

BUSCA EXTREMAL BASEADA NO MÉTODO DE NEWTON NA PRESENÇA DE ATRASOS

TIAGO ROUX OLIVEIRA*, MIROSLAV KRSTIĆ†, VICTOR HUGO PEREIRA RODRIGUES*

*Dept. de Engenharia Eletrônica e Telecomunicações, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, RJ 20550-900, Brasil.

†Dept. of Mechanical and Aerospace Engineering, University of California - San Diego (UCSD), La Jolla, CA 92093-0411, USA.

Emails: tiagoroux@uerj.br, krstic@ucsd.edu, rodrigues.vhp@gmail.com

Abstract— In this article we derive a control design and analysis for scalar Newton-based extremum seeking subject to input-output delays. Differently from the previous work, a new predictor with a perturbation-based estimate of the Hessian's inverse is incorporated in the closed-loop such that the convergence rate of the real-time controller can be made user-assignable, rather than being dependent on the unknown Hessian of the static nonlinear map to be optimized. Exponential stability and convergence to a small neighborhood of the unknown extremum point can be obtained. This result is rigorously achieved by using backstepping transformation and averaging in infinite dimensions. A numerical example is given to illustrate the effectiveness of the proposed predictor based extremum seeking for time-delay compensation.

Keywords— Time delay, Adaptive systems, Newton-based extremum seeking, Predictors, Backstepping transformation, Averaging in infinite dimensions.

Resumo— Neste artigo propõe-se um projeto de controle e análise para a busca extremal escalar, baseado no método de Newton sujeito a atrasos de entrada e saída. Diferente de trabalhos anteriores, um novo preditor com estimativa da inversa da Hessiana, baseada em perturbações senoidais (sinais de *dither*), é incorporado à malha fechada tal que, a taxa de convergência do controlador em tempo real pode ser especificada pelo usuário, ao invés de ser dependente da Hessiana (desconhecida) do mapa estático não-linear a ser otimizado. A estabilidade exponencial e convergência à uma pequena vizinhança do ponto de extremo desconhecido pôde ser obtida. Este resultado é rigorosamente alcançado utilizando a transformação *backstepping* e teorema da média em dimensões infinitas. Um exemplo numérico é dado para ilustrar a eficiência da busca extremal, baseada em preditor para compensação do atraso.

Palavras-chave— Atraso, Sistemas Adaptativos, Busca Extremal, Preditores, Transformação *Backstepping*, *Averaging* em Dimensões Infinitas.

1 Introdução

Neste artigo e na referência (Oliveira and Krstić, 2015), trata-se o problema de controle por busca extremal (*Extremum Seeking Control* – ESC) (Krstić, 2014) na presença de atrasos, considerando-se os métodos de Newton e Gradiente com atrasos na entrada/saída.

As vantagens do método de Newton, com relação ao do Gradiente, na ausência de atrasos, foram profundamente estudadas em (Krstić, 2014; Ghaffari et al., 2012) e a discussão pode ser resumida no fato de que no primeiro removeu-se a dependência da taxa de convergência da segunda derivada (Hessiana) desconhecida do mapa não-linear a ser otimizado, podendo ser então arbitrariamente atribuída. A garantia desta propriedade, mesmo na presença de atrasos, é o objetivo do presente artigo. De fato, este é um problema bastante desafiador uma vez que o ESC está relacionado com a convergência, com uma boa taxa de convergência, enquanto que atrasos, quando ignorados, restringem severamente a taxa de convergência ou desestabilizam o sistema em malha fechada.

A solução proposta para o problema em aberto, anteriormente mencionado, é dada empregando-se uma realimentação por preditor

com uma estimativa da inversa da Hessiana, desconhecida, baseada em perturbações senoidais (Ghaffari et al., 2012). A análise de estabilidade é rigorosamente construída via transformação *backstepping* (Krstić, 2009) e a teoria da média em dimensões infinitas (Hale and Lunel, 1990; Lehman, 2002), levando-se em conta o sistema por inteiro, *i.e.*, capturando o estado de dimensão infinita devido ao atraso temporal.

Na Seção 2, introduz-se o projeto do preditor para compensação do atraso na busca extremal escalar baseada em Newton. Na Seção 3, demonstra-se a estabilidade exponencial com um funcional Lyapunov-Krasovskii e a convergência em tempo real à uma pequena vizinhança do extremo desejado. A Seção 4 apresenta resultados de simulações com o intuito de ilustrar a aplicabilidade da proposta de compensação do atraso na busca extremal. Finalmente, a Seção 5 conclui o artigo.

Notações e Normas: A norma-2 de um vetor de estado $X(t)$ de dimensão finita, de uma equação diferencial ordinária (EDO), é denotada por barras simples, $|X(t)|$. Em contraste, as normas de funções (de x) são denotadas por barras duplas. Por padrão, $\|\cdot\|$ denota a norma espacial $L_2[0, D]$, *i.e.*, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2[0, D]}$. Como a variá-

vel de estado $u(x, t)$ da equação diferencial parcial (EDP), é uma função de dois argumentos, deve-se dar ênfase que levando em conta a norma de uma das variáveis faz-se à norma uma função da outra variável. Por exemplo, a norma $L_2[0, D]$ de $u(x, t)$ em $x \in [0, D]$ é $\|u(t)\| = \left(\int_0^D u^2(x, t) dx \right)^{1/2}$.

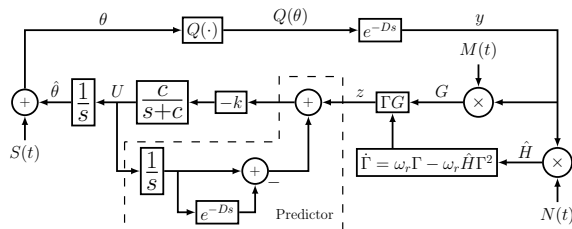


Figura 1: Diagrama em blocos do esquema de previsão para compensação de atraso na saída para busca extremal através do método de Newton.

2 Busca Extremal Baseada no Método de Newton para Sistemas com Atraso

O controle por busca extremal escalar, considera aplicações na qual a meta é maximizar (ou minimizar) a saída $y \in \mathbb{R}$ de um mapa estático não-linear $Q(\theta)$ *desconhecido*, através da variação em tempo real da entrada $\theta \in \mathbb{R}$. Aqui, admite-se que existe um atraso constante e conhecido $D \geq 0$, no atuador ou no sistema de medição tal que a saída medida é dada por

$$y(t) = Q(\theta(t - D)). \quad (1)$$

Para clarificar a notação, assume-se que o sistema está com a saída atrasada, seguindo a apresentação do diagramas em blocos. No entanto, os resultados neste artigo podem ser diretamente estendidos ao caso de entrada atrasada uma vez que qualquer atraso de entrada possa ser movido para a saída do mapa estático. O caso em que atrasos de entrada e saída (D_{in} e D_{out}) ocorrem simultaneamente pode também tratado, assumindo-se que o atraso total a ser neutralizado deva ser $D = D_{\text{in}} + D_{\text{out}}$, com $D_{\text{in}}, D_{\text{out}} \geq 0$.

Sem perda de generalidade, considera-se o problema de busca pelo máximo, tal que, o valor de θ que maximiza y é denotado por θ^* . Por motivo de simplicidade, também assume-se que o mapa não-linear é quadrático, *i.e.*,

$$Q(\theta) = y^* + \frac{H}{2}(\theta - \theta^*)^2, \quad (2)$$

no qual além das constantes $\theta^* \in \mathbb{R}$ e $y^* \in \mathbb{R}$ serem desconhecidas, o escalar $H < 0$ é a Hessiana desconhecida do mapa estático.

Na Figura 1, ilustra-se a versão escalar proposta para o controle por busca extremal baseado em

Newton através da realimentação por preditor para compensação do atraso.

2.1 Sinais e Sistemas

Substituindo-se (2) em (1), obtém-se o *o mapa quadrático e estático com atraso* de interesse:

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2}(\theta(t-D) - \theta^*)^2. \quad (3)$$

Seja $\hat{\theta}$ a estimativa de θ^* e

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^* \quad (4)$$

o erro de estimação. Da Figura 1, a *dinâmica do erro* pode ser escrita como

$$\dot{\tilde{\theta}}(t-D) = U(t-D). \quad (5)$$

Além disso, tem-se

$$G(t) = M(t)y(t), \quad \theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(t), \quad (6)$$

na qual as perturbações senoidais (*dither*) são dadas por

$$S(t) = a \sin(\omega(t + D)), \quad M(t) = \frac{2}{a} \sin(\omega t), \quad (7)$$

com amplitude a e frequência ω não-nulas. Uma vez que o atraso na saída possa ser transferido para a saída do integrador (ou, equivalentemente, para sua entrada), para propósito de análise, o deslocamento de fase $+\omega D$ é aplicado para compensar o efeito do atraso no sinal de *dither* $S(t)$ em (7).

$$\hat{H}(t) = N(t)y(t), \quad (8)$$

é aplicado para se obter uma estimativa da Hessiana H , onde o sinal de demodulação $N(t)$ é dado por

$$N(t) = -\frac{8}{a^2} \cos(2\omega t). \quad (9)$$

Em (Ghaffari et al., 2012), foi provado que a versão média de (8) é

$$\hat{H}_{av} = (Ny)_{av} = \frac{1}{\Pi} \int_0^\Pi N(\sigma) y d\sigma = H, \quad \Pi = 2\pi/\omega, \quad (10)$$

se um mapa quadrático como em (2) é considerado. Define-se o sinal mensurável

$$z(t) = \Gamma(t)G(t), \quad (11)$$

onde $\Gamma(t)$ é atualizado pela seguinte equação diferencial de Riccati (Ghaffari et al., 2012):

$$\dot{\Gamma} = \omega_r \Gamma - \omega_r \hat{H} \Gamma^2, \quad (12)$$

com $\omega_r > 0$ sendo uma constante de projeto. A equação (12) gera uma estimativa da inversa de Hessiana, evitando singularidades durante a fase transiente. O erro de estimação da inversa da Hessiana pode ser definido como

$$\tilde{\Gamma}(t) = \Gamma(t) - H^{-1}, \quad (13)$$

e sua equação dinâmica pode ser obtida a partir de (12) e (13) como

$$\dot{\tilde{\Gamma}} = \omega_r [\tilde{\Gamma} + H^{-1}] \times [1 - \hat{H}(\tilde{\Gamma} + H^{-1})]. \quad (14)$$

2.2 Realimentação via Preditor através da Estimativa da Inversa da Hessiana

Por análise da média (Krstić, 2014; Ghaffari et al., 2012), pode-se verificar de $G(t)$ em (6) e $z(t)$ em (11) que

$$z_{av}(t) = \Gamma_{av}(t)H\tilde{\theta}_{av}(t-D). \quad (15)$$

De (13), a equação (15) pode ser escrita em termos de $\tilde{\Gamma}_{av}(t) = \Gamma_{av}(t) - H^{-1}$ como

$$z_{av}(t) = \tilde{\theta}_{av}(t-D) + \tilde{\Gamma}_{av}(t)H\tilde{\theta}_{av}(t-D). \quad (16)$$

O segundo termo, no lado direito de (16), é quadrático em $(\tilde{\Gamma}_{av}, \tilde{\theta}_{av})$, então, a linearização de $\Gamma_{av}(t)$ em H^{-1} resulta na versão linearizada de (15) dada por

$$z_{av}(t) = \tilde{\theta}_{av}(t-D). \quad (17)$$

De (5) e (17), os seguintes modelos médios podem ser obtidos:

$$\dot{\tilde{\theta}}_{av}(t-D) = U_{av}(t-D), \quad (18)$$

$$\dot{z}_{av}(t) = U_{av}(t-D), \quad (19)$$

onde $U_{av} \in \mathbb{R}$ é o controle médio resultante de $U \in \mathbb{R}$.

Com a intenção de motivar o projeto da realimentação por preditor, a ideia aqui é compensar o atraso através da realimentação do estado futuro $z(t+D)$, ou $z_{av}(t+D)$ na versão média equivalente do sistema. Para se obter $z_{av}(t+D)$ com a fórmula da variação das constantes para (19), o estado futuro é descrito por

$$z_{av}(t+D) = z_{av}(t) + \int_{t-D}^t U_{av}(\sigma)d\sigma, \quad (20)$$

em termos do sinal de controle $U_{av}(\sigma)$ da janela de tempo passada $[t-D, t]$. Dado qualquer ganho estabilizante $k > 0$, o controle médio deve ser dado por

$$U_{av}(t) = -k \left[z_{av}(t) + \int_{t-D}^t U_{av}(\sigma)d\sigma \right], \quad (21)$$

resultando no controle médio $U_{av}(t) = -kz_{av}(t+D)$, $\forall t \geq 0$, como desejado. Assim, o sistema médio deve ser, $\forall t \geq D$:

$$\frac{d\tilde{\theta}_{av}(t)}{dt} = -k\tilde{\theta}_{av}(t) - k\tilde{\Gamma}_{av}(t+D)H\tilde{\theta}_{av}(t). \quad (22)$$

Como $k\tilde{\Gamma}_{av}H\tilde{\theta}_{av}$ é quadrático em $(\tilde{\Gamma}_{av}, \tilde{\theta}_{av})$, a linearização do sistema (22) tem todos seus autovalores determinados por $-k$. A estabilidade exponencial local do algoritmo pode ser garantida com taxa de convergência que é independente da Hessiana H .

Assim como em (Oliveira and Krstić, 2015), mostra-se que o objetivo de controle por preditor pode ser alcançado se uma modificação no

for feita empregando-se um filtro passa-baixas, tal que o teorema da média (*Averaging Theorem*) em dimensões infinitas (Hale and Lunel, 1990; Lehman, 2002) possa ser invocado adiante. Neste sentido, propõe-se a seguinte compensação por preditor filtrada (Krstić, 2008)

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ -k \left[z(t) + \int_{t-D}^t U(\tau)d\tau \right] \right\}, \quad (23)$$

na qual $c > 0$ é suficientemente grande, *i.e.*, a realimentação por preditor é da forma de uma filtragem passa-baixas da versão não-média de (21). Foi utilizada a notação mista do domínio do tempo e da frequência em (23) pelo uso de chaves $\{\cdot\}$ para denotar que a função de transferência age como um operador em uma função no domínio do tempo. A realimentação por preditor (23) é baseada em perturbação média porque z em (11) é atualizado de acordo com a estimativa Γ para a inversa da Hessiana desconhecida H^{-1} dada por (12), com $\hat{H}(t)$ em (8) satisfazendo a propriedade da média (10).

3 Análise de Estabilidade

O resultado principal de estabilidade e convergência para o sistema em malha fechada é dado a seguir.

Teorema 1 *Existe $c^* > 0$ tal que, $\forall c \geq c^*$, $\exists \omega^*(c) > 0$ em que, $\forall \omega > \omega^*$, o sistema atrasado em malha fechada (5) e (23), com $z(t)$ em (11), $G(t)$ em (6), $\Gamma(t)$ em (12) e estado $\tilde{\Gamma}(t)$, $\tilde{\theta}(t-D)$, $U(\sigma)$, $\forall \sigma \in [t-D, t]$, tem uma solução periódica localmente exponencialmente estável em t de período $\Pi = 2\pi/\omega$, denotada por $\tilde{\Gamma}^\Pi(t)$, $\tilde{\theta}^\Pi(t-D)$, $U^\Pi(\sigma)$, $\forall \sigma \in [t-D, t]$, satisfazendo, $\forall t \geq 0$:*

$$\left(\left| \tilde{\Gamma}^\Pi(t) \right|^2 + \left| \tilde{\theta}^\Pi(t-D) \right|^2 + \left[U^\Pi(t) \right]^2 + \int_{t-D}^t \left[U^\Pi(\tau) \right]^2 d\tau \right)^{1/2} \leq \mathcal{O}(1/\omega). \quad (24)$$

Além do mais,

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |\theta(t) - \theta^*| = \mathcal{O}(a + 1/\omega), \quad (25)$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |y(t) - y^*| = \mathcal{O}(a^2 + 1/\omega^2). \quad (26)$$

Prova: A demonstração segue os passos de 1 a 8 abaixo.

Passo 1: EDP para Representação do Atraso

De acordo com (Krstić, 2009), o atraso em (5) pode ser representado usando uma EDP de transporte como

$$\dot{\tilde{\theta}}(t-D) = u(0, t), \quad (27)$$

$$u_t(x, t) = u_x(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (28)$$

$$u(D, t) = U(t), \quad (29)$$

onde a solução de (28)–(29)  

$$u(x, t) = U(t + x - D). \quad (30)$$

Passo 2: Sistema em Malha Fechada

Primeiramente, substituindo-se $S(t)$ dado em (7) em $\theta(t)$ na equação (6), obt m-se

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + a \sin(\omega(t + D)). \quad (31)$$

Agora, coloca-se (4) e (31) em (3) tal que a saída seja dada em termos de $\tilde{\theta}$:

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2}(\tilde{\theta}(t - D) + a \sin(\omega t))^2. \quad (32)$$

Substituindo-se $M(t)$ definido por (7) em (6) e utilizando (11), obt m-se:

$$z(t) = \Gamma(t) \frac{2}{a} \sin(\omega t) y(t). \quad (33)$$

Além disto, representando o integrando em (23) usando o estado da EDP de transporte, tem-se

$$U(t) = \frac{c}{s + c} \left\{ -k \left[z(t) + \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \quad (34)$$

Depois, substitui-se (32) em (33) e então o resultado de (33) em (34), tem-se

$$\begin{aligned} U(t) = \frac{c}{s + c} \left\{ -k \left[y^* + \frac{H}{2} \tilde{\theta}^2(t - D) \right. \right. \\ \left. \left. + Ha \sin(\omega t) \tilde{\theta}(t - D) + \frac{a^2 H}{2} \sin^2(\omega t) \right] \right. \\ \left. \times \left[\Gamma(t) \frac{2}{a} \sin(\omega t) \right] - k \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Substituindo-se (35) em (29), pode-se reescrever (27)–(29) como

$$\dot{\tilde{\theta}}(t - D) = u(0, t), \quad (36)$$

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x u(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (37)$$

$$\begin{aligned} u(D, t) = \frac{c}{s + c} \left\{ -k \left[y^* + \frac{H}{2} \tilde{\theta}^2(t - D) + Ha \sin(\omega t) \tilde{\theta}(t - D) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a^2 H}{2} \sin^2(\omega t) \right] \times \left[\Gamma(t) \frac{2}{a} \sin(\omega t) \right] - k \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right\} \\ = \frac{c}{s + c} \left\{ -k \left[\Gamma(t) y^* \frac{2}{a} \sin(\omega t) + \Gamma(t) \frac{H}{a} \tilde{\theta}^2(t - D) \sin(\omega t) \right. \right. \\ \left. \left. + 2\Gamma(t) H \sin^2(\omega t) \tilde{\theta}(t - D) + \Gamma(t) a H \sin^3(\omega t) + \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\} \\ = \frac{c}{s + c} \left\{ -k \left[\Gamma(t) y^* \frac{2}{a} \sin(\omega t) + \Gamma(t) \frac{H}{a} \tilde{\theta}^2(t - D) \sin(\omega t) \right. \right. \\ \left. \left. + \Gamma(t) H \tilde{\theta}(t - D) - \Gamma(t) H \cos(2\omega t) \tilde{\theta}(t - D) + \frac{3aH}{4} \Gamma(t) \sin(\omega t) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{aH}{4} \Gamma(t) \sin(3\omega t) + \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Passo 3: Modelo Médio do Sistema em Malha Fechada

A versão média do sistema (36)–(38)  :

$$\dot{\tilde{\theta}}_{av}(t - D) = u_{av}(0, t), \quad (39)$$

$$\partial_t u_{av}(x, t) = \partial_x u_{av}(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (40)$$

$$u_{av}(D, t) = \frac{c}{s + c} \left\{ -k \left[\Gamma_{av}(t) H \tilde{\theta}_{av}(t - D) + \int_0^D u_{av}(\sigma, t) d\sigma \right] \right\} \quad (41)$$

De (15) e (16) pode-se concluir que a linearização de $\Gamma_{av}(t)$ em H^{-1} resulta na versão linearizada de (15) dada por (17), i.e., $z_{av}(t) = \tilde{\theta}_{av}(t - D)$. Então, o termo $\Gamma_{av}(t) H \tilde{\theta}_{av}(t - D)$ em (41) pode ser substituído por $\tilde{\theta}_{av}(t - D)$ no modelo linearizado. Agora, denotando-se

$$\tilde{\vartheta}(t) = \tilde{\theta}(t - D), \quad (42)$$

tem-se $\tilde{\vartheta}_{av}(t) = z_{av}(t) = \tilde{\theta}_{av}(t - D)$ e a seguinte versão média linearizada do sistema (36)–(38) pode ser obtida:

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_{av}(t) = u_{av}(0, t), \quad (43)$$

$$\partial_t u_{av}(x, t) = \partial_x u_{av}(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (44)$$

$$\frac{d}{dt} u_{av}(D, t) = -c u_{av}(D, t) - ck \left[\tilde{\vartheta}_{av}(t) + \int_0^D u_{av}(\sigma, t) d\sigma \right] \quad (45)$$

onde o filtro $c/(s + c)$ está também representado na forma do espaço de estado. A solução da EDP de transporte (44)–(45)   dada por $u_{av}(x, t) = U_{av}(t + x - D)$. Por outro lado, o modelo médio para a estimativa do erro associada a inversa da Hessiana em (14)   $\frac{d\tilde{\Gamma}_{av}(t)}{dt} = -\omega_r \tilde{\Gamma}_{av}(t) - \omega_r H \tilde{\Gamma}_{av}^2(t)$ e sua versão linearizada   descrita por

$$\frac{d\tilde{\Gamma}_{av}(t)}{dt} = -\omega_r \tilde{\Gamma}_{av}(t). \quad (46)$$

Passo 4: Transformação backsteeping, sua inversa e o sistema alvo

Considere a transformação backsteeping de dimensão infinita do estado do atraso

$$w(x, t) = u_{av}(x, t) + k \left[\tilde{\vartheta}_{av}(t) + \int_0^x u_{av}(\sigma, t) d\sigma \right], \quad (47)$$

que mapeia o sistema (43)–(45) no sistema alvo:

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_{av}(t) = -k \tilde{\vartheta}_{av}(t) + w(0, t), \quad (48)$$

$$w_t(x, t) = w_x(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (49)$$

$$w(D, t) = -\frac{1}{c} \partial_t u_{av}(D, t). \quad (50)$$

Utilizando-se (47) para $x = D$ e o fato de que $u_{av}(D, t) = U_{av}(t)$, a partir de (50) obt m-se (45), i.e.,

$$U_{av}(t) = \frac{c}{s + c} \left\{ -k \left[\tilde{\vartheta}_{av}(t) + \int_0^D u_{av}(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \quad (51)$$

Considerando-se $w(D, t)$,   fácil mostrar que

$$w_t(D, t) = \partial_t u_{av}(D, t) + k u_{av}(D, t), \quad (52)$$

onde $\partial_t u_{av}(D, t) = \dot{U}_{av}(t)$. A inversa de (47)   dada por

$$u_{av}(x, t) = w(x, t) - k \left[e^{-kx} \tilde{\vartheta}_{av}(t) + \int_0^x e^{-k(x-\sigma)} w(\sigma, t) d\sigma \right]. \quad (53)$$

Substituindo-se (50) e (53) em (52), obt m-se

$$w_t(D, t) = -cw(D, t) + kw(D, t) - k^2 \left[e^{-kD} \tilde{\vartheta}_{av}(t) + \int_0^D e^{-k(D-\sigma)} w(\sigma, t) d\sigma \right]. \quad (54)$$

Passo 5: Funcional de Lyapunov-Krasovskii

Considere o seguinte funcional de Lyapunov:

$$V(t) = \frac{\tilde{\vartheta}_{av}^2(t)}{2} + \frac{a}{2} \int_0^D (1+x) w^2(x, t) dx + \frac{1}{2} w^2(D, t), \quad (55)$$

onde o parâmetro $a > 0$ será escolhido mais adiante. Tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -k \tilde{\vartheta}_{av}^2(t) + \tilde{\vartheta}_{av}(t) w(0, t) \\ &+ a \int_0^D (1+x) w(x, t) w_x(x, t) dx + w(D, t) w_t(D, t) \\ &= -k \tilde{\vartheta}_{av}^2(t) + \tilde{\vartheta}_{av}(t) w(0, t) + \frac{a(1+D)}{2} w^2(D, t) \\ &- \frac{a}{2} w^2(0, t) - \frac{a}{2} \int_0^D w^2(x, t) dx + w(D, t) w_t(D, t) \\ &\leq -k \tilde{\vartheta}_{av}^2(t) + \frac{\tilde{\vartheta}_{av}^2(t)}{2a} - \frac{a}{2} \int_0^D w^2(x, t) dx \\ &+ w(D, t) \left[w_t(D, t) + \frac{a(1+D)}{2} w(D, t) \right]. \end{aligned}$$

Lembrando-se que $k > 0$, escolhe-se $a = 1/k$. Ent o,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\frac{k}{2} \tilde{\vartheta}_{av}^2(t) - \frac{1}{2k} \int_0^D w^2(x, t) dx \\ &+ w(D, t) \left[w_t(D, t) + \frac{(1+D)}{2k} w(D, t) \right] \\ &= -\frac{1}{2a} \tilde{\vartheta}_{av}^2(t) - \frac{a}{2} \int_0^D w^2(x, t) dx \\ &+ w(D, t) \left[w_t(D, t) + \frac{a(1+D)}{2} w(D, t) \right]. \end{aligned} \quad (56)$$

Agora, considera-se (56) juntamente com (54). Completando-se os quadrados e lembrando-se que $|w(D, t)| \|k^2 e^{-k(D-\sigma)}\| \|w(t)\| \leq \frac{a}{4} \|w(t)\|^2 + \frac{1}{a} \|k^2 e^{-k(D-\sigma)}\|^2 w^2(D, t)$, pelo uso das inequações de Cauchy-Schwartz e de Young, obt m-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\frac{1}{4a} \tilde{\vartheta}_{av}^2(t) - \frac{a}{4} \int_0^D w^2(x, t) dx \\ &+ a \left| k^2 e^{-kD} \right|^2 w^2(D, t) + \frac{1}{a} \left\| k^2 e^{-k(D-\sigma)} \right\|^2 w^2(D, t) \\ &+ \left[\frac{a(1+D)}{2} + k \right] w^2(D, t) - cw^2(D, t). \end{aligned} \quad (57)$$

A partir de (57), chega-se a

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\frac{1}{4a} \tilde{\vartheta}_{av}^2(t) - \frac{a}{4(1+D)} \int_0^D (1+x) w^2(x, t) dx \\ &- (c - c^*) w^2(D, t), \end{aligned} \quad (58)$$

onde $c^* = \frac{a(1+D)}{2} + k + a \left| k^2 e^{-kD} \right|^2 + \frac{1}{a} \left\| k^2 e^{-k(D-\sigma)} \right\|^2$. Portanto, a partir de (58), se c é escolhido tal que $c > c^*$, obt m-se

$$\dot{V}(t) \leq -\mu V(t), \quad (59)$$

para algum $\mu > 0$. Com isso, o sistema em malha fechada é exponencialmente estável no sentido da norma completa do estado

$$\left(|\tilde{\vartheta}_{av}(t)|^2 + \int_0^D w^2(x, t) dx + w^2(D, t) \right)^{1/2}, \quad (60)$$

i.e., na variável transformada $(\tilde{\vartheta}_{av}, w)$.

Passo 6: Estabilidade Exponencial (na norma L_2) para o Sistema Médio (43)–(45)

Para se obter a estabilidade exponencial do sistema médio com relação à norma $\left(|\tilde{\vartheta}_{av}(t)|^2 + \int_0^D u_{av}^2(x, t) dx + u_{av}^2(D, t) \right)^{1/2}$, precisa-se mostrar que existem números positivos α_1 e α_2 tais que $\alpha_1 \Psi(t) \leq V(t) \leq \alpha_2 \Psi(t)$, onde $\Psi(t) \triangleq |\tilde{\vartheta}_{av}(t)|^2 + \int_0^D u_{av}^2(x, t) dx + u_{av}^2(D, t)$, ou equivalentemente,

$$\Psi(t) \triangleq |\tilde{\theta}_{av}(t-D)|^2 + \int_{t-D}^t U_{av}^2(\tau) d\tau + U_{av}^2(t), \quad (61)$$

usando-se (42). Isto é estabelecido diretamente usando-se (47), (53), (55) e empregando-se a desigualdade de Cauchy-Schwartz e outros cálculos, como na prova do Teorema 2.1 em (Krsti , 2009). Portanto, com (59), tem-se

$$\Psi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} e^{-\mu t} \Psi(0), \quad (62)$$

que completa a prova da estabilidade exponencial.

Passo 7: Invocando o Teorema da Média

Primeiro, nota-se que o sistema em malha fechada (5), (23) e (14) pode ser reescrito como:

$$\dot{\tilde{\theta}}(t-D) = U(t-D), \quad (63)$$

$$\dot{U}(t) = -cU(t) - ck \left[z(t) + \int_{t-D}^t U(\tau) d\tau \right], \quad (64)$$

$$\dot{\tilde{\Gamma}}(t) = \omega_r [\tilde{\Gamma}(t) + H^{-1}] \times [1 - \hat{H}(t)(\tilde{\Gamma}(t) + H^{-1})]. \quad (65)$$

onde $\xi(t) = [\tilde{\theta}(t-D), U(t), \tilde{\Gamma}(t)]^T$ é o vetor de estado. Além do mais, de (11), (6) e (8), tem-se

$$\dot{\xi}(t) = f(\omega t, \xi_t), \quad (66)$$

onde $\xi_t(\Theta) = \xi(t+\Theta)$ para $-D \leq \Theta \leq 0$ e f é uma função contínua apropriada, de maneira que o teorema da média dado por (Hale and Lunel, 1990) e (Lehman, 2002) pode ser diretamente aplicado considerando $\omega = 1/\epsilon$.

Pode-se concluir que o equilíbrio $\tilde{\Gamma}_{av}(t) = 0$ do sistema do erro linearizado (46) é exponencialmente estável, uma vez que $\omega_r > 0$. Adicionalmente, a partir de (62), a origem do sistema médio em malha fechada (43)–(45) com EDP de transporte para representação do atraso é também exponencialmente estável. Então, existe constantes positivas α e β tais que todas soluções satisfazem $\Upsilon(t) \leq \alpha e^{-\beta t} \Upsilon(0)$, $\forall t \geq 0$, onde $\Upsilon(t) \triangleq |\tilde{\Gamma}_{av}(t)|^2 + |\tilde{\theta}_{av}(t-D)|^2 + U_{av}^2(t) + \int_{t-D}^t U_{av}^2(\tau) d\tau$. Então, de acordo com o teorema da média (Hale and Lunel, 1990; Lehman, 2002), para ω suficientemente grande, (36)–(38) tem uma única solução exponencialmente estável ao redor de seu equilíbrio (a origem) satisfazendo (24).

Passo 8: *Convergência Assintótica a uma Vizinhança do Extremo* (θ^*, y^*)

Utilizando-se a mudança de variável (42) e então integrando-se ambos os lados de (27) dentro do intervalo $[t, \sigma + D]$, tem-se:

$$\tilde{\vartheta}(\sigma + D) = \tilde{\vartheta}(t) + \int_t^{\sigma+D} u(0, s) ds. \quad (67)$$

De (30), pode-se reescrever (67) em termos de U

$$\tilde{\vartheta}(\sigma + D) = \tilde{\vartheta}(t) + \int_{t-D}^{\sigma} U(\tau) d\tau. \quad (68)$$

Agora, nota-se que

$$\tilde{\theta}(\sigma) = \tilde{\vartheta}(\sigma + D), \quad \forall \sigma \in [t-D, t]. \quad (69)$$

Com isso,

$$\tilde{\theta}(\sigma) = \tilde{\theta}(t-D) + \int_{t-D}^{\sigma} U(\tau) d\tau, \quad \forall \sigma \in [t-D, t]. \quad (70)$$

Aplicando-se a norma suprema em ambos os lados de (70), tem-se

$$\begin{aligned} \sup_{t-D \leq \sigma \leq t} |\tilde{\theta}(\sigma)| &= \sup_{t-D \leq \sigma \leq t} |\tilde{\theta}(t-D)| + \sup_{t-D \leq \sigma \leq t} \left| \int_{t-D}^{\sigma} U(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \sup_{t-D \leq \sigma \leq t} |\tilde{\theta}(t-D)| + \sup_{t-D \leq \sigma \leq t} \int_{t-D}^t |U(\tau)| d\tau \\ &\leq |\tilde{\theta}(t-D)| + \int_{t-D}^t |U(\tau)| d\tau \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq |\tilde{\theta}(t-D)| + \left(\int_{t-D}^t d\tau \right)^{1/2} \left(\int_{t-D}^t |U(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \\ &\leq |\tilde{\theta}(t-D)| + \sqrt{D} \left(\int_{t-D}^t U^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (71)$$

Agora é fácil checar que

$$|\tilde{\theta}(t-D)| \leq \left(|\tilde{\theta}(t-D)|^2 + \int_{t-D}^t U^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}, \quad (72)$$

$$\left(\int_{t-D}^t U^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \leq \left(|\tilde{\theta}(t-D)|^2 + \int_{t-D}^t U^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}. \quad (73)$$

Usando-se (72) e (73), obtém-se

$$\begin{aligned} |\tilde{\theta}(t-D)| + \sqrt{D} \left(\int_{t-D}^t U^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} &\leq \\ (1 + \sqrt{D}) \left(|\tilde{\theta}(t-D)|^2 + \int_{t-D}^t U^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (74)$$

De (71), conclui-se diretamente que

$$\sup_{t-D \leq \sigma \leq t} |\tilde{\theta}(\sigma)| \leq (1 + \sqrt{D}) \left(|\tilde{\theta}(t-D)|^2 + \int_{t-D}^t U^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \quad (75)$$

e, conseqüentemente,

$$|\tilde{\theta}(t)| \leq (1 + \sqrt{D}) \left(|\tilde{\theta}(t-D)|^2 + \int_{t-D}^t U^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}. \quad (76)$$

A desigualdade (76) pode ser dada em termos da solução periódica $\tilde{\theta}^\Pi(t-D)$, $U^\Pi(\sigma)$, $\forall \sigma \in [t-D, t]$ como segue

$$\begin{aligned} |\tilde{\theta}(t)| &\leq (1 + \sqrt{D}) \left(|\tilde{\theta}(t-D) - \tilde{\theta}^\Pi(t-D) + \tilde{\theta}^\Pi(t-D)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_{t-D}^t [U(\tau) - U^\Pi(\tau) + U^\Pi(\tau)]^2 d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (77)$$

Aplicando-se a desigualdade de Young e alguma álgebra, o lado direito de (77) e $|\tilde{\theta}(t)|$ pode ser majorado por

$$\begin{aligned} |\tilde{\theta}(t)| &\leq \sqrt{2} (1 + \sqrt{D}) \left(|\tilde{\theta}(t-D) - \tilde{\theta}^\Pi(t-D)|^2 \right. \\ &\quad \left. + |\tilde{\theta}^\Pi(t-D)|^2 + \int_{t-D}^t [U(\tau) - U^\Pi(\tau)]^2 d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_{t-D}^t [U^\Pi(\tau)]^2 d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (78)$$

Do teorema da média (Hale and Lunel, 1990; Lehman, 2002), tem-se que $\tilde{\theta}(t-D) - \tilde{\theta}^\Pi(t-D) \rightarrow 0$ e $\int_{t-D}^t [U(\tau) - U^\Pi(\tau)]^2 d\tau \rightarrow 0$, exponencialmente. Portanto,

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{\theta}(t)| &= \sqrt{2} (1 + \sqrt{D}) \times \left(|\tilde{\theta}^\Pi(t-D)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_{t-D}^t [U^\Pi(\tau)]^2 d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (79)$$

De (24) e (79), conclui-se que $\limsup_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{\theta}(t)| = \mathcal{O}(1/\omega)$. De (4) e lembrando-se que $\theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(t)$ com $S(t) = a \sin(\omega(t+D))$, tem-se que $\theta(t) - \theta^* = \tilde{\theta}(t) + S(t)$. Uma vez que o primeiro termo do lado direito da última equação é de ordem $\mathcal{O}(1/\omega)$ e o segundo termo é de ordem $\mathcal{O}(a)$, então $\limsup_{t \rightarrow +\infty} |\theta(t) - \theta^*| = \mathcal{O}(a + 1/\omega)$. Finalmente, a partir de (3), tem-se (26). $\square$

4 Simulações Numéricas

Com o intuito de avaliar a compensação do atraso proposta na busca extremal, o seguinte mapa estático é considerado

$$Q(\theta) = 5 - 0.1(\theta - 2)^2, \quad (80)$$

sujeito a uma saída atrasada de $D = 5$ s. De acordo com (80), o ponto extremo é $(\theta^*, y^*) = (2, 5)$ e a Hessiana do mapa é $H = -2$. No que se segue, simulações numéricas do preditor (23) são apresentadas onde $c = 20$, z é dado por (11) com G em (6) e Γ em (12). Para os testes utilizam-se os seguintes parâmetros: $a = 0.2$, $\omega = 10$, $k = 0.2$, $\omega_h = \omega_l = 1$, $\theta(0) = -5$, $\Gamma(0) = -1$ e $\omega_r = 0.1$.

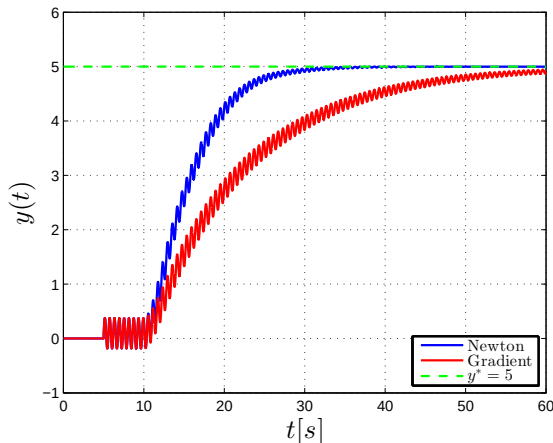


Figura 2: Busca Extremal por Newton versus Busca Extremal Gradiente, ambas na presença de atraso: tempo de resposta da saída $y(t)$ sujeita a um atraso de $D = 5$ s.

Com a intenção de fazer uma comparação justa, todos os parâmetros em comum são exatamente os mesmos para a apresentação das simulações de compensação de atraso na busca extremal por Newton e pelo Gradiente, esta última introduzida por (Oliveira and Krstić, 2015). A Figura 2 ilustra a convergência para o máximo para ambas abordagens. Como esperado, para o algoritmo de Newton converge ao extremo de maneira mais rápida do que o esquema com Gradiente, mesmo na presença de atrasos.

Agradecimentos

Os autores agradecem as agências de fomento CAPES, CNPq e FAPERJ pelo apoio financeiro.

5 Conclusões

Uma nova estratégia de realimentação via preditor baseada em perturbações e estimativa da inversa da Hessiana é introduzida para lidar com atrasos na entrada e/ou saída na malha de controle de controladores por busca extremal através do

método de Newton. A abordagem resultante preserva a estabilidade exponencial e a convergência da saída do sistema a uma pequena vizinhança do ponto extremo, mesmo na presença de atrasos nos atuadores e sensores. Uma demonstração rigorosa é dada explorando a transformação *backstepping* e o teorema da média em dimensões infinitas. A taxa de convergência pelo método de Newton é independente da Hessiana, enquanto que a convergência pelo método do Gradiente é ditada pela mesma (Oliveira and Krstić, 2015). Em outras palavras, a compensação do atraso pode ser alcançada com uma taxa de convergência atribuída de maneira arbitrária, melhorando-se assim a desempenho do controlador. A generalização para o caso multivariável com atrasos distintos na entrada é apresentada em (Oliveira et al., 2016).

Referências

- Ghaffari, A., Krstić, M. and Nesić, D. (2012). Multivariable Newton-based extremum seeking, *Automatica* **48**: 1759–1767.
- Hale, J. K. and Lunel, S. M. V. (1990). Averaging in infinite dimensions, *Journal of Integral Equations and Applications* **2**: 463–494.
- Krstić, M. (2008). Lyapunov tools for predictor feedbacks for delay systems: inverse optimality and robustness to delay mismatch, *Automatica* **44**: 2930–2935.
- Krstić, M. (2009). *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*, Birkhäuser.
- Krstić, M. (2014). Extremum seeking control, in *T. Samad and J. Baillieul, Encyclopedia of Systems and Control*, Springer.
- Lehman, B. (2002). The influence of delays when averaging slow and fast oscillating systems: overview, *IMA Journal of Mathematical Control and Information* **19**: 201–215.
- Oliveira, T. R. and Krstić, M. (2015). Gradient extremum seeking with delays, *IFAC Workshop on Time Delay Systems*, Ann Arbor, pp. 227–232.
- Oliveira, T. R., Krstić, M. and Tsubakino, D. (2016). Extremum seeking for static maps with delays, *IEEE Transactions on Automatic Control* DOI: 10.1109/TAC.2016.2564958.