

SOBRE O CONTROLE CHAVEADO DE SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS COM SATURAÇÃO NO ATUADOR

UILIAM NELSON LENDZION TOMAZ ALVES*, MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA*, DIOGO RAMALHO DE OLIVEIRA*, RODRIGO CARDIM*, EDVALDO ASSUNÇÃO*

*Laboratório de Pesquisa em Controle, UNESP - Univ Estadual Paulista, Departamento de Engenharia Elétrica. Avenida Carlos Rossi, nº 1370, 15.385-000, Ilha Solteira - São Paulo, Brasil.

Emails: uiliamlendzionalves@gmail.com, marcelo@dee.feis.unesp.br, diogo_oliveira6@hotmail.com, rcardim@dee.feis.unesp.br, edvaldo@dee.feis.unesp.br

Abstract— In this paper the Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy model is used as tool for the switched control design of a class of uncertain nonlinear systems considering the actuator saturation. The proposed switched control ensures a specified decay rate and allows the control of uncertain plants (uncertain T-S fuzzy models), because the membership functions of the model are not used in the implementation of the control signal. It is assumed that the controlled system should remain in a region of operation previously established and it is subject to actuator saturation. It was empirically observed that, using an available control design method, if the specified decay rate increases, then the allowed norm of the initial state vector decreases. This paper then proposes the use of stages in the control strategy, allowing to conciliate initial conditions with higher norms (requiring for them lower decay rates) and higher decay rates in regions close to the origin. This paper also presents an implementation of the proposed control strategy in a Quanser® *Ball Balancer* system. The results show the effectiveness of the proposed control.

Keywords— Control of uncertain nonlinear systems, Switched control, Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy models, Actuator saturation, *Ball Balancer* system.

Resumo— Neste trabalho utiliza-se o modelo fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) como ferramenta para o projeto de controle chaveado para uma classe de sistemas não lineares incertos, considerando saturação do atuador. O controle chaveado utilizado assegura uma taxa de decaimento especificada e permite o controle de plantas incertas (modelos fuzzy T-S incertos), pois as funções de pertinência do modelo não compõem o sinal de controle. Considera-se que o sistema controlado deve permanecer em uma região de operação previamente estabelecida e que está sujeito à saturação no atuador. Observou-se empiricamente, usando um procedimento de projeto disponível, que maiores taxas de decaimento permitiam garantir teoricamente as condições especificadas para estados iniciais com menores normas. Este trabalho então propõe a utilização de estágios na estratégia de controle, permitindo conciliar condições iniciais com maiores normas (exigindo para elas menores taxas de decaimento) e maiores taxas de decaimento em regiões próximas à origem. Apresenta-se a implementação da estratégia de controle proposta em um sistema *Ball Balancer* Quanser®. Os resultados obtidos mostram a eficácia da proposta de controle.

Palavras-chave— Controle de sistemas não lineares incertos, Controle chaveado, Modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S), Saturação no atuador, Sistema *Ball Balancer*.

1 Introdução

A representação exata de uma classe de sistemas não lineares em um contexto local por modelos fuzzy T-S (Taniguchi et al., 2001; Santim et al., 2012) possibilita o projeto de controle do sistema não linear através de seu modelo fuzzy T-S exato, contanto que o sistema permaneça na região de operação em que é exatamente representado pelo modelo.

No procedimento para a representação exata de um sistema não linear por modelo fuzzy T-S, as funções de pertinência obtidas podem depender de parâmetros incertos do sistema, e, por consequência, não estarem disponíveis para compor a lei de controle. Neste caso pode-se utilizar o controle chaveado proposto por Souza et al. (2014), que não utiliza as funções de pertinência do modelo fuzzy T-S.

Um problema bastante comum em aplicações práticas é a saturação no atuador. Neste caso o sinal de controle sujeito à saturação pode ser representado por uma combinação convexa em certa região no espaço de estados (Hu et al., 2002; Yong-Yan Cao and Zongli Lin, 2003). Esta aborda-

gem foi aplicada ao controle chaveado (Souza et al., 2014) sujeito à saturação em Alves et al. (2016).

Este trabalho apresenta a primeira implementação prática de resultados recentemente publicados em Alves et al. (2016) para controle local de sistemas não lineares incertos sujeitos à saturação no atuador. A implementação foi realizada em um sistema *Ball Balancer* Quanser® (descrito na Seção 4) que apresenta não linearidade e saturação no atuador (Quanser Innovate Educate, 2008a). De modo a conseguir bom desempenho do sistema frente a distúrbios e não linearidades não modeladas, a teoria previamente publicada (Alves et al., 2016) é estendida de modo a garantir maior taxa de decaimento em uma região “próxima” do ponto de equilíbrio, que contém estados iniciais com menores normas. Para isto é proposta a utilização de estágios no controle, com metodologia descrita na Seção 5, permitindo conciliar condições iniciais $x(0)$ com maiores normas (exigindo para elas menores taxas de decaimento) e maiores taxas de decaimento em regiões próximas à origem (menores normas de $x(0)$).

Not   o: Defini-se o conjunto $\mathbb{I}_r = \{1, 2, \dots, r\}$. Denota-se a combinação convexa dos vetores a_i , $\forall i \in \mathbb{I}_r$, por $co\{a_1, \dots, a_r\}$. $|z|$ representa o valor absoluto de um número real z e $\|x\|$ denota a norma euclidiana do vetor x . $M_{(l)}$ representa a l -ésima linha de uma matriz M . $\text{diag}\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ denota uma matriz bloco-diagonal cujos elementos diagonais são $M_1, M_2, \dots, M_n$. ‘arg* min $_{i \in \mathbb{I}_r} \{h_i\}$ ’ é a not  o utilizada para representar o menor  ndice $j \in \mathbb{I}_r$ tal que, para o conjunto $\{h_1, \dots, h_r\}$, $h_j = \min_{i \in \mathbb{I}_r} \{h_i\}$. Utiliza-se $\alpha_i(x(t)) = \alpha_i$. I corresponde a uma matriz identidade de ordem adequada.

2 Definições Preliminares

Nesta seção são definidos alguns conjuntos úteis no contexto deste artigo. A região de operação estipulada para o sistema não linear a ser controlado é definida como (Klug et al., 2015)

$$\mathcal{X} \triangleq \{x(t) \in \mathbb{R}^n : |N_{(h)}x(t)| \leq \phi_h, h \in \mathbb{I}_p\}, \quad (1)$$

sendo $N = \begin{bmatrix} N_{(1)}^T & N_{(2)}^T & \dots & N_{(p)}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $\phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_p]^T \in \mathbb{R}^p$ conhecidos.

O conjunto $\mathcal{L}(H_j)$ é definido para um vetor conhecido $\rho = [\rho_1 \ \dots \ \rho_m]^T \in \mathbb{R}^m$ como (Hu et al., 2002; Yong-Yan Cao and Zongli Lin, 2003)

$$\mathcal{L}(H_j) \triangleq \{x(t) \in \mathbb{R}^n : |H_{j(l)}x(t)| \leq \rho_l, \forall (l, j) \in \mathbb{I}_m \times \mathbb{I}_r\}, \quad (2)$$

sendo $H_j = \begin{bmatrix} H_{j(1)}^T & \dots & H_{j(m)}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $j \in \mathbb{I}_r$.

Dada uma matriz $0 < P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e um escalar $\delta > 0$, defini-se a seguinte região no espaço de estados (Hu et al., 2002; Yong-Yan Cao and Zongli Lin, 2003):

$$\mathcal{E}(P, \delta) \triangleq \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(t)^T P x(t) \leq \delta\}. \quad (3)$$

Defini-se ainda o conjunto de matrizes $\mathcal{D}$ como (Hu et al., 2002; Yong-Yan Cao and Zongli Lin, 2003)

$$\mathcal{D} \triangleq \{D \in \mathbb{R}^{m \times m} : d_{ii} = 0 \text{ ou } 1 \text{ e } d_{ij} = 0 \ \forall i \neq j\}, \quad (4)$$

sendo d_{ij} , $\forall (i, j) \in \mathbb{I}_m \times \mathbb{I}_m$, os elementos da matriz D . Observe que o conjunto $\mathcal{D}$ (4) possui 2^m matrizes. As matrizes que compõem este conjunto são denominadas D_s , $s \in \mathbb{I}_{2^m}$. Apenas para exemplificar, para $m = 2$, tem-se $\mathcal{D} = \{D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\}$.

3 Projeto de um controlador chaveado

Considere um sistema não linear incerto sujeito   saturação no atuador descrito por

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n f_{ij}(x(t))x_j(t) + \sum_{k=1}^m g_{ik}(x(t))\text{sat}_k(u_k(t)), \quad (5a)$$

$$\text{sat}_k(u_k(t)) = \text{sgn}(u_k(t)) \min\{\rho_k, |u_k(t)|\}, \quad (5b)$$

sendo $x_i(t)$, $i \in \mathbb{I}_n$, as variáveis de estado do sistema, $u_k(t)$, $k \in \mathbb{I}_m$, os sinais de controle, $f_{ij}(\cdot)$, $(i, j) \in \mathbb{I}_n \times \mathbb{I}_n$, e $g_{ik}(\cdot)$, $(i, k) \in \mathbb{I}_n \times \mathbb{I}_m$, funções não lineares contínuas, $\rho = [\rho_1 \ \dots \ \rho_m]^T \in \mathbb{R}^m$, um vetor conhecido, sendo $\rho_i > 0$, $i \in \mathbb{I}_m$. Supondo que (5) esteja restrito a uma região de operação $\mathcal{X}$ (1) e que suas incertezas pertençam a intervalos conhecidos, ele pode ser exatamente representado por um modelo fuzzy T-S incerto (Taniguchi et al., 2001; Santim et al., 2012)

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)\text{sat}(u(t)), \quad (6)$$

sendo $x(t) = [x_1(t) \ \dots \ x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_r]^T \in \mathbb{R}^r$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$ e incerto, $i \in \mathbb{I}_r$, $[A(\alpha) \ B(\alpha)] = \sum_{i=1}^r \alpha_i [A_i \ B_i]$, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\text{sat}(u(t)) = [\text{sat}_1(u_1(t)) \ \dots \ \text{sat}_m(u_m(t))]^T \in \mathbb{R}^m$, $\text{sat}_k(u_k(t))$ dado em (5b), $u(t) = [u_1(t) \ \dots \ u_m(t)]^T \in \mathbb{R}^m$.

Utiliza-se neste trabalho a lei de controle chaveada (Souza et al., 2014)

$$u(t) = -K_\varphi x(t), \ \varphi = \arg^* \min_{i \in \mathbb{I}_r} \{x(t)^T Q_i x(t)\}, \quad (7)$$

sendo $\varphi \in \mathbb{I}_r$ e Q_i , $i \in \mathbb{I}_r$, matrizes simétricas obtidas no procedimento de projeto.

Teorema 1 (Alves et al. (2016)) *Considere um sistema não linear incerto (5) em uma região de operação $\mathcal{X}$ (1) na qual é exatamente descrito por (6), sendo $\rho \in \mathbb{R}^m$, $\phi \in \mathbb{R}^p$ e $N \in \mathbb{R}^{p \times n}$ conhecidos. Suponha que existam matrizes simétricas $0 < X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{Q}_i$ e $\bar{Z}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes G_j e $M_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$, e um escalar $\beta > 0$, tais que*

$$A_i X + X A_i^T + \bar{Z}_i + \bar{Q}_i + 2\beta X < 0, \quad (8a)$$

$$B_i U + U^T B_i^T - \bar{Z}_i - \bar{Q}_j \leq 0, \quad (8b)$$

$$\begin{bmatrix} \rho_l^2 & G_{j(l)} \\ G_{j(l)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \phi_h^2 & N_{(h)}X \\ X N_{(h)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (8c)$$

sendo $U = [-D_s M_j + D_s^- G_j]$, sejam satisfeitas $\forall i$ e $j \in \mathbb{I}_r$, $l \in \mathbb{I}_m$, $h \in \mathbb{I}_p$, $s \in \mathbb{I}_{2^m}$, $D_s \in \mathcal{D}$ e $D_s^- = I - D_s$. Então, a lei de controle (7) com $K_i = M_i X^{-1}$ e $Q_i = X^{-1} \bar{Q}_i X^{-1} \ \forall i \in \mathbb{I}_r$, torna o ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ do sistema não linear (5) localmente assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a β para todo $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$ (3), sendo $P = X^{-1}$. Adicionalmente, $x(t) \in \mathcal{X}$ para $t \geq 0$.

Prova: Veja Alves et al. (2016). $\square$

Caso as condições do Teorema 1 sejam satisfeitas, fica garantida a estabilidade local do sistema controlado (5)-(7) com taxa de decaimento β para toda condição inicial $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$. Neste contexto, é interessante exigir que um conjunto de condições iniciais de interesse $\mathfrak{X} \subset$

$\mathcal{E}(P, 1)$ e, portanto, para qualquer condição inicial $x(0) \in \mathfrak{X}$ tenha-se $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$. Seja $\mathfrak{X} = \varpi \text{co}\{v_1, \dots, v_L\}$, $\varpi > 0$, então a condição $\mathfrak{X} \subset \mathcal{E}(P, 1)$ é assegurada caso

$$\begin{bmatrix} \varpi^{-2} & v_\ell^T \\ v_\ell & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (9)$$

seja satisfeita $\forall \ell \in \mathbb{L}_L$. Observe que ϖ é um fator de escala do conjunto $\text{co}\{v_1, \dots, v_L\}$ (Boyd et al., 1994; Hu et al., 2002; Yong-Yan Cao and Zongli Lin, 2003).

A norma dos controladores pode ser diminuída aumentando a região $\xi \mathcal{L}(K_i) \subset \mathcal{E}(P, 1)$, $0 < \xi \in \mathbb{R}$, na qual a saturação não ocorre (veja a definição dada em (2)). Neste sentido, é possível restringir a norma dos controladores impondo também que

$$\begin{bmatrix} \xi^{-2} \rho_l^2 & M_{i(l)} \\ M_{i(l)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (10)$$

seja satisfeita para um valor adequado de ξ e $\forall (i, l) \in \mathbb{I}_r \times \mathbb{I}_m$. Quanto maior o valor de ξ , maior será a norma de $x(0)$ admissível em $\xi \mathcal{L}(K_i) \subset \mathcal{E}(P, 1)$ e menor será a norma dos ganhos K_i (Alves et al., 2016). Observe que, pré e pós multiplicando (10) por $\text{diag}\{I, P\}$ e aplicando o complemento de Schur em relação à primeira linha e coluna, sem esquecer que $M_{i(l)} = K_{i(l)} X$, segue que $K_{i(l)}^T \xi^2 K_{i(l)} \leq \rho_l^2 P$ e assim $(x(t)^T K_{i(l)}^T \xi)(\xi K_{i(l)} x(t)) \leq \rho_l^2 x(t)^T P x(t)$. Para qualquer $x(t) \in \mathcal{E}(P, 1)$ tem-se $(K_{i(l)} x(t) \xi)^T (K_{i(l)} x(t) \xi) \leq \rho_l^2$, ou seja, $|\xi K_{i(l)} x(t)| \leq \rho_l$. Por isto, mantendo-se $x(t)$, quanto maior o valor de ξ , menor o valor de $\|K_{i(l)}\|$.

4 Sistema *Ball Balancer* Quanser®

O sistema *Ball Balancer* Quanser® possui uma placa montada sobre dois servomotores. O objetivo é movimentar a placa através do acionamento dos servomotores de modo que uma bola sobre a placa permaneça em uma posição específica ou percorra uma certa trajetória. A posição da bola é medida por uma câmera localizada acima da placa. Uma foto do sistema *Ball Balancer* Quanser® pertencente ao LPC - FEIS - UNESP é mostrada na Figura 1. Um esquemático do movimento no eixo x é apresentado na Figura 2. O acionamento do eixo y é análogo ao acionamento do eixo x .

O acionamento de cada eixo é modelado pelo seguinte sistema dinâmico (Quanser Innovate Educate, 2008a).

$$\dot{x} = A(x(t))x(t) + B \text{sat}(u(t)), \quad (11a)$$



Figura 1: Sistema *Ball Balancer* Quanser® pertencente ao LPC - FEIS - UNESP.

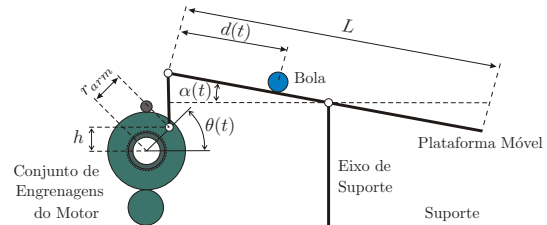


Figura 2: Esquema do movimento no eixo x do sistema *Ball Balancer* (adaptado de Quanser Innovate Educate (2008b)).

$$\begin{aligned} x(t) &= [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T, \\ A(x(t)) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{23}(x_3(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} \end{bmatrix}, \quad (11b) \\ B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{A_m}{J_{eq}} \end{bmatrix}^T, \end{aligned}$$

sendo $f_{23}(x_3(t)) = k_{bb} (\sin(x_3(t))/x_3(t))$, $x_1(t) = d(t)$, a posição da bola, $x_2(t) = \dot{d}(t)$, a velocidade linear da bola, $x_3(t) = \theta(t)$, a posição angular do eixo do servomotor, $x_4(t) = \dot{\theta}(t)$, a velocidade angular do eixo do motor, $u(t)$ representa a tensão aplicada no motor. $k_{bb} = (2m_b r_{arm} r_b^2 g) / (L (m_b r_b^2 + J_b))$ e $J_b = (2m_b r_b^2) / 5$. Os parâmetros do equipamento são os seguintes: $B_{eq} = 0,0844 \text{ Nms/rd}$, o amortecimento referente ao motor; $J_{eq} = 0,0021 \text{ kgm}^2$, a inercia referente ao motor; $A_m = 0,129 \text{ Nm/V}$, o ganho referente ao motor; $L = 0,275 \text{ m}$, o comprimento da placa móvel; $r_{arm} = 0,0254 \text{ m}$, a distância entre o eixo da engrenagem de saída do servomotor e o ponto de fixação da barra; $r_b = 0,0196 \text{ m}$, o raio da bola; e $m_b = 0,003 \text{ kg}$, a massa da bola.

A região especificada para a operação de cada eixo do *Ball Balancer* Quanser® é representada por $\mathcal{X}$ (1) com $p = 4$, $N = I$, uma matriz identidade de ordem adequada, e $\phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4]^T = [0,1375 \ 0,3 \ \pi/6 \ \pi]^T$. A restrição para as variáveis de estado foi especificada com base em restrições físicas do equipamento. Por exemplo, pela forma como foi construído o sistema *Ball Balancer* Quanser®, o ângulo $\theta(t)$ representado na Figura 2 deve ser tal que $-\pi/6 \leq \theta(t) = x_3(t) \leq \pi/6$ (Quanser Innovate

Educate, 2008a). Os sinais de controle enviados aos servomotores (um sinal de controle para cada servomotor) estão sujeitos   saturação com valor $\rho = 5$ Volts, utilizada para proteção do equipamento. Foi admitida a possibilidade de perda de potência nos servomotores de 30%. Esta perda foi modelada como um ganho k_f no sinal de controle de tal forma que $k_f = 1$ para o sistema sem falha e $k_f = 0$ para a falha total do sistema. Assim, na implementação foi utilizado o sinal de controle

$$u_f(t) = k_f u(t), \quad (12)$$

sendo $u(t)$ dado em (7) e a constante $k_f \in [0, 7, 1]$. Observe que $Bu_f(t) = k_f Bu(t)$ e o parâmetro incerto k_f pode ser incorporado na matriz B , tornando-a incerta para o projeto da lei de controle (7). Nestas condições encontra-se que $1,2361 \leq f_{23}(x_3(t)) \leq 1,2944$ e o sistema não linear (11) pode ser representado pelo modelo fuzzy T-S dado em (6) (Taniguchi et al., 2001; Santim et al., 2012) com $n = 4$, $m = 1$, $r = 4$ e

$$\begin{aligned} A_1 = A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,2944 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -35,0877 \end{bmatrix}, \\ A_2 = A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,2361 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -35,0877 \end{bmatrix}, \\ B_1 = B_2 &= [0 \ 0 \ 0 \ 61,7544]^T, \\ B_3 = B_4 &= [0 \ 0 \ 0 \ 43,2281]^T. \end{aligned} \quad (13)$$

5 Resultados

5.1 Considerações sobre taxa de decaimento e região de condições iniciais

Foi observado que, devido às restrições impostas pela região de operação, quanto maior a taxa de decaimento menor a norma dos estados iniciais $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$. Observe que $x(t)^T P x(t) \leq \lambda_{max} \|x(t)\|^2$, sendo λ_{max} o maior autovalor de P . Então para aumentar $\|x(0)\|$ tal que $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$ é suficiente diminuir λ_{max} . Utilizando as LMIs do Teorema 1 e acrescentando: $X > aI$ e $a > 0$, sendo $a \in \mathbb{R}$ uma variável e I a matriz identidade de ordem 4, λ_{max} pode ser minimizado com a maximização de a , pois os autovalores de X são iguais ao inverso dos autovalores de P . Com esta estratégia e resolvendo as LMIs utilizando os parâmetros descritos na Seção 4, $\mathcal{D} = \{D_1 = 1, D_2 = 0\}$ e taxas de decaimento $\beta = 0,5, 1, 1,5$ e 2 foram obtidos os respectivos valores mínimos de λ_{max} : 0,2093, 2,8940, 28,7593 e 192,2425.

Para uma implementação com bons resultados no *Ball Balancer Quanser*[ ], em virtude de distúrbios não modelados, a taxa de decaimento

necessita ser maior que $\beta = 1,5$. Deste modo, para este sistema tem-se dois objetivos conflitantes: aumentar a região para as condições iniciais e, ao mesmo tempo, conseguir uma taxa de decaimento relativamente elevada. Apenas para exemplificar, apresenta-se na Figura 3 a posição da bola no plano para o sistema *Ball Balancer Quanser*[ ] com lei de controle (7) projetado através das LMIs (8) com os parâmetros já mencionados na Seção 4, $\mathcal{D} = \{D_1 = 1, D_2 = 0\}$, $\beta = 1,25$, juntamente com as LMIs em (9) sendo $v_1 = [0,1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $v_2 = -v_1$, $\varpi^{-2} = 1,56$ e $\xi^{-2} = 20$ (Efberg and L fberg, 2004; Gahinet et al., 1994). Neste contexto é assegurado que $x(0) = \pm [0,08 \ 0 \ 0 \ 0]^T \in \mathcal{E}(P, 1)$. Foi utilizada uma referência quadrada de 6 cm de lado por meio de mudança de coordenada, resultando em $x(0) = \pm [0,06 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

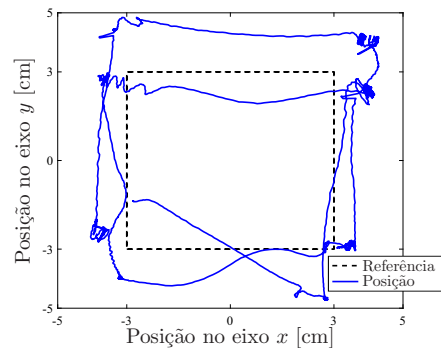


Figura 3: Posição da bola no plano xy para lei de controle (7) com ganhos projetados com $\beta = 1,25$.

Para conseguir resultados satisfatórios é proposto um sistema de controle utilizando dois estágios, cada qual projetado com base no Teorema 1 e com exigências diferentes de taxa de decaimento e ‘‘tamanho’’ do elipsóide $\mathcal{E}(P, 1)$, medido por ϖ em (9). Sendo assim, cada estágio possui um conjunto de ganhos de realimentação. Cada conjunto de ganhos de realimentação é utilizado quando seu estágio correspondente   ativo e são chaveados de acordo com a lei (7).

O primeiro estágio, no qual é projetado o conjunto de ganhos K_1 e de matrizes de decisão Q_1 , associado   função de Lyapunov $V_1(x(t)) = x(t)^T P_1 x(t)$, garante taxa de decaimento $\beta_1 = 0,8$. O segundo estágio, com o conjunto de ganhos K_2 e de matrizes de decisão Q_2 , associado   função de Lyapunov $V_2(x(t)) = x(t)^T P_2 x(t)$, garante taxa de decaimento $\beta_2 = 2$. Note que   preferível a utilização do conjunto K_2 , uma vez que garante maior taxa de decaimento. Então a lógica de ativação dos estágios é a seguinte: se $V_2(x(t)) \leq 1$ ative o estágio 2 e utilize a lei de controle (7) com os conjuntos K_2 e Q_2 , caso contrário ative o estágio 1 e utilize a lei de controle (7) com os conjuntos K_1 e Q_1 . Por hipótese o estágio 1 garante a estabilidade para um conjunto maior de condições iniciais. Isto é garantido com a utilização ade-

quada das LMIs (9) no projeto dos controladores, ou seja, é exigido no projeto menores taxas de decaimento β em (8) junto com maiores valores de ϖ em (9) ou vice-versa. Observe que as condições iniciais devem pertencer ao conjunto $\mathcal{E}(P_1,1)$ ou $\mathcal{E}(P_2,1)$ e que nestas condições o vetor de estado do sistema não deixará a região de operação $\mathcal{X}$, pois $\mathcal{E}(P_1,1) \subset \mathcal{X}$ e $\mathcal{E}(P_2,1) \subset \mathcal{X}$.

Neste contexto acontece, no máximo, uma troca no conjunto de ganhos até o sistema atingir o ponto de equilíbrio (veja ilustração de possível trajetória de estado na Figura 4). Caso $x(0) \in \mathcal{E}(P_2,1)$ não ocorre troca de conjunto de ganhos de realimentação, porque ambos os conjuntos $\mathcal{E}(P_1,1)$ e $\mathcal{E}(P_2,1)$ são invariantes para o sistema controlado utilizando os respectivos conjuntos de ganhos de realimentação e matrizes de decisão.

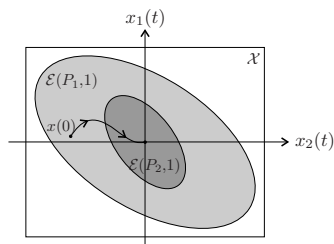


Figura 4: Ilustração de uma possível trajetória de estado com troca de estágios para $x(t) \in \mathbb{R}^2$.

5.2 Resultados utilizando estágios

Nesta subseção são detalhados os resultados obtido no controle do sistema *Ball Balancer* Quanser® utilizando estágios no controle. Resolvendo as LMIs (8) com os parâmetros já mencionados na Seção 4, $\mathcal{D} = \{D_1 = 1, D_2 = 0\}$, $\beta = 0,8$ para o primeiro estágio (conjuntos $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{Q}_1$) e $\beta = 2$ para o segundo estágio (conjunto $\mathcal{K}_2$ e $\mathcal{Q}_2$), juntamente com as LMIs em (9) sendo $v_1 = [0,1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $v_2 = -v_1$, $\varpi = 1$ para o primeiro estágio (assegurando que $x(0) = \pm [0,1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \in \mathcal{E}(P,1)$) e $\varpi = 11,1111$ para o segundo estágio, junto com as LMIs (10) sendo $\xi^{-2} = 20$ (Efberg and Löfberg, 2004; Gahinet et al., 1994), encontra-se $\mathcal{K}_1 = \{K_1^1, K_2^1, K_3^1, K_4^1\}$ e $\mathcal{K}_2 = \{K_1^2, K_2^2, K_3^2, K_4^2\}$ (os conjuntos $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ foram omitidos por questão de espaço), sendo

$$\begin{aligned} K_1^1 &= [37,1335 \ 40,8541 \ 12,7707 \ 2,1861], \\ K_2^1 &= [36,9318 \ 40,7140 \ 12,8230 \ 2,1818], \\ K_3^1 &= [60,3955 \ 54,9699 \ 17,4896 \ 1,8657], \\ K_4^1 &= [60,6123 \ 54,9882 \ 17,6589 \ 1,8596], \\ K_1^2 &= [208,4600 \ 138,6943 \ 37,5984 \ 2,3416], \\ K_2^2 &= [207,5852 \ 138,2461 \ 37,5875 \ 2,3440], \\ K_3^2 &= [249,0018 \ 160,8535 \ 41,6335 \ 1,9881], \\ K_4^2 &= [247,6551 \ 160,0490 \ 41,5052 \ 2,0010]. \end{aligned}$$

Os resultados de implementação do sistema de controle proposto para o eixo x são mostrados

nas Figuras 5-8 (os resultados para o eixo y são análogos e por isto foram omitidos). A posição da bola no plano, do sistema controlado, é mostrada na Figura 9. Observe que nesta implementação é utilizado um quadrado de 9 cm lado, maior que o utilizado na implementação mostrada na Figura 3 (foi utilizada mudança de coordenada, resultando em $x(0) = \pm [0,09 \ 0 \ 0 \ 0]^T$). A linha vertical marcada como início da falha indica o momento a partir do qual foi emulada uma falha que diminuiu a potência dos servomotores em 30%, ou seja, o instante no qual k_f passa de 1 para 0,7 em (12).

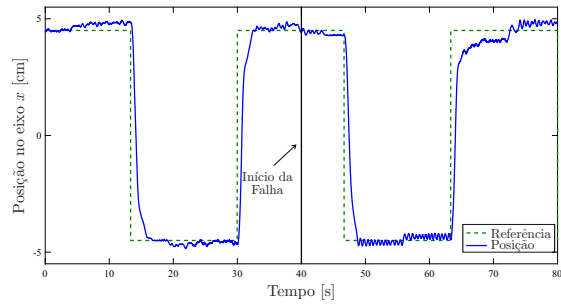


Figura 5: Deslocamento no eixo x .

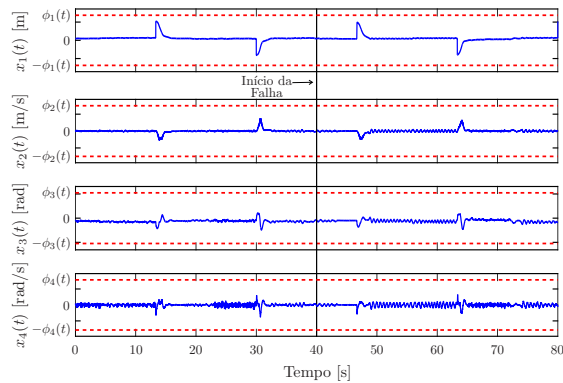


Figura 6: Variáveis de estado no eixo x .

Como é possível observar nos resultados apresentados nas Figuras 5-9 conseguiu-se bom desempenho do sistema controlado com o uso de estágios no controle, mesmo com a saturação no atuador e perda de potência nos servomotores. Comparando-se as Figuras 9 e 3 percebe-se ganho de desempenho significativo quando utiliza-se a estratégia de controle por estágios. Observe, a partir da Figura 6, que as restrições de região de operação foram atendidas durante toda a implementação, embora existam ruídos na implementação, como observado nas funções de Lyapunov apresentadas na Figura 8.

6 Conclusões

Neste trabalho foram apresentados resultados de implementação de controle chaveado para sistemas não lineares incertos, restritos a uma região de operação e sujeitos à saturação no atuador. As considerações feitas aproximam o projeto do controlador das condições práticas encontradas na im-

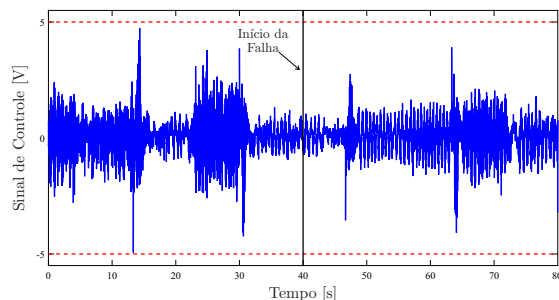


Figura 7: Sinal de controle no eixo x .

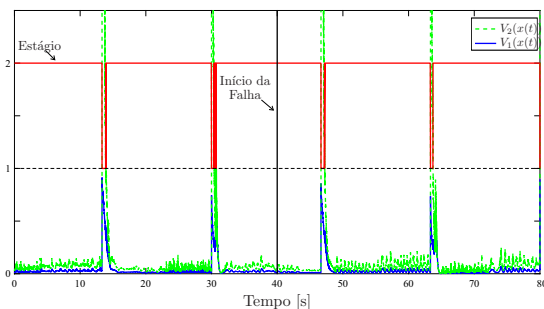


Figura 8: Funções de Lyapunov $V_1(x(t)) = x(t)^T P_1 x(t)$ e $V_2(x(t)) = x(t)^T P_2 x(t)$.

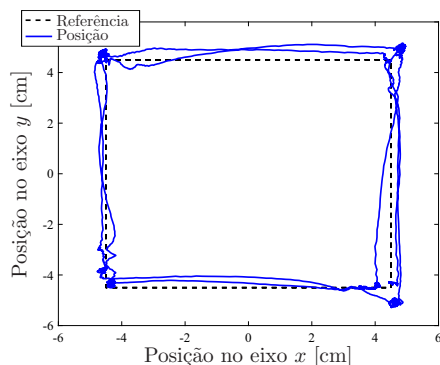


Figura 9: Posição da bola no plano xy utilizando estágios no controle.

plementação do controlador (região de operação e saturação no atuador). Os resultados mostraram o bom desempenho da estratégia utilizada para o controle. A utilização de estágios dependentes do estado do sistema na estratégia de controle permitiu conciliar taxa de decaimento e garantia de estabilidade para uma maior região (maior norma de $x(0) \in \mathcal{E}(P,1)$). A formalização deste procedimento e sua utilização em outros contextos são propostas para futuros trabalhos, assim como metodologias para supressão de ruídos na implementação.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq, CAPES e FAPESP (processo 2011/17610-0) por apoio financeiro às pesquisas.

Referências

Alves, U. N. L. T., Teixeira, M. C. M., de Oliveira, D. R., Cardim, R., Assunção, E. and de Souza, W. A. (2016). Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation, *International*

Journal of Adaptive Control and Signal Processing (28): n/a–n/a.

Boyd, S. P., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*, Vol. 15, SIAM.

Efberg, J. and Löfberg, J. (2004). YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB, *Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan, pp. 284–289.

Gahinet, P., Nemirovskii, A., Laub, A. J. and Chilali, M. (1994). The LMI control toolbox, *Decision and Control, 1994, Proceedings of the 33rd IEEE Conference on*, Vol. 3, pp. 2038–2041.

Hu, T., Lin, Z. and Chen, B. M. (2002). An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance, *Automatica* **38**(2): 351–359.

Klug, M., Castelan, E. B., Leite, V. J. and Silva, L. F. (2015). Fuzzy dynamic output feedback control through nonlinear Takagi-Sugeno models, *Fuzzy Sets and Systems* **1**: 1–20.

Quanser Innovate Educate (2008a). *2D ball balancer control using Quarc - Instructor manual*.

Quanser Innovate Educate (2008b). *2D ball balancer control using Quarc - User manual*.

Santim, M. P. A., Teixeira, M. C. M., Souza, W. A., Assunção, E. and Cardim, R. (2012). Design of a Takagi-Sugeno fuzzy regulator for a set of operation points, *Mathematical Problems in Engineering* **2012**: 1–17.

Souza, W. A., Teixeira, M. C. M., Cardim, R. and Assunção, E. (2014). On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi-Sugeno fuzzy models, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **22**(6): 1720–1727.

Taniguchi, T., Tanaka, K., Ohtake, H. and Wang, H. O. (2001). Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **9**(4): 525–538.

Yong-Yan Cao and Zongli Lin (2003). Robust stability analysis and fuzzy-scheduling control for nonlinear systems subject to actuator saturation, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **11**(1): 57–67.