

PROJETO DE CONTROLADORES *GAIN SCHEDULING* USANDO REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA COM RESTRIÇÃO DE $\mathcal{D}$ -ESTABILIDADE.

MARIO ROLANDO RODRÍGUEZ CADALSO*, LÁZARO ISMAEL HARDY LLINS*, EDVALDO ASSUNÇÃO*,
MARCELO C. M. TEIXEIRA*, DIOGO RAMALHO DE OLIVEIRA*

*UNESP - Univ Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira
Departamento de Engenharia Elétrica, Lab. de Pesquisa em Controle
Av. José Carlos Rossi, 1370, 15385-000, Ilha Solteira, São Paulo, Brasil

Emails: mario.cadalso@gmail.com, hardyllins@gmail.com, edvaldo@dee.feis.unesp.br,
marcelo@dee.feis.unesp.br, diogo_oliveira6@hotmail.com

Abstract— In this work are proposed methodologies based on Lyapunov stability theory for designing gain scheduling controller using state-derivative feedback and considering $\mathcal{D}$ -stability constraint. The design conditions are given by Linear Matrix Inequalities. The methodology is applied on a system with time-variant parameter. The use of Finsler's Lemma eliminated the problem of inverting a symbolic matrix to calculate the feedback gain. The theory of $\mathcal{D}$ -stability allowed to get feasible controllers for an active suspension system. A practical implementation showed the efficiency of the proposed methodology.

Keywords— Linear Matrix Inequalities (LMIs); Controller *gain scheduling*; State-derivative feedback; Finsler's Lemma; $\mathcal{D}$ -stability.

Resumo— Neste trabalho são propostas metodologias com base na teoria de estabilidade segundo Lyapunov para projetar controladores *gain scheduling* usando realimentação derivativa e o conceito de $\mathcal{D}$ -estabilidade. As condições de projeto são dadas por desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMIs). A metodologia é aplicada em sistemas lineares sujeitos a parâmetros variantes no tempo (do inglês, *Linear Parameter Varying* - LPV). A utilização do Lema de Finsler eliminou a necessidade de inverter uma matriz literal para encontrar o ganho de realimentação. Com o objetivo de satisfazer requisitos práticos, foi feito uso da restrição de $\mathcal{D}$ -estabilidade no projeto de um controlador para um sistema de suspensão ativa. Uma implementação prática mostra a eficiência da metodologia proposta.

Keywords— Desigualdades matriciais lineares (LMIs); Controle *gain scheduling*; Realimentação derivativa; Lema de Finsler; $\mathcal{D}$ -estabilidade.

1 Introdução

O modelo matemático de um sistema pode apresentar variações temporais, perturbações ou incertezas nos seus parâmetros físicos, proporcionando um modelo incerto. Uma pequena variação em um parâmetro pode ter um importante impacto na dinâmica do sistema. A análise e controle de sistemas lineares com parâmetros variantes (do inglês, *Linear Parameter Varying* - LPV) tem obtido maior relevância nos últimos anos, justificando a aplicação de teorias como a *gain scheduling* e *fuzzy*, por exemplo.

Gain scheduling é uma técnica de controle não linear com muitas aplicações no controle de processos. O objetivo é decompor o problema não linear em distintos subproblemas lineares de menor complexidade. Esse tipo de controle tem a vantagem de auto adaptar-se com rapidez, mas é necessário um conhecimento detalhado da dinâmica da planta a ser controlada. Em função de uma variável conhecida é determinado o controlador.

Recentemente muitos trabalhos têm sido desenvolvidos nessa área. Em (Apkarian and Adams, 1998) se faz uso da teoria de *gain scheduling* e da formulação através de LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMIs) usando um sistema LPV, com o objetivo de obter um controlador menos conservador que garanta o desempenho desejado. (Scorletti and El Ghaoui,

L., 1998) apresentam condições LMIs suficientes para melhorar o desempenho de um controlador *gain scheduling*.

O presente trabalho dá continuidade a outros estudos envolvendo o uso de LMIs utilizando a realimentação derivativa, acrescentando a aplicação da teoria de *gain scheduling* (Llins et al., 2015).

Para obter a segunda derivada do vetor de estado (posição), se faz uso de sensores acelerométricos. Estes são populares nas aplicações industriais atualmente, devido ao seu baixo custo e também por causa da possibilidade de obter a primeira derivada de forma precisa.

Neste trabalho, são propostas condições LMIs envolvendo a teoria de $\mathcal{D}$ -estabilidade, com o objetivo de garantir que os autovalores do sistema realimentado estejam em uma determinada região do plano complexo. Dessa forma, é possível garantir que o sistema em malha fechada apresente um desempenho satisfatório. Ao longo desse trabalho foram utilizadas as seguintes notações: $(\cdot)^T$ indica a transposição de um vetor ou matriz, o símbolo $(*)$ denota genericamente cada bloco simétrico e $He\{\cdot\}$ é o operador hermitiano, $He\{U\} = U + U^T$. Por fim,

$$F_z = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) F_i, F_{zz} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) F_{ij}$$
$$\alpha(t) \in \Lambda_N =$$
$$\left\{ \alpha(t) \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) = 1, \alpha_i(t) \geq 0, i=1, \dots, N \right\} \quad (1)$$

destacando que $\alpha(t)$ é um parâmetro variável no tempo e F_z representa uma matriz genérica que depende de $\alpha(t)$.

2 Projeto do controlador *gain scheduling* usando realimentação derivativa com restrição de $\mathcal{D}$ -estabilidade

As seguintes propriedades são úteis no desenvolvimento do trabalho.

Propriedade 1 (Boyd et al., 1994) Para toda matriz M não simétrica ($M \neq M^T$), se $M + M^T < 0$, então M   invertível.

Propriedade 2 (Tanaka et al., 1998) Se as seguintes LMIs: $\Upsilon_{ii} < 0$ para $i = 1, 2, \dots, N$ e $\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} < 0$ para $1 \leq i < j \leq N$, forem factíveis, então a desigualdade $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j \Upsilon_{ij} = \Upsilon_{zz} < 0$   verdadeira.

2.1 Formulação LMI com Lema de Finsler

O objetivo neste projeto do controlador é garantir a estabilidade do sistema:

$$\dot{x}(t) = A_z x(t) + B_z u(t). \quad (2)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $A_z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B_z \in \mathbb{R}^{n \times m}$, note que conforme (1), A_z e B_z dependem de $\alpha(t)$. A realimentação derivativa utilizada nesse trabalho é dada por:

$$u(t) = -K_z \dot{x}(t). \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2) obt m-se

$$\dot{x}(t) = A_z x(t) - B_z K_z \dot{x}(t) \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow 0 = A_z x(t) - (I + B_z K_z) \dot{x}(t). \quad (5)$$

Para utilizar o Lema de Finsler   necessário partir da igualdade (5), resultado da transformação do sistema (4). O mesmo garante a relaxação do conjunto de LMIs, devido à desassociação de matrizes ou   redução do número de LMIs no projeto dos controladores (Mozelli et al., 2004).

Lema 1 (Lema de Finsler) Considere $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com posto ($\mathcal{B} < n$) e $\mathcal{B}^\perp$ uma base para o espaço nulo de $\mathcal{B}$ (isto é $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0$). Então as seguintes condições são equivalentes:

- (i) $\mathcal{W}^T \mathcal{D} \mathcal{W} < 0$, $\forall \mathcal{W} \neq 0$, $\mathcal{B} \mathcal{W} = 0$,
- (ii) $\mathcal{B}^{\perp T} \mathcal{D} \mathcal{B}^\perp < 0$,
- (iii) $\exists \rho \in \mathbb{R} : \mathcal{D} - \rho \mathcal{B}^T \mathcal{B} < 0$,
- (iv) $\exists \mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{D} + \mathcal{Q} \mathcal{B} + \mathcal{B}^T \mathcal{Q}^T < 0$,

sendo ρ e $\mathcal{Q}$ variáveis adicionais (ou multiplicadoras).

Prova: Veja (Skelton et al., 1997).

2.2 Projeto do controlador com condição de estabilidade

Em (Hardy, 2015) são apresentadas condições suficientes para que o sistema (4) seja estabilizável.

Com o objetivo de melhorar a resposta transitória do sistema,   proposta uma técnica de alocação dos autovalores do sistema realimentado que usa o conceito de $\mathcal{D}$ -estabilidade. O mesmo permite que restrições de porcentagem de *overshoot* $PO\%$, tempo de subida t_s e tempo de estabelecimento t_e , sejam representadas na forma de LMIs (Chilali and Gahinet, 1996). A região de interesse está apresentada na Figura 1 (Chilali and Gahinet, 1996) que pode ser dada por números complexos $x + jy$, tal que:

$$x < -\gamma < 0, \quad |x + jy| < r, \quad \tan(\theta)x < -|y| \quad (6)$$

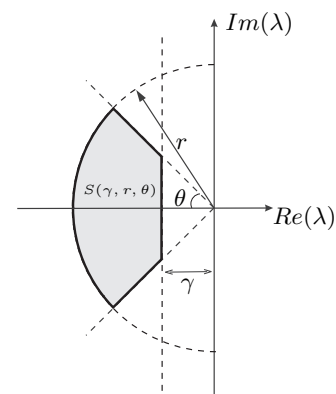


Figura 1: Região $S(\gamma, r, \theta)$ para alocação de autovalores.

Nos próximos teoremas são propostas condições LMIs que possibilitam a inclusão de $\mathcal{D}$ -estabilidade no projeto do controlador *gain scheduling*.

2.3 Projeto do controlador com condição de estabilidade e taxa de decaimento γ

No Teorema 1, proposto em (Hardy, 2015) são apresentadas condições suficientes para que o sistema (4) seja estabilizável com taxa de decaimento $\gamma > 0$. Devido à pequena faixa de γ que tornava as LMIs factíveis, foi introduzido um escalar $\kappa > 0$ no conjunto de LMIs. Com uma escolha adequada de κ ,   possível aumentar a taxa de decaimento.

Teorema 1 (Llins, 2015) Supondo A_z invertível, para dado γ e κ , se existir uma matriz simétrica definida positiva $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $Z_i, Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que:

$$\Upsilon_{ii}^\gamma < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (7)$$

$$\Upsilon_{ij}^\gamma + \Upsilon_{ji}^\gamma < 0, \quad 1 \leq i < j \leq N, \quad (8)$$

$$\Upsilon_{ii}^\gamma = \begin{bmatrix} 2\gamma G + A_i Q^T + Q A_i^T & * \\ G + \kappa Q A_i^T - Q^T - B_i Z_i & -\kappa(Q^T + B_i Z_i + Q + Z_i^T B_i^T) \end{bmatrix} < 0. \quad (9)$$

então o sistema (4) é estabilizável, com taxa de decaimento maior ou igual a γ e as matrizes do controlador são dadas por $K_z = Z_z Q^{-T}$.

Prova: Veja (Hardy, 2015).

A seguir são propostas nossas condições LMIs para inclusão da restrição de raio da $\mathcal{D}$ -estabilidade.

2.4 Projeto do controlador com condição de estabilidade e restrição de raio r

Teorema 2 Supondo A_z invertível, para dado r , se existir uma matriz simétrica definida positiva $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $Z_i, Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que:

$$\Upsilon_{ii}^r < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (10)$$

$$\Upsilon_{ij}^r + \Upsilon_{ji}^r < 0, \quad 1 \leq i < j < N, \quad (11)$$

$$\Upsilon_{ii}^r = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -rG + A_i W^T \\ +W A_i^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -W^T - B_i Z_i \\ +W A_i^T \end{pmatrix} 0_{n \times n} \\ * \begin{pmatrix} -W^T - B_i Z_i \\ -W - Z_i^T B_i^T \end{pmatrix} G \\ * \quad * \quad -rG \end{bmatrix}. \quad (12)$$

então o sistema (4) é estabilizável com autovalores, dentro do círculo de raio r , para todo $\alpha(t)$. As matrizes do controlador são dadas por:

$$K_z = Z_z W^{-T}. \quad (13)$$

Prova: A partir da Propriedade 2, se as LMIs (10)-(11) forem factíveis, então a desigualdade $\Upsilon_{zz}^r < 0$ é verdadeira. Realizando as transformações de variáveis $G = X^{-1} P X^{-T}$, $W = X^{-1}$ e $Z_z = K_z X^{-T}$ e multiplicando Υ_{zz}^r à esquerda por $\text{diag}(X, X, X, X)$ e à direita por $\text{diag}(X^T, X^T, X^T, X^T)$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -rP + X A_z \\ +A_z^T X^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -X + A_z^T X^T \\ -X B_z K_z \end{pmatrix} 0_{n \times n} \\ * \begin{pmatrix} -X - X B_z K_z \\ -X^T - K_z^T B_z^T X^T \end{pmatrix} P \\ * \quad * \quad -rP \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

De $-X - X^T - X B_z K_z - K_z^T B_z^T X^T < 0 \Leftrightarrow X(I + B_z K_z) + (I + B_z K_z)^T X^T > 0$ e segundo a Propriedade 1, conclui-se que $X(I + B_z K_z)$ é invertível, logo $(I + B_z K_z)$ e X são invertíveis. Do item (iv) do Lema 1, a desigualdade (14) pode ser reescrita como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -rP & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ * & 0_{n \times n} & P \\ * & * & -rP \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}} + \text{He} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} X \\ X \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_z & -I - B_z K_z & 0_{n \times n} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} \right\} < 0. \quad (15)$$

sendo $\mathcal{Q}$ uma matriz variável adicional. Agora considere que

$$\mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} A_z^{-1} & 0_{n \times n} \\ (I + B_z K_z)^{-1} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & I \end{bmatrix}, \mathcal{D} = \begin{bmatrix} -rP & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ * & 0_{n \times n} & P \\ * & * & -rP \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Como $\mathcal{B} \mathcal{B}^\perp = 0_{n \times 2n}$, considerando o item (ii) do Lema 1, a equivalência é estabelecida

$$\mathcal{B}^{\perp T} \mathcal{D} \mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} -A_z^{-T} r P A_z^{-1} & (I + B_z K_z)^{-T} P \\ P(I + B_z K_z)^{-1} & -rP \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

Multiplicando (17) à esquerda por $\text{diag}(A_z^T, I)$ e à direita por $\text{diag}(A_z, I)$, tem-se

$$\begin{bmatrix} rP & A_N^T P \\ P A_N & rP \end{bmatrix} < 0, \quad A_N = (I + B_z K_z)^{-1} A_z.$$

e a prova está concluída.

A continuação são propostas nossas condições LMIs para inclusão da restrição do ângulo de $\mathcal{D}$ -estabilidade.

2.5 Projeto do controlador com condição de estabilidade e restrição de ângulo θ

Teorema 3 Supondo A_z invertível, para dado θ , se existir uma matriz simétrica definida positiva $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $Z_i, Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que:

$$\Upsilon_{ii}^\theta < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (18)$$

$$\Upsilon_{ij}^\theta + \Upsilon_{ji}^\theta < 0, \quad 1 \leq i < j < N, \quad (19)$$

$$\Upsilon_{ii}^\theta = [M_{11}^{ii} \quad M_{12}^{ii} \quad M_{13}^{ii} \quad M_{14}^{ii}] \quad (20)$$

$$M_{11}^{ii} = \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(A_i W^T + W A_i^T) \\ \text{sen}(\theta)(G - W + A_i W^T - Z_i^T B_i^T) \\ \cos(\theta)(G + A_i W^T + W + Z_i^T B_i^T) \\ \cos(\theta)(A_i W^T - W A_i^T) \end{bmatrix},$$

$$M_{12}^{ii} = \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(G - W^T + W A_i^T - B_i Z_i) \\ \text{sen}(\theta)(-W^T - B_i Z_i - W - Z_i^T B_i^T) \\ \cos(\theta)(-W^T - B_i Z_i + W + Z_i^T B_i^T) \\ \cos(\theta)(-G - W^T - B_i Z_i - W A_i^T) \end{bmatrix},$$

$$M_{13}^{ii} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)(G + W^T + W A_i^T + B_i Z_i) \\ \cos(\theta)(W^T + B_i Z_i - W - Z_i^T B_i^T) \\ \text{sen}(\theta)(-W^T - B_i Z_i - W - Z_i^T B_i^T) \\ \text{sen}(\theta)(G - W^T - B_i Z_i + W A_i^T) \end{bmatrix},$$

$$M_{14}^{ii} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)(-A_i W^T + W A_i^T) \\ \cos(\theta)(-G - A_i W^T - W - Z_i^T B_i^T) \\ \text{sen}(\theta)(G + A_i W^T - W - Z_i^T B_i^T) \\ \text{sen}(\theta)(A_i W^T + W A_i^T) \end{bmatrix}.$$

então o sistema (4) é estabilizável com autovalores, dentro da região limitada por θ , para todo $\alpha(t)$. As matrizes do controlador são dadas por:

$$K_z = Z_z W^{-T}. \quad (21)$$

Prova: A partir da Propriedade 2, se as LMIs (18)-(19) forem factíveis, então a desigualdade $\Upsilon_{zz}^\theta < 0$ é verdadeira. Realizando as transformações de variáveis $G = X^{-1} P X^{-T}$,

$W = X^{-1}$ e $Z_z = K_z X^{-T}$ e multiplicando Υ_{zz}^θ à esquerda por $\text{diag}(X, X, X, X)$ e à direita por $\text{diag}(X^T, X^T, X^T, X^T)$, tem-se:

$$[M_{21} \ M_{22} \ M_{23} \ M_{24}] < 0, \quad (22)$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(XA_z + A_z^T X^T) \\ \text{sen}(\theta)(P + XA_z - X^T - K_z^T B_z^T X^T) \\ \cos(\theta)(P + XA_z + X^T + K_z^T B_z^T X^T) \\ \cos(\theta)(XA_z - A_z^T X^T) \end{bmatrix},$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(P - X + A_z^T X^T - XB_z K_z) \\ \text{sen}(\theta)(-X - XB_z K_z - X^T - K_z^T B_z^T X^T) \\ \cos(\theta)(-X - XB_z K_z + X^T + K_z^T B_z^T X^T) \\ \cos(\theta)(-P - X - XB_z K_z - A_z^T X^T) \end{bmatrix},$$

$$M_{23} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)(P + X + A_z^T X^T + XB_z K_z) \\ \cos(\theta)(X + XB_z K_z - X^T - K_z^T B_z^T X^T) \\ \text{sen}(\theta)(-X - XB_z K_z - X^T - K_z^T B_z^T X^T) \\ \text{sen}(\theta)(P - X - XB_z K_z + A_z^T X^T) \end{bmatrix},$$

$$M_{24} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)(-XA_z + A_z^T X^T) \\ \cos(\theta)(-P - XA_z - X^T - K_z^T B_z^T X^T) \\ \text{sen}(\theta)(P + XA_z - X^T - K_z^T B_z^T X^T) \\ \text{sen}(\theta)(XA_z + A_z^T X^T) \end{bmatrix}.$$

De $-X - X^T - XB_z K_z - K_z^T B_z^T X^T < 0 \Leftrightarrow X(I + B_z K_z) + (I + B_z K_z)^T X^T > 0$ e segundo a Propriedade 1, conclui-se que $X(I + B_z K_z)$ é invertível, logo $(I + B_z K_z)$ e X são invertíveis. Do item (iv) do Lema 1, a desigualdade (22) pode ser reescrita como $\mathcal{D} + \mathbf{He}\{\mathcal{Q}\mathcal{B}\} < 0$, sendo que

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & \text{sen}(\theta)P & \cos(\theta)P & 0_{n \times n} \\ * & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & -\cos(\theta)P \\ * & * & 0_{n \times n} & \text{sen}(\theta)P \\ * & * & * & 0_{n \times n} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)X & -\cos(\theta)X \\ \text{sen}(\theta)X & -\cos(\theta)X \\ \cos(\theta)X & \text{sen}(\theta)X \\ \cos(\theta)X & \text{sen}(\theta)X \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} A_z & -I - B_z K_z & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & -I - B_z K_z & A_z \end{bmatrix}. \quad (23)$$

sendo $\mathcal{Q}$ uma matriz variável adicional. Agora considere que

$$\mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} A_z^{-1}(I + B_z K_z)^{-1} & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & (I + B_z K_z)^{-1} A_z^{-1} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Como $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0_{2n \times 2n}$, considerando o item (ii) do Lema 1 a equivalência é estabelecida

$$\mathcal{B}^\perp \mathcal{D} \mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} \left(\begin{array}{l} \text{sen}(\theta)(I + B_z K_z)^{-T} P A_z^{-1} \\ + \text{sen}(\theta) A_z^{-T} P (I + B_z K_z)^{-1} \\ \cos(\theta) A_z^{-T} P (I + B_z K_z)^{-1} \\ + \cos(\theta)(I + B_z K_z)^{-T} P A_z^{-1} \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{l} \cos(\theta) A_z^{-T} P (I + B_z K_z)^{-1} \\ - \cos(\theta)(I + B_z K_z)^{-T} P A_z^{-1} \\ \text{sen}(\theta) A_z^{-T} P (I + B_z K_z)^{-1} \\ + \text{sen}(\theta)(I + B_z K_z)^{-T} P A_z^{-1} \end{array} \right) \end{bmatrix} < 0, \quad (25)$$

Multiplicando (25) à esquerda por $\text{diag}(A_z^T, A_z^T)$ e à direita por $\text{diag}(A_z, A_z)$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(A_N^T P + P A_N) & \cos(\theta)(P A_N - A_N^T P) \\ \cos(\theta)(A_N^T P - P A_N) & \text{sen}(\theta)(P A_N + A_N^T P) \end{bmatrix} < 0.$$

sendo $A_N = (I + B_z K_z)^{-1} A_z$, conclui-se a prova.

3 Implementação Prática

Nesta seção são testadas de forma prática as metodologias propostas nos teoremas anteriores. São apresentadas as soluções obtidas das matrizes Q , Z_z e K_z e figuras com a resposta dinâmica do sistema, para os distintos sinais de controle empregados. O sistema de suspensão ativa utilizado é fabricado pela Quanser e pode ser visto na Figura 2.

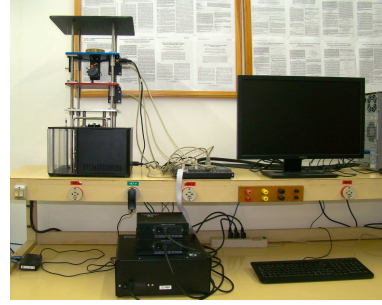


Figura 2: Sistema de suspensão ativa da marca Quanser, pertencente ao LPC-FEIS-UNESP.

O sistema consiste de um conjunto composto por duas massas, denominadas M_s e M_{us} . A massa M_s representa $\frac{1}{4}$ do corpo total do veículo e é suportada pela mola k_s e pelo amortecedor b_s . A massa M_{us} corresponde à massa do conjunto do pneu do veículo e é suportada pela mola k_{us} e pelo amortecedor b_{us} . Para atenuar as vibrações causadas por irregularidades na pista utiliza-se o sistema de suspensão ativa, representado por um motor (atuador) conectado entre as massas M_s e M_{us} , e controlado pela força F_c . Os valores dos parâmetros estão dispostos na Tabela 1.

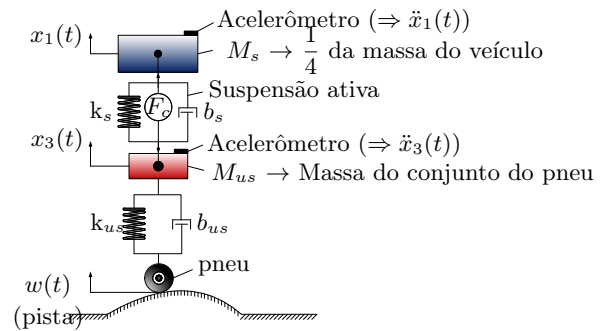


Figura 3: Modelo esquemático do sistema de suspensão ativa.

O modelo esquemático (Quanser, 2009), mostrado na Figura 3 (Llins et al., 2015) pode ser representado em espaço de estados, como segue:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{-k_s}{M_s} & \frac{-b_s}{M_s} & 0 & \frac{b_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_{us}}{M_{us}} & \frac{b_s}{M_{us}} & \frac{-k_{us}}{M_{us}} & \frac{-(b_s + b_{us})}{M_{us}} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_s} \\ 0 \\ \frac{-1}{M_{us}} \end{bmatrix} u(t),$$

sendo $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ e $x_4(t) = \dot{x}_3(t)$, representando as velocidades de cada massa.

Tabela 1: Parâmetros da suspensão ativa.

Símbolos	Valor
M_s	2,45 (Kg)
M_{us}	1 (Kg)
k_s	900 (N/m)
k_{us}	2500 (N/m)
b_s	7,5 (Ns/m)
b_{us}	5 (Ns/m)

Os parâmetros do sistema M_s e M_{us} dados na Tabela 1 (Quanser, 2009), possuem pequenas variações ao longo do tempo. Isto tem a intenção de simular desgaste dos componentes do sistema mecânico. Com objetivo de realizar um teste mais severo do controlador *gain scheduling* é implementada uma variação temporal $\alpha(t)$ dada pela equação (26), no ganho do canal de saída do sinal de controle $u(t)$. Isso é feito via *software*, emulando uma variação ao longo do tempo do ganho do amplificador de potência que alimenta o motor CC do atuador. Essa variação paramétrica pode ser representada no modelo considerando dois vértices do politopo no vetor de entrada B_z em (2). Para uma frequência $f = 0,01Hz$, $\alpha(t)$ é dado por:

$$\alpha(t) = 0,5 + 0,5 \sin\left(2\pi 0,01t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (26)$$

Os dois vértices resultantes da variação paramétrica $\alpha(t)$, representam o amplificador operando com 100% da potência ou com 60% da potência. Então, foram considerados os seguintes vértices do politopo:

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367,347 & -3,061 & 0 & 3,061 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = [0 \ 0,408 \ 0 \ -1]^T,$$

$$B_2 = [0 \ 0,244 \ 0 \ -0,6]^T.$$

3.1 Primeiro caso

Usando as LMIs dos Teoremas 1, 2 e 3 com $\gamma = 1,11$, $\kappa = 0,9$, $r = 70$, $\theta = 45^\circ$ e parâmetro $\alpha(t)$ variando com frequência de $0,01Hz$, os ganhos calculados foram:

$$K_1 = [292,7180 \ 24,5552 \ -466,9545 \ 1,5677].$$

$$K_2 = [486,0575 \ 40,8744 \ -787,9186 \ 2,4722].$$

A frequência de $\alpha(t)$ foi adotada igual a $0,01Hz$. Na Figura 4, mostra-se a evolução temporal dos elementos do controlador K .

Os autovalores do sistema estão ilustrados na Figura 5, para diversos valores de $0 \leq \alpha(t) \leq 1$.

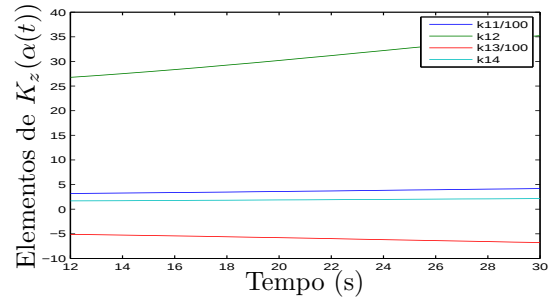


Figura 4: Elementos de $K_z(\alpha(t))$ em função do tempo.

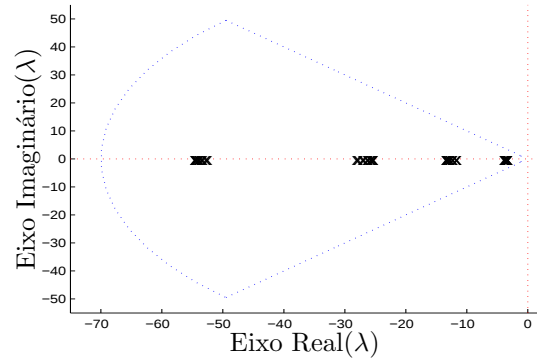


Figura 5: Localização da nuvem dos autovalores do sistema.

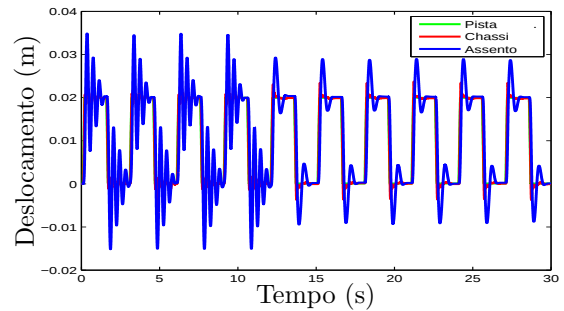


Figura 6: Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,01-30s).

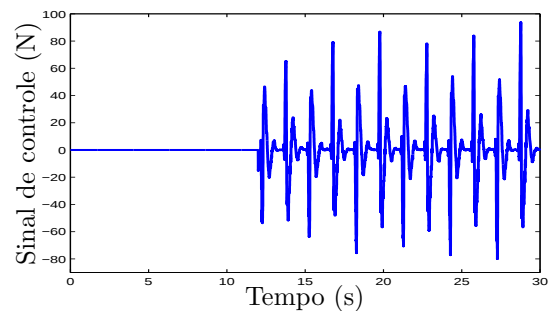


Figura 7: Sinal de controle para $\alpha(t)$ com frequência de $0,01Hz$.

Na Figura 6 nota-se que o sistema apresenta

um bom desempenho dinâmico, mostrando a validade de nossa proposta.

3.2 Segundo caso - maior frequência

Aplicando a mesma metodologia e restrição de $\mathcal{D}$ -estabilidade proposta no primeiro caso, as Figuras 8 e 10 mostram o bom desempenho do sistema para os casos nos quais o parâmetro $\alpha(t)$ varia com frequência de $0,1Hz$ e $1Hz$ respectivamente.

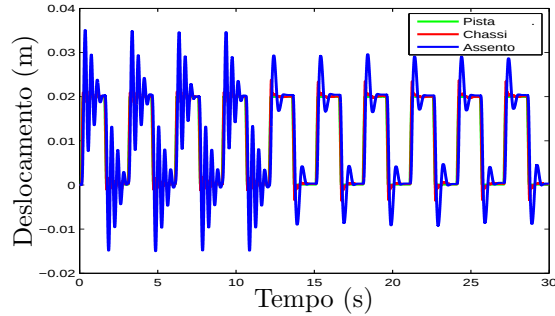


Figura 8: Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,01-30s) para $\alpha(t)$ com frequência de $0,1Hz$.

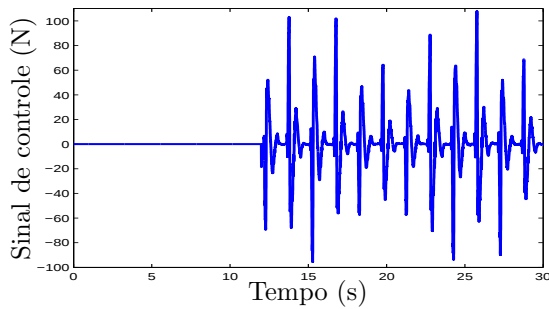


Figura 9: Sinal de controle para $\alpha(t)$ com frequência de $0,1Hz$.

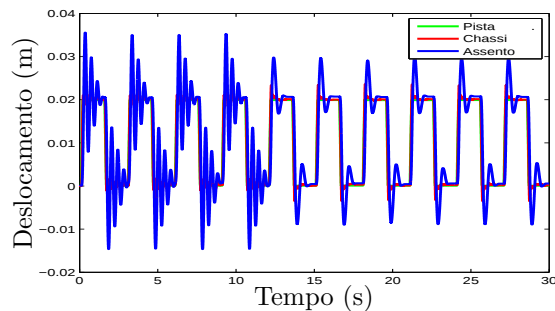


Figura 10: Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,01-30s) para $\alpha(t)$ com frequência de $1Hz$.

Para diferentes valores de frequência de $0,01Hz$ à $1Hz$ os gráficos mostrados nas figuras anteriores atestam um bom desempenho do sistema com o controlador *gain scheduling* proposto.

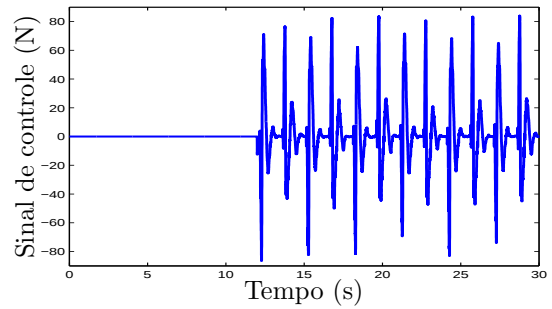


Figura 11: Sinal de controle para $\alpha(t)$ com frequência de $1Hz$.

Nessa metodologia não foi incluída a taxa de variação temporal do parâmetro $\alpha(t)$, como foi realizado por (Montagner and Peres, 2004). Porém, na prática, a metodologia proposta apresenta uma formulação LMI mais simples que a existente na literatura e eficiente para diversas faixas de taxa de variação de $\alpha(t)$.

4 Conclusões

Neste trabalho demonstrou-se que as condições propostas são suficientes para projetar o controlador *gain scheduling* usando realimentação derivativa via LMI com restrição de $\mathcal{D}$ -estabilidade. Projetou-se o controlador *gain scheduling* aplicando o Lema de Finsler, tornando possível obter o valor do controlador sem inverter uma matriz literal (Montagner and Peres, 2004). Com o emprego da restrição de $\mathcal{D}$ -estabilidade é possível satisfazer requisitos de desempenho para a resposta transitória do sistema, além de obter ganhos implementáveis na prática. Os resultados mostram que as metodologias implementadas tem validade e são viáveis, motivando futuras pesquisas.

Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES, CNPq e a FAPESP (Processo: 2011/17610-0) pelo apoio financeiro.

Referências

- Apkarian, P. and Adams, R. (1998). Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems, *Control Systems Technology, IEEE Transactions on* **6**(1): 21–32.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, Studies in Applied Mathematics, 15, 2 edn, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia.
- Chilali, M. and Gahinet, P. (1996). $\mathcal{H}_\infty$ design with pole placement constraints: An LMI

- approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(3): 358–367.
- Hardy, L. (2015). *Projeto do controlador gain scheduling usando realimentação derivativa via LMI*, Mestrado Engenharia Elétrica, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho.
- Llins, L. I. H., Assunção, E., Cardim, R., Teixeira, M. C. M., Oliveira, D. R. and da Silva, E. R. P. (2015). Projeto do controlador *gain scheduling* usando realimentação derivativa via LMI, *XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI*, Natal - RN.
- Montagner, V. F. and Peres, P. L. D. (2004). State feedback gain scheduling for linear systems with time-varying parameters., Vol. 3, American Control Conference, 2004, Boston., Boston: IEEE, pp. 2004–2009.
- Mozelli, L. A., Palhares, R. M. and Avellar, G. S. C. (2004). A systematic approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems, *Wind Energy* **8**(1): 1–7.
- Quanser (2009). *Active Suspension: User's Manual*, Quanser Consulting Inc., Ontario, Canada.
- Scorletti, G. and El Ghaoui, L. (1998). Improved LMI conditions for gain scheduling and related control problems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **8**: 845–877.
- Skelton, R. E., Iwasaki, T. and Grigoriadis, K. (1997). *A Unified Algebraic Approach to Control Design*, Bristol: Taylor & Francis.
- Tanaka, K., Ikeda, T. and Wang, H. O. (1998). Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **6**(2): 250–265.