^{-\frac{e_o^2}{L}} \quad (14)$$

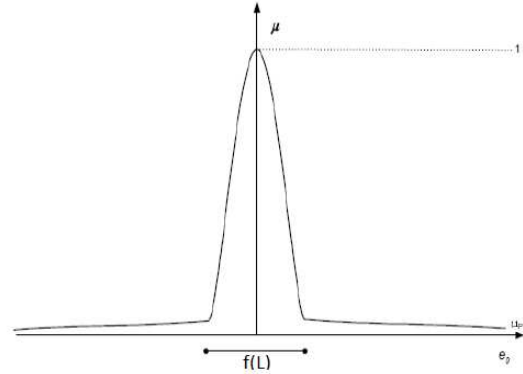


Figura 1: Representação gráfica de μ

As leis adaptativas do IDMARC são baseadas nas do DMARC (Cunha et al., 2007), IMRAC (Ioannou and Sun, 1996) e IVS-MRAC (Oliveira and Araujo, 2008), e são listadas a seguir.

$$\dot{\hat{\beta}} = -\frac{\sigma_\beta}{\mu} \hat{\beta} - \frac{\sigma_\beta}{\mu} (1 - \mu) [\bar{\beta} \text{sgn}(e_o \zeta_\beta)] + \Gamma_\beta e_o v_1,$$

$$\dot{\hat{\alpha}}_1 = -\frac{\sigma_{\alpha_1}}{\mu} \hat{\alpha}_1 - \frac{\sigma_{\alpha_1}}{\mu} (1 - \mu) [\bar{\alpha}_1 \text{sgn}(e_o \zeta_1)] - \gamma_1 e_o \zeta_1,$$

$$\dot{\hat{\alpha}} = -\frac{\sigma_\alpha}{\mu} \hat{\alpha} - \frac{\sigma_\alpha}{\mu} (1 - \mu) [\bar{\alpha} \text{sgn}(e_o \zeta_\alpha)] - \Gamma_\alpha e_o v_2,$$

se $(\hat{k}_p > k_0)$ ou $(\hat{k}_p = k_0 \text{ e } e_o \zeta_p \leq 0)$

$$\dot{\hat{k}}_p = -\frac{\sigma_{k_p}}{\mu} \hat{k}_p +$$

$$\frac{\sigma_{k_p}}{\mu} (1 - \mu) [k_{p,nom} - \bar{k}_p \text{sgn}(e_o \zeta_p)] - \gamma_p e_o \zeta_p$$

em caso contrário

$$\dot{\hat{k}}_p = 0, \quad (15)$$

onde k_0 é um limitante inferior para $\hat{k}_p$ (evita erro numérico), $\Gamma_\alpha = \text{diag}(\gamma_{\alpha i}), \gamma_{\alpha i} > 0, i = 2, \dots, n$, $\Gamma_\beta = \text{diag}(\gamma_{\beta i}), \gamma_{\beta i} > 0, i = 1, \dots, n-1$, $\gamma_1 > 0, \gamma_p > 0$, μ é definido como em (14) e cada parâmetro da planta possui um σ , representados de forma generalizada em (16).

$$\sigma_{\theta_{pi}} = \begin{cases} 0, & \text{se } |\hat{\theta}_{pi}| < M_{\theta_{pi}} \text{ e } \mu > \mu_p \\ \sigma_c, & \sigma_c > 0, \text{ em caso contrário} \end{cases}, \quad (16)$$

com $i = 1, \dots, 2n$ e $M_{\theta_{pi}} = \bar{\theta}_{pi}$.

O σ_c foi escolhido igual para todos os parâmetros, assim como μ_p , de tal forma que a relação

$\frac{\sigma_c}{\mu_p}$ seja suficientemente alta para o caso em que $\mu = \mu_p$.

3.1 Análise de Estabilidade

Teorema 1 Considere o sistema (7), erro de saída (12) e leis adaptativas (15). Se as hipóteses (a-f) forem satisfeitas, então:

- (i) Existe um tempo T finito tal que $\|e\| < \frac{c_d \bar{d}}{\lambda_{\min}(Q)}$.
- (ii) $e(t)$ e $\tilde{\theta}_p(t)$ convergem exponencialmente para o conjunto residual definido como:

$$D_R = \left\{ (e, \tilde{\theta}_p) | V(e, \tilde{\theta}_p) \leq \frac{1}{\rho} \left(\frac{c_d^2 \bar{d}^2}{\lambda_{\min}(Q)} + \frac{2\sigma_{kp}}{\mu k_m \gamma_p} M_{k_p}^2 + \frac{2k_p^*}{\mu k_m \gamma} \|M_\beta\|^2 + \frac{2\sigma_{\alpha 1}}{\mu k_m \gamma_1} M_{\alpha 1}^2 + \frac{2}{\mu k_m \gamma} \|M_\alpha\|^2 \right) \right\} \quad (17)$$

Prova: Considere como função candidata de Lya- punov a seguinte função definida positiva:

$$V(e, \tilde{\theta}_p) = \frac{e^T P e}{2} + \frac{1}{k_m} \left(\frac{\tilde{k}_p^2}{2\gamma_p} + \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \tilde{\beta} k_p^*}{2\gamma} + \frac{\tilde{\alpha}_1^2}{2\gamma_1} + \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \tilde{\alpha}}{2\gamma} \right), \quad (18)$$

onde $\tilde{\theta}_p^T = [\tilde{k}_p \quad \tilde{\beta}^T \quad \tilde{\alpha}_1 \quad \tilde{\alpha}^T]$, $\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha^T > 0$, $\Gamma_\beta = \Gamma_\beta^T > 0$, $\gamma > 0$, $\gamma_p > 0$ e $\gamma_1 > 0$.

Calculando a derivada de (18), além de considerar o Lema de Kalman-Yakubovitch ($A_c^T P + P A_c = -2Q$, $P b_c = h_c$, $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$) e sabendo que $\dot{\tilde{\theta}}_p = \dot{\tilde{\theta}}_p$, a partir de (11), temos:

$$\dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) = -e^T Q e + e^T P b_d d + \frac{e_o}{k_m} \left[\dot{\tilde{k}}_p \zeta_p + k_p^* \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \dot{\zeta}_1 + \tilde{\alpha}^T \dot{\zeta}_\alpha \right] + \frac{1}{k_m} \left(\frac{\tilde{k}_p \dot{\tilde{k}}_p}{\gamma_p} + \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \dot{\tilde{\beta}} k_p^*}{\gamma} + \frac{\tilde{\alpha}_1 \dot{\alpha}_1}{\gamma_1} + \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \dot{\tilde{\alpha}}}{\gamma} \right). \quad (19)$$

Substituindo $\dot{\tilde{\theta}}_p$ como em (15) na equação (19), e sabendo que $\zeta_\beta = \frac{-v_1}{\gamma}$ e $\zeta_\alpha = \frac{v_2}{\gamma}$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) = & -e^T Q e + e^T P b_d d - \\ & \frac{\sigma_{kp} \tilde{k}_p}{\mu k_m \gamma_p} \left\{ \dot{\tilde{k}}_p - (1 - \mu) [k_{p,nom} - \bar{k}_p \text{sgn}(e_o \zeta_p)] \right\} - \\ & \frac{k_p^* \tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \sigma_\beta}{\mu k_m \gamma} \left\{ \dot{\tilde{\beta}} + (1 - \mu) [\bar{\beta} \text{sgn}(e_o \zeta_\beta)] \right\} - \\ & \frac{\sigma_{\alpha 1} \tilde{\alpha}_1}{\mu k_m \gamma_1} \left\{ \dot{\tilde{\alpha}}_1 + (1 - \mu) [\bar{\alpha}_1 \text{sgn}(e_o \zeta_1)] \right\} - \\ & \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \sigma_\alpha}{\mu k_m \gamma} \left\{ \dot{\tilde{\alpha}} + (1 - \mu) [\bar{\alpha} \text{sgn}(e_o \zeta_\alpha)] \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Em (Teixeira et al., 2015) foi provado que $\dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) \leq -e^T Q e \leq 0$. Mas no trabalho citado não foi considerada a presença de perturbação na entrada da planta. Agora,   necessário analisar o termo da perturbação:

$$e^T P b_d d = b_d^T P e d \leq |b_d^T P e d| \leq \|b_d\| \cdot \|P\| \cdot \|e\| \cdot \bar{d} \leq c_d \cdot \|e\| \cdot \bar{d}, \text{ onde } c_d \geq \|b_d\| \cdot \|P\| \text{ e } |d(t)| \leq \bar{d}, \forall t \geq 0.$$

Adicionalmente, a partir da Desigualdade de Rayleigh, $-\lambda_{\max}(Q) \|e\|^2 \leq -e^T Q e \leq -\lambda_{\min}(Q) \|e\|^2$. Dessa forma, podemos reescrever (20) como:

$$\dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) \leq -\lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 + c_d \|e\| \bar{d}. \quad (21)$$

Como $\|e\| > 0$, $-\lambda_{\min}(Q) \|e\| + c_d \bar{d}$ deve ser negativo para que $\dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) < 0$. Essa condição é satisfeita caso:

$$\|e\| > \frac{c_d \bar{d}}{\lambda_{\min}(Q)} \quad (22)$$

Portanto, existe um tempo T finito tal que $\|e\| < \frac{c_d \bar{d}}{\lambda_{\min}(Q)}$, comprovando a propriedade i.

De (20) e (21), e sabendo que $\tilde{\theta}_p = \tilde{\theta}_p + \theta_p^*$, temos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) \leq & -\lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 + c_d \|e\| \bar{d} - \\ & \frac{\sigma_{kp} \tilde{k}_p}{\mu k_m \gamma_p} \left\{ \tilde{k}_p + k_p^* - (1 - \mu) [k_{p,nom} - \bar{k}_p \text{sgn}(e_o \zeta_p)] \right\} - \\ & \frac{k_p^* \tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \sigma_\beta}{\mu k_m \gamma} \left\{ \tilde{\beta} + \beta^* + (1 - \mu) [\bar{\beta} \text{sgn}(e_o \zeta_\beta)] \right\} - \\ & \frac{\sigma_{\alpha 1} \tilde{\alpha}_1}{\mu k_m \gamma_1} \left\{ \tilde{\alpha}_1 + \alpha_1^* + (1 - \mu) [\bar{\alpha}_1 \text{sgn}(e_o \zeta_1)] \right\} - \\ & \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \sigma_\alpha}{\mu k_m \gamma} \left\{ \tilde{\alpha} + \alpha^* + (1 - \mu) [\bar{\alpha} \text{sgn}(e_o \zeta_\alpha)] \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) \leq & -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \lambda_{\max}(P) \|e\|^2 + c_d \|e\| \bar{d} - \\ & \frac{\sigma_{kp} \tilde{k}_p}{\mu k_m \gamma_p} \left\{ \tilde{k}_p + \phi_{k_p} \right\} - \frac{k_p^* \tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \sigma_\beta}{\mu k_m \gamma} \left\{ \tilde{\beta} + \phi_\beta \right\} - \\ & \frac{\sigma_{\alpha 1} \tilde{\alpha}_1}{\mu k_m \gamma_1} \left\{ \tilde{\alpha}_1 + \phi_{\alpha 1} \right\} - \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \sigma_\alpha}{\mu k_m \gamma} \left\{ \tilde{\alpha} + \phi_\alpha \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

com $\phi_{k_p} = k_p^* - (1 - \mu) [k_{p,nom} - \bar{k}_p \text{sgn}(e_o \zeta_p)]$, $\phi_\beta = \beta^* + (1 - \mu) [\bar{\beta} \text{sgn}(e_o \zeta_\beta)]$, $\phi_{\alpha 1} = \alpha_1^* + (1 - \mu) [\bar{\alpha}_1 \text{sgn}(e_o \zeta_1)]$, e $\phi_\alpha = \alpha^* + (1 - \mu) [\bar{\alpha} \text{sgn}(e_o \zeta_\alpha)]$.

A partir da Desigualdade de Rayleigh, $-\lambda_{\max}(P) \|e\|^2 \leq -e^T P e$. Além disso, temos que $c/2 > c$, caso $c < 0$. Assim:

E assim:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) \leq & -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \frac{e^T P e}{2} + c_d \|e\| \bar{d} - \frac{\sigma_{kp}}{\mu} \frac{\tilde{k}_p^2}{2k_m \gamma_p} - \\ & \frac{\sigma_{kp} \tilde{k}_p}{\mu k_m \gamma_p} \phi_{k_p} - \frac{\sigma_{\beta}}{\mu} \frac{k_p^* \tilde{\beta}^T \Gamma_{\beta}^{-1} \tilde{\beta}}{2k_m \gamma} - \frac{k_p^* \tilde{\beta}^T \Gamma_{\beta}^{-1} \sigma_{\beta}}{\mu k_m \gamma} \phi_{\beta} - \\ & \frac{\sigma_{\alpha_1}}{\mu} \frac{\tilde{\alpha}_1^2}{2k_m \gamma_1} - \frac{\sigma_{\alpha_1} \tilde{\alpha}_1}{\mu k_m \gamma_1} \phi_{\alpha_1} - \frac{\sigma_{\alpha}}{\mu} \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_{\alpha}^{-1} \tilde{\alpha}}{2k_m \gamma} - \\ & \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_{\alpha}^{-1} \sigma_{\alpha}}{\mu k_m \gamma} \phi_{\alpha}. \end{aligned} \quad (25)$$

De (25) e (18), temos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) \leq & -\rho V(e, \tilde{\theta}_p) + c_d \|e\| \bar{d} - \frac{\sigma_{kp} \tilde{k}_p}{\mu k_m \gamma_p} \phi_{k_p} - \\ & \frac{k_p^* \tilde{\beta}^T \Gamma_{\beta}^{-1} \sigma_{\beta}}{\mu k_m \gamma} \phi_{\beta} - \frac{\sigma_{\alpha_1} \tilde{\alpha}_1}{\mu k_m \gamma_1} \phi_{\alpha_1} - \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_{\alpha}^{-1} \sigma_{\alpha}}{\mu k_m \gamma} \phi_{\alpha}, \end{aligned} \quad (26)$$

onde $\rho = \min \left[\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}; \frac{\sigma_{kp}}{\mu}; \frac{\sigma_{\beta_i}}{\mu}, i = 1, \dots, n-1; \frac{\sigma_{\alpha_1}}{\mu}; \frac{\sigma_{\alpha_i}}{\mu}, i = 2, \dots, n \right]$.

Ou ainda:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) \leq & -\rho V(e, \tilde{\theta}_p) + c_d \|e\| \bar{d} + \frac{\sigma_{kp}}{\mu k_m \gamma_p} \phi_{k_p}^2 + \\ & \frac{k_p^*}{\mu k_m \gamma} \|\phi_{\beta}\|^2 + \frac{\sigma_{\alpha_1}}{\mu k_m \gamma_1} \phi_{\alpha_1}^2 + \frac{1}{\mu k_m \gamma} \|\phi_{\alpha}\|^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Como $\phi_{k_p} < 2(k_{p,nom} + \bar{k}_p) = 2M_{k_p}$, $\phi_{\beta_i} < 2\bar{\beta}_i = 2M_{\beta_i}$, $i = 1, \dots, n-1$, $\phi_{\alpha_1} < 2\bar{\alpha}_1 = 2M_{\alpha_1}$, e $\phi_{\alpha_i} < 2\bar{\alpha}_i = 2M_{\alpha_i}$, $i = 2, \dots, n$, temos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) \leq & -\rho V(e, \tilde{\theta}_p) + c_d \|e\| \bar{d} + \frac{2\sigma_{kp}}{\mu k_m \gamma_p} M_{k_p}^2 + \\ & \frac{2k_p^*}{\mu k_m \gamma} \|M_{\beta}\|^2 + \frac{2\sigma_{\alpha_1}}{\mu k_m \gamma_1} M_{\alpha_1}^2 + \frac{2}{\mu k_m \gamma} \|M_{\alpha}\|^2. \end{aligned} \quad (28)$$

A partir da propriedade i do Teorema 1, $\exists T$ finito tal que $\|e\| < \frac{c_d \bar{d}}{\lambda_{\min}(Q)}$, $\forall t \geq T$. Assim, para $t \geq T$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) \leq & -\rho V(e, \tilde{\theta}_p) + \frac{c_d^2 \bar{d}^2}{\lambda_{\min}(Q)} + \frac{2\sigma_{kp}}{\mu k_m \gamma_p} M_{k_p}^2 + \\ & \frac{2k_p^*}{\mu k_m \gamma} \|M_{\beta}\|^2 + \frac{2\sigma_{\alpha_1}}{\mu k_m \gamma_1} M_{\alpha_1}^2 + \frac{2}{\mu k_m \gamma} \|M_{\alpha}\|^2. \end{aligned} \quad (29)$$

Para $\dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) \leq 0$,   necessário que:

$$\begin{aligned} -\rho V(e, \tilde{\theta}_p) + \frac{c_d^2 \bar{d}^2}{\lambda_{\min}(Q)} + \frac{2\sigma_{kp}}{\mu k_m \gamma_p} M_{k_p}^2 + \\ \frac{2k_p^*}{\mu k_m \gamma} \|M_{\beta}\|^2 + \frac{2\sigma_{\alpha_1}}{\mu k_m \gamma_1} M_{\alpha_1}^2 + \frac{2}{\mu k_m \gamma} \|M_{\alpha}\|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} V(e, \tilde{\theta}_p) \geq & \frac{1}{\rho} \left(\frac{c_d^2 \bar{d}^2}{\lambda_{\min}(Q)} + \frac{2\sigma_{kp}}{\mu k_m \gamma_p} M_{k_p}^2 + \right. \\ & \left. \frac{2k_p^*}{\mu k_m \gamma} \|M_{\beta}\|^2 + \frac{2\sigma_{\alpha_1}}{\mu k_m \gamma_1} M_{\alpha_1}^2 + \frac{2}{\mu k_m \gamma} \|M_{\alpha}\|^2 \right) = V_0. \end{aligned} \quad (31)$$

Isso implica que $e(t)$ e $\tilde{\theta}_p(t)$ convergem exponencialmente para o conjunto residual (17) descrito na propriedade ii . $\square$

3.2 Simulações

Para verificar o desempenho do sistema em malha fechada considerando perturbação na entrada da planta, foram realizadas simulações em uma planta de segunda ordem instável, com grau relativo $n^* = 1$. A planta e o modelo de referência são representados abaixo:

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{s+1}{(s-1)^2}, \\ M(s) &= \frac{1.5(s+2)}{(s+1)(s+3)}. \end{aligned} \quad (32)$$

A partir de (32) podemos identificar os parâmetros nominais da planta ($k_p^* = 1$, $\beta^* = 1$, $\alpha_1^* = -2$, e $\alpha^* = 1$) e do modelo de referência ($k_m = 1.5$, $\beta_m = 2$, $\alpha_{m1} = 4$, e $\alpha_m = 3$).

As estimativas iniciais para os parâmetros da planta foram escolhidas próximas dos seus valores nominais: $\hat{\theta}_p^T(0) = [\hat{k}_p(0) \ \hat{\beta}^T(0) \ \hat{\alpha}_1(0) \ \hat{\alpha}^T(0)] = [1.2 \ 1.2 \ -1.8 \ 1.2]$. Os filtros foram sintonizados como: $v_1(0) = v_2(0) = 0$, com $\Lambda = -2$ e $g = 2$. Os outros parâmetros foram projetados da seguinte forma: $\bar{\beta} = 3$, $\bar{\alpha}_1 = 4$, $\bar{\alpha} = 4$, $\bar{k}_p = 1.6$, $k_{p,nom} = 1.9$, $k_0 = 0.01$, $\gamma_p = 10$, $\Gamma_{\beta} = 12$, $\Gamma_{\alpha} = 12$, $\gamma_1 = 12$, $L = 10^{-6}$, $h = 10^{-5}$, $\mu_p = 10^{-7}$ e $\sigma_c = 10^{-4}$.

Primeiramente, foi aplicada uma perturbação constante incremental, como detalhado a seguir: $d(t) = 1$ para $t \leq 2$; $d(t) = 2$ para $2 < t \leq 4$; $d(t) = 3$ para $4 < t \leq 6$, $d(t) = 4$ para $6 < t \leq 8$; e $d(t) = 5$ para $t > 8$. A partir da Figura 2, podemos observar a rejeição   perturbação aplicada, o rápido transitório, sem apresentar grandes oscilações, e um sinal de controle suave em regime permanente. Isso ocorre porque quando $e_0 \rightarrow 0$, o parâmetro $\mu \rightarrow 1$, e consequentemente, o ID-MARC tende ao IMRAC.

Em seguida, o sistema foi testado com mudanças de referência e aplicação de uma perturbação na entrada da planta do tipo senoidal, ao invés de valores constantes. As mudanças de referência foram realizadas da seguinte forma: $r(t) = 2$ para

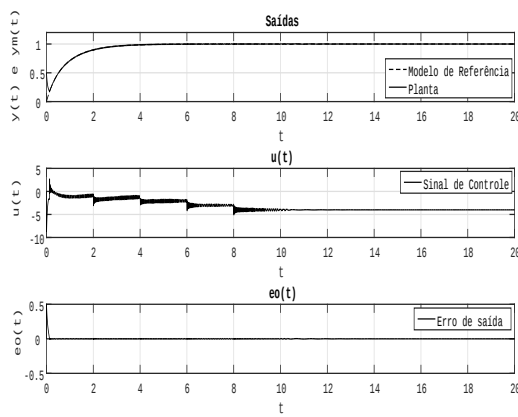


Figura 2: Desempenho do IDMARC para perturbação incremental

$t \leq 5$ e $10 \leq t \leq 15$, e $r(t) = 1$ para $5 < t < 10$ e $t > 15$. A perturbação na entrada da planta $d(t) = 5\text{sen}(0.5t)$ foi aplicada durante toda a simulação, representada na Figura 3. Nela, podemos observar mais uma vez a robustez do sistema contra a ação da perturbação. Dessa vez, o sinal de controle apresentou um chaveamento de pequena amplitude, devido às rápidas mudanças de referência. Nesta simulação, mesmo parando de efetuar as mudanças citadas, o sinal de controle ainda realiza pequenas oscilações, não suavizando perfeitamente, como pode ser observado para $t > 18s$. Isso se deve a existência da perturbação senoidal, a qual, pela sua natureza variante, torna a evolução do parâmetro μ oscilatória. Assim, o IDMARC também oscila de comportamento entre o IVS-MRAC e o IMRAC.

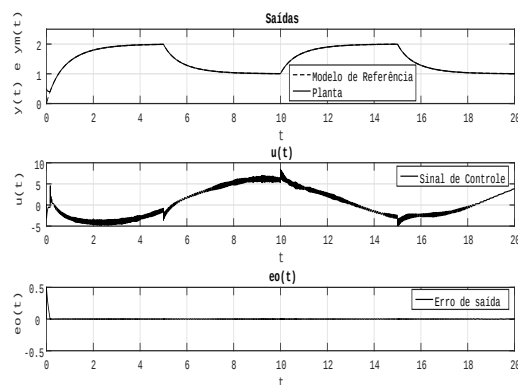


Figura 3: Desempenho do IDMARC para perturbação senoidal e mudanças de referência

4 Conclusões

Nesse trabalho, foi apresentada uma análise de estabilidade do IDMARC com perturbação limitada na entrada da planta, a qual prova que existe um

tempo T finito tal que $\|e\| < \frac{c\bar{a}\bar{d}}{\lambda_{\min}(Q)}$, além de demonstrar que os vetores $e(t)$ e $\hat{\theta}_p(t)$ convergem exponencialmente para um conjunto residual descrito no Teorema 1.

Adicionalmente, simulações apresentaram propriedades de robustez na presença de perturbação na entrada da planta (constante ou senoidal), além de boas características de transitório e sinal de controle.

Como trabalhos futuros, temos: realizar uma aplicação prática com o IDMARC; a análise de estabilidade do IDMARC na presença de dinâmicas não-modeladas; o desenvolvimento do IDMARC para grau relativo arbitrário; e a sintonia automática para projetar os parâmetros L , σ_c e μ_p .

Referências

- Cunha, C. D., Araujo, A. D., Barbalho, D. S. and Mota, F. C. (2005). A dual-mode adaptive robust controller applied to the speed control of a three-phase induction motor, *Asian Journal of Control* **7**(2): 197–201.
- Cunha, C. D., Araujo, A. D. and Mota, F. C. (2007). Controlador em modo dual adaptativo robusto para plantas com grau relativo unitário: Prova de estabilidade, *Revista Controle e Automação* **18**(2): 223–232.
- Hsu, L. (1990). Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurements: The general case, *IEEE Trans. Automatic Control* **AC-35**(11): 1238–1243.
- Ioannou, P. A. and Sun, J. (1996). *Robust adaptive control*, Prentice-Hall, New Jersey, EUA.
- Narendra, K. S. and Valavani, L. S. (1978). Stable adaptive controller design - direct control, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-23**(4): 570–583.
- Oliveira, J. B. and Araujo, A. D. (2004). An indirect variable structure model reference adaptive control applied to the speed control of a three-phase induction motor, *Proceedings of the 2004 American Control Conference* pp. 1946–1951.
- Oliveira, J. B. and Araujo, A. D. (2008). Design and stability analysis of an indirect variable structure model reference adaptive control, *International Journal of Control* **81**(12): 1870–1877.
- Teixeira, L. R. L., Oliveira, J. B. and Araujo, A. D. (2015). Smooth indirect adaptive sliding mode control, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **25**(6): 775–790.