

ALGORITMO BASEADO EM REALIZAÇÃO DE AUTO-SISTEMA PARA IDENTIFICAÇÃO *FUZZY* RECURSIVA MULTIVARIÁVEL NO ESPAÇO DE ESTADOS

LUÍS MIGUEL TORRES MAGALHÃES TORRES*, GINALBER LUIZ DE OLIVEIRA SERRA†

**Av. dos Portugueses, s/n, Bacanga, CEP: 65001-970*
Universidade Federal do Maranhão
São Luís, Maranhão, Brasil

†*Av. Getúlio Vargas, 04, Monte Castelo, CEP: 65030-005*
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
São Luís, Maranhão, Brasil

luismigueltorres71@yahoo.com.br, ginalber@ifma.edu.br

Abstract— In this paper, a novel online fuzzy Takagi-Sugeno (TS) state-space model identification approach for nonlinear multivariable systems is proposed. The fuzzy Gustafson-Kessel (GK) clustering algorithm is used for antecedent parameters estimation, and an Eigensystem Realization Fuzzy Algorithm is proposed for state-space models estimation in the consequent fuzzy proposition based on system fuzzy Markov parameters. Computational results illustrate the efficiency of the proposed methodology for identification of nonlinear multivariable systems.

Keywords— Recursive System Identification, Eigensystem Realization, Multivariable Fuzzy Modelling, Markov Parameters

Resumo— Neste trabalho, uma nova metodologia para a identificação *online* de modelos *fuzzy Takagi-Sugeno* (TS) no espaço de estados para sistemas dinâmicos multivariáveis não-lineares é proposta. O algoritmo de agrupamento *fuzzy Gustafson-Kessel* (GK) é utilizado para a estimação dos parâmetros do antecedente, e um Algoritmo *Fuzzy* para Realização de Auto-Sistemas (AFRAS) é proposto para a estimação dos modelos em espaço de estados do consequente das regras *fuzzy* com a utilização dos parâmetros de *Markov fuzzy* do sistema. Os resultados computacionais mostram a eficiência da metodologia proposta para a identificação *online* de sistemas não-lineares multivariáveis.

Palavras-chave— Identificação Recursiva de Sistemas, Realização de Auto-Sistema, Modelagem *Fuzzy* Multivariável, Parâmetros de *Markov*.

1 Introdução

A identificação *online* de sistemas é uma ferramenta primordial em diversas aplicações práticas nas mais diversas áreas da engenharia, como malhas de controle adaptativo e sistemas de monitoramento em tempo real. Com o constante avanço tecnológico, sistemas modernos se tornam cada vez mais complexos, e por isso, metodologias para a representação de sistemas dinâmicos que possuem tais características têm recebido muita atenção nos últimos anos, especialmente aqueles que lidam com não-linearidades, incertezas e características variantes no tempo. Diversos estudos tem mostrado que sistemas *fuzzy Takagi-Sugeno* são eficientes na modelagem destes tipos de complexidades (Serra and Bottura, 2007).

Em (Wu et al., 2015), é proposta a identificação *online* de um modelo linear no espaço de estados através da identificação dos parâmetros de *Markov* do sistema e do algoritmo de realização de auto-sistema (ERA). O modelo identificado é aplicado para o projeto de um sistema de controle de um sistema dinâmico estocástico. Em (Liu et al., 2010), é proposta a identificação *online* de sistemas não-lineares multivariável no formato NARX utilizando o algoritmo *Selective Recursive Kernel Learning*.

Neste trabalho uma nova metodologia para identificação *online* de um modelo *fuzzy* no espaço de estados, é proposta. As principais contribuições deste trabalho são descritas a seguir:

- A obtenção de um modelo *fuzzy* multivariável de realização mínima, ou seja, com a menor ordem entre todos os modelos que poderiam ser obtidos a partir do mesmo conjunto de dados, que é útil para garantir a transparência e a interpretabilidade do modelo *fuzzy* no espaço de estados identificado;
- O modelo *fuzzy* identificado pode ser visto com uma estrutura linear no espaço de estados com matrizes variando de acordo com o espaço de entrada, definido pelas variáveis linguísticas do antecedente, para uma região politópica convexa no espaço de saída, definida pelo modelo no espaço de estados, útil para a modelagem robusta e projeto de controle de sistemas incertos, não-lineares e com parâmetros variantes no tempo;
- Um novo algoritmo para a identificação *online* de modelos *fuzzy* no espaço de estados baseado no cálculo dos parâmetros de *Markov* a partir de dados experimentais.

2 Modelo Recursivo *fuzzy Takagi-Sugeno* no Espaço de Estados

Neste trabalho, o modelo *fuzzy Takagi-Sugeno* (TS) apresenta a i -ésima regra, dada por:

$$R^i : \mathbf{SE} \ z_k^1 \text{   } F_1^i \text{ e } \dots \text{ e } z_k^p \text{   } F_p^i \quad (1)$$

$$\text{ENTÃO} \begin{cases} x_{k+1}^i = \mathbf{A}^i x_k^i + \mathbf{B}^i u_k \\ y_k^i = \mathbf{C}^i x_k^i + \mathbf{D}^i u_k \end{cases}$$

onde $i = 1, 2, \dots, L$ é o número da regra, $z_k = [z_k^1 \ z_k^2 \ \dots \ z_k^p]$ são as variáveis do antecedente no k -ésimo instante de tempo, F_j^i   o i -ésimo conjunto *fuzzy* do j -ésimo parâmetro do antecedente, com $j = 1, 2, \dots, p$, sendo que z_k^j possui um grau de pertinência $\mu_j^i \in [0, 1]$ no conjunto *fuzzy* H_j^i , $\mathbf{A}^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}^i \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\mathbf{C}^i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ e $\mathbf{D}^i \in \mathbb{R}^{q \times r}$ são os parâmetros do modelo linear local de cada regra, $x_k^i \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados do i -ésimo modelo linear local, $y_k^i \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saída do i -ésimo modelo linear local e $u_k \in \mathbb{R}^r$   o vetor de entrada.

O grau de ativação da i -ésima regra, é calculado como segue:

$$h^i(z_k) = \mu_1^i \star \mu_2^i \star \dots \star \mu_p^i \quad (2)$$

O grau de ativação normalizado da i -ésima regra, é dado por:

$$\gamma^i(z_k) = \frac{h^i(z_k)}{\sum_{j=1}^L h^j(z_k)} \quad (3)$$

A saída do modelo *fuzzy* TS, é dada por:

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = \sum_{i=1}^L \gamma^i(z_k) x_{k+1}^i \\ \tilde{y}_k = \sum_{i=1}^L \gamma^i(z_k) y_k^i \end{cases} \quad (4)$$

Substituindo (1) em (4), encontra-se:

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = \sum_{i=1}^L \gamma^i(z_k) \mathbf{A}^i x_k^i + \sum_{i=1}^L \gamma^i(z_k) \mathbf{B}^i u_k \\ \tilde{y}_k = \sum_{i=1}^L \gamma^i(z_k) \mathbf{C}^i x_k^i + \sum_{i=1}^L \gamma^i(z_k) \mathbf{D}^i u_k \end{cases} \quad (5)$$

2.1 Estimação dos Parâmetros do Antecedente

A estimação dos parâmetros do antecedente do modelo *fuzzy* TS é realizada através do algoritmo clássico de agrupamento *Fuzzy Gustafson-Kessel* (GK) (Gustafson and Kessel, 1978). Este algoritmo utiliza uma medida de distância adaptativa, visando detectar agrupamentos com diferentes formatos, onde cada agrupamento possui sua própria matriz de indução de norma.

2.2 Estimação Recursiva dos Parâmetros do Consequente

2.2.1 Estimação Recursiva dos Parâmetros de Markov *Fuzzy* do Sistema

Para a obtenção dos parâmetros dos modelos lineares locais são necessários os parâmetros de Markov *fuzzy* para cada regra. Um dos modos de se obter tais parâmetros através de dados de entrada-saída de um sistema é adicionando artificialmente um observador de estados no sistema a ser estimado (Juang, 1994). Adicionando e subtraindo o termo $\mathbf{G}^i y_k^i$ no lado direito da equação dos estados de (1), obt m-se:

$$x_{k+1}^i = \bar{\mathbf{A}}^i x_k^i + \bar{\mathbf{B}}^i v_k^i \quad (6)$$

onde,

$$\bar{\mathbf{A}}^i = \mathbf{A}^i + \mathbf{G}^i \mathbf{C}^i \quad (7)$$

$$\bar{\mathbf{B}}^i = \mathbf{B}^i + \mathbf{G}^i \mathbf{D}^i \quad (8)$$

$$v_k^i = \begin{bmatrix} u_k \\ y_k^i \end{bmatrix} \quad (9)$$

e $\mathbf{G}^i \in \mathbb{R}^{q \times r}$   o ganho do observador do i -ésimo modelo linear local.

Resolvendo a equação (6) em termos de u_j e y_j^i , com $j = 0, 1, \dots, k$ e $x_0^i = 0$, obt m-se o seguinte resultado:

$$x_k^i = \sum_{j=1}^k (\bar{\mathbf{A}}^i)^{j-1} \bar{\mathbf{B}}^i v_{k-j}^i \quad (10)$$

Assim, substituindo (10) em (1), obt m-se:

$$y_k^i = \sum_{j=1}^k \mathbf{C}^i (\bar{\mathbf{A}}^i)^{j-1} \bar{\mathbf{B}}^i v_{k-j}^i + \mathbf{D}^i u_k \quad (11)$$

Devido a presença do observador de estados, pode-se considerar $(\bar{\mathbf{A}}^i)^p \approx 0$. Deste modo, a equação (11) pode ser reescrita como:

$$y_k^i = \sum_{j=1}^p \bar{\mathbf{M}}_j^i v_{k-j}^i + \mathbf{D}^i u_k \quad (12)$$

onde $\bar{\mathbf{M}}_j^i = \mathbf{C}^i (\bar{\mathbf{A}}^i)^{j-1} \bar{\mathbf{B}}^i$   o j -ésimo parâmetro de Markov do observador do i -ésimo modelo local. Esta expressão pode ser expressa matricialmente como:

$$y_k^i = \boldsymbol{\theta}_k^i \boldsymbol{\phi}_k^i \quad (13)$$

onde $\boldsymbol{\theta}_k^i = [\mathbf{D}_k^i \ \bar{\mathbf{M}}_{k_1}^i \ \dots \ \bar{\mathbf{M}}_{k_p}^i]$, o subíndice k indica que $\boldsymbol{\theta}_k^i$ é estimada utilizando dados obtidos até o k -ésimo instante de tempo, e $\boldsymbol{\phi}_k^i = [u_k^T \ v_{k-1}^T \ \dots \ v_{k-p}^T]^T$.

Substituindo (13) em (4), encontra-se a saída do modelo *fuzzy*:

$$\tilde{y}_k = \sum_{i=1}^L \gamma^i(z_k) \theta_k^i \phi_k^i \quad (14)$$

A equação (14) pode ser expressa matricialmente como:

$$\tilde{y}_k = [\theta_k^1 \quad \dots \quad \theta_k^L] \begin{bmatrix} \gamma^1(z_k) \phi_k^1 \\ \vdots \\ \gamma^L(z_k) \phi_k^L \end{bmatrix} \quad (15)$$

Como $\gamma^i(z_k) \tilde{y}_k = \gamma^i(z_k) y_k^i \quad \forall i = 1, 2, \dots, L$, logo $\phi_k^1 = \phi_k^2 = \dots = \phi_k^L = \phi_k$. Diante disso, a equação (15) pode ser expressa de maneira recursiva para $k > p$ do seguinte modo:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_k = \Theta_k \tilde{\Phi}_k \quad (16)$$

onde $\tilde{\mathbf{Y}}_k = [y_{p+1} \quad y_{p+2} \quad \dots \quad y_k]$ é o vetor de saída, $\Theta_k = [\theta_k^1 \quad \theta_k^2 \quad \dots \quad \theta_k^L]$ é o vetor com os parâmetros de Markov *fuzzy* do observador de todos os modelos lineares locais, $\tilde{\Phi}_k = [\tilde{\phi}_{p+1} \quad \tilde{\phi}_{p+2} \quad \dots \quad \tilde{\phi}_k]$, sendo $\tilde{\phi}_k = \Gamma_k \otimes \phi_k$ a matriz de regressores *fuzzy* no instante k , o operador $\otimes$ representa o produto de Kronecker, e $\Gamma_k = [\gamma^1(z_k) \quad \gamma^2(z_k) \quad \dots \quad \gamma^L(z_k)]^T$ a matriz de ponderação *fuzzy*, com os graus de pertinência normalizados a partir de (3).

A solução por mínimos quadrados de (16)   dada como segue:

$$\Theta_k = \tilde{\mathbf{Y}}_k \tilde{\Phi}_k^T [\tilde{\Phi}_k \tilde{\Phi}_k^T]^{-1} \quad (17)$$

Adicionando os termos u_{k+1} e y_{k+1} em (17), obt m-se:

$$\Theta_{k+1} = \tilde{\mathbf{Y}}_{k+1} \tilde{\Phi}_{k+1}^T [\tilde{\Phi}_{k+1} \tilde{\Phi}_{k+1}^T]^{-1} \quad (18)$$

onde $\tilde{\mathbf{Y}}_{k+1} = [\tilde{\mathbf{Y}}_k \quad y_{k+1}]$ e $\tilde{\Phi}_{k+1} = [\tilde{\Phi}_k \quad \tilde{\phi}_{k+1}]$.

O cálculo de Θ_{k+1} através da equação (18) requer a inversão de uma matriz de tamanho elevado, o que pode acarretar em problemas de estabilidade numérica e um alto custo computacional. De modo a evitar esta operação, inicialmente é definida a seguinte matriz:

$$\mathbf{P}_{k+1} = [\tilde{\Phi}_{k+1} \tilde{\Phi}_{k+1}^T]^{-1} \quad (19)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = [\tilde{\Phi}_k \tilde{\Phi}_k^T + \tilde{\phi}_{k+1} \tilde{\phi}_{k+1}^T]^{-1} \quad (20)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = [\mathbf{P}_k + (\Gamma_k \otimes \phi_{k+1}) (\Gamma_k \otimes \phi_{k+1})^T]^{-1} \quad (21)$$

Utilizando o lema da matriz inversa, a equação (21) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_k \left[\mathbf{I} - \frac{\tilde{\phi}_{k+1} \tilde{\phi}_{k+1}^T \mathbf{P}_k}{1 + \tilde{\phi}_{k+1}^T \mathbf{P}_k \tilde{\phi}_{k+1}} \right] \quad (22)$$

Substituindo (22) em (18), obt m-se:

$$\Theta_{k+1} = \Theta_k + [y_{k+1} - \Theta_k \tilde{\phi}_{k+1}] \frac{\tilde{\phi}_{k+1}^T \mathbf{P}_k}{1 + \tilde{\phi}_{k+1}^T \mathbf{P}_k \tilde{\phi}_{k+1}} \quad (23)$$

Assim, adicionando um fator de esquecimento λ ao algoritmo (Ljung, 1998), os parâmetros de Markov do observador são obtidos através da solução recursiva do seguinte conjunto de equações:

$$\mathbf{G}_{k+1} = \frac{\tilde{\phi}_{k+1}^T \mathbf{P}_k}{\lambda + \tilde{\phi}_{k+1}^T \mathbf{P}_k \tilde{\phi}_{k+1}} \quad (24)$$

$$\Theta_{k+1} = \Theta_k + [y_{k+1} - \Theta_k \tilde{\phi}_{k+1}] \mathbf{G}_{k+1} \quad (25)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = \lambda^{-1} \mathbf{P}_k [\mathbf{I} - \tilde{\phi}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1}] \quad (26)$$

Os parâmetros de Markov *fuzzy* do sistema de cada modelo linear local são obtidos através da solução das seguintes equações (Juang, 1994):

$$\mathbf{M}_{k_r}^i = \bar{\mathbf{M}}_{k_r}^{i1} - \sum_{j=1}^r \bar{\mathbf{M}}_{k_j}^{i2} \mathbf{M}_{k_r-i}^i, \text{ para } r = 1, 2, \dots, p \quad (27)$$

$$\mathbf{M}_{k_r}^i = - \sum_{j=1}^p \bar{\mathbf{M}}_{k_j}^{i2} \mathbf{M}_{k-i}^i, \text{ para } r > p \quad (28)$$

onde $\bar{\mathbf{M}}_{k_r}^i = [\bar{\mathbf{M}}_{k_r}^{i1}, -\bar{\mathbf{M}}_{k_r}^{i2}]$ para $r = 1, 2, \dots$.

2.2.2 Algoritmo *Fuzzy* para Realização de Auto-Sistemas

Neste trabalho é apresentado um Algoritmo *Fuzzy* para Realização de Auto-Sistemas (AFRAS), onde se utiliza os parâmetros de Markov *fuzzy*, para encontrar as matrizes $\mathbf{A}^i$, $\mathbf{B}^i$ e $\mathbf{C}^i$ para cada modelo linear local. O algoritmo proposto inicia com a formação da matriz de *Hankel* generalizada formada pelos parâmetros de Markov *fuzzy* do sistema

$$\mathbf{H}_{j-1}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_j^i & \mathbf{M}_{j+1}^i & \dots & \mathbf{M}_{j+\beta-1}^i \\ \mathbf{M}_{j+1}^i & \mathbf{M}_{j+2}^i & \dots & \mathbf{M}_{j+\beta}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_{j+\alpha-1}^i & \mathbf{M}_{j+\alpha}^i & \dots & \mathbf{M}_{j+\alpha+\beta-2}^i \end{bmatrix} \quad (29)$$

onde α , e β são inteiro de modo que $\alpha q \leq \beta r$, r e q são o número de entradas e saídas do sistema, respectivamente.

Os parâmetros de Markov *fuzzy* do sistema são definidos a seguir:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0^i &= \mathbf{D}^i \\ \mathbf{M}_j^i &= \mathbf{C}^i (\mathbf{A}^i)^{j-1} \mathbf{B}^i \end{aligned} \quad (30)$$

Substituindo (30) em (29) at $j = 1$, obtêm-se

$$\mathbf{H}_0^i = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^i \mathbf{B}^i & \dots & \mathbf{C}^i (\mathbf{A}^i)^{\beta-1} \mathbf{B}^i \\ \mathbf{C}^i \mathbf{A}^i \mathbf{B}^i & \dots & \mathbf{C}^i (\mathbf{A}^i)^\beta \mathbf{B}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}^i (\mathbf{A}^i)^{\alpha-1} \mathbf{B}^i & \dots & \mathbf{C}^i (\mathbf{A}^i)^{\alpha+\beta-1} \mathbf{B}^i \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\mathbf{H}_0^i = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^i \\ \vdots \\ \mathbf{C}^i (\mathbf{A}^i)^{\alpha-1} \end{bmatrix} (\mathbf{A}^i)^{k-1} [\mathbf{B} \quad \dots \quad (\mathbf{A}^i)^{\beta-1} \mathbf{B}] \quad (32)$$

$$\mathbf{H}_0^i = \mathbf{P}_\alpha^i \mathbf{Q}_\beta^i \quad (33)$$

onde $\mathbf{P}_\alpha^i$ é a matriz de controlabilidade e $\mathbf{Q}_\beta^i$ é a matriz de observabilidade do modelo linear local identificado; então o *rank* máximo de $\mathbf{H}_0^i$, ou o número de valores singulares não nulos, é igual ao *rank* de $\mathbf{P}_\alpha^i$ e $\mathbf{Q}_\beta^i$. Como o sistema realizado é observável e controlável, é possível afirmar que a ordem do modelo linear identificado é o número de valores singulares não nulos de $\mathbf{H}_0^i$.

O AFRAS inicia com a decomposição em valor singular da matriz de *Hankel* em $k = 1$,

$$\mathbf{H}_0^i = \mathbf{R}^i \mathbf{\Sigma}^i (\mathbf{S}^i)^T \quad (34)$$

onde $\mathbf{R}$ e $\mathbf{S}$ são matrizes ortogonais e $\mathbf{\Sigma}$ é uma matriz retangular,

$$\mathbf{\Sigma}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_n^i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

com

$$\mathbf{\Sigma}_n^i = \begin{bmatrix} \sigma_1^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^i \end{bmatrix} \quad (36)$$

onde $\sigma_1^i > \sigma_2^i > \dots > \sigma_n^i > 0$ são os n valores singulares mais significativos de $\mathbf{H}_0^i$, uma vez que é considerado $\sigma_n^i \gg \sigma_{n+1}^i$. Então, definindo $\mathbf{R}_n^i$ e $\mathbf{S}_n^i$ como matrizes formadas pelas n primeiras colunas de $\mathbf{R}^i$ e $\mathbf{S}^i$, respectivamente, a matriz $\mathbf{H}_0^i$ pode ser aproximada por

$$\mathbf{H}_0^i = \mathbf{R}_n^i \mathbf{\Sigma}_n^i (\mathbf{S}_n^i)^T \quad (37)$$

Os parâmetros dos modelos locais no espaço de estados são obtidos do seguinte modo:

$$\mathbf{A}^i = (\mathbf{\Sigma}_n^i)^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{R}_n^i)^T \mathbf{H}^i (\mathbf{S}_n^i) (\mathbf{\Sigma}_n^i)^{-\frac{1}{2}} \quad (38)$$

$$\mathbf{B}^i = \text{as } r \text{ primeiras colunas de } (\mathbf{\Sigma}_n^i)^{\frac{1}{2}} (\mathbf{S}_n^i)^T \quad (39)$$

$$\mathbf{C}^i = \text{as } q \text{ primeiras linhas de } (\mathbf{R}_n^i) (\mathbf{\Sigma}_n^i)^{\frac{1}{2}} \quad (40)$$

2.3 Algoritmo online para Identificação de Modelo fuzzy Takagi-Sugeno no Espaço de Estados

O algoritmo proposto é dividido em duas etapas, uma em batelada que utiliza k amostras para a obtenção de um modelo inicial, e a etapa *online* para atualizar o modelo a cada nova amostra adquirida. A etapa em batelada consiste nos seguintes passos:

Passo 1: Coletar k pares entrada-saída do sistema a ser identificado;

Passo 2: Encontrar os parâmetros do antecedente utilizando o algoritmo GK;

Passo 3: Estimar os parâmetros de *Markov fuzzy* do observador para cada modelo local em batelada (17);

Passo 4: Obter os parâmetros de *Markov fuzzy* do sistema para cada modelo local (27)-(28);

Passo 5: Realizar o modelo *fuzzy* TS no espaço de estados utilizando o ARFAS (38)-(40);

A execução *online* do algoritmo é realizada através dos seguintes passos:

Passo 1: Coletar os valores de entrada-saída no instante de tempo $k = k + 1$;

Passo 2: Resolver as equações (24)-(26) para atualizar os parâmetros de *Markov fuzzy* do observador para cada modelo local;

Passo 3: Obter os parâmetros de *Markov fuzzy* do sistema para cada modelo local (27)-(28);

Passo 4: Realizar o modelo *fuzzy* TS no espaço de estados utilizando o ARFAS (38)-(40);

Passo 5: Retornar ao **Passo 1**.

3 Resultados Computacionais

Com o intuito de avaliar o desempenho da metodologia proposta, é realizada a identificação de um sistema não-linear multivariável. Para quantificar a qualidade do modelo obtido é utilizada a raiz quadrada do erro quadrático médio (RMSE), dada como segue:

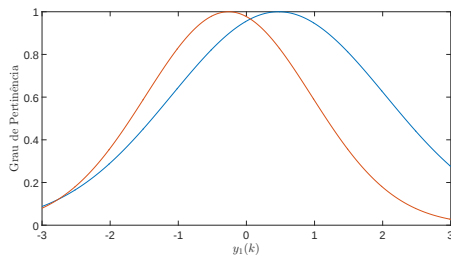
$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k - \hat{y}_k)^2} \quad (41)$$

onde y_k é a saída real do sistema, $\hat{y}_k$ é a saída estimada e N é a quantidade de amostras.

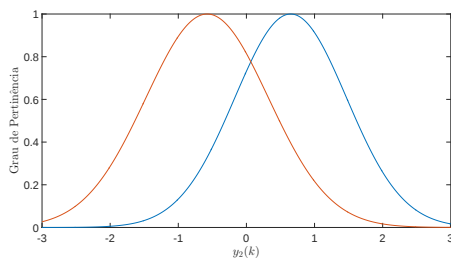
O sistema teste utilizado pode ser descrito pelas seguintes equações (Liu et al., 2010):

$$\begin{bmatrix} y_1(k+1) \\ y_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_1(k)}{1+y_2(k)^2} \\ \frac{y_1(k)y_2(k)}{1+y_2(k)^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} \quad (42)$$

Para a estimação inicial dos parâmetros do modelo, um conjunto com $N = 150$ amostras é criado fazendo as duas entradas seqüências de números aleatórios distribuídos entre $[-2, 2]$. Para realizar a estimação dos parâmetros do antecedente das regras, o algoritmo GK é implementado utilizando o número de grupos $L = 2$, grau de ponderação $m = 1, 2$ e tolerância $\epsilon = 0,001$. Os conjuntos *fuzzy* obtidos são mostrados na Fig. 1.



(a) Funções de pertinência relacionadas a saída y_1



(b) Funções de pertinência relacionadas a saída y_2

Figura 1: Funções de Pertinência obtidas com o algoritmo GK.

Uma regra nebulosa generalizada para este modelo é dada por:

$$\begin{aligned} R^i : & \text{ IF } y_1(k-1) \text{ is } F_1^i \text{ and } y_2(k-1) \text{ is } F_2^i \\ \text{ THEN } & \begin{cases} x_{k+1}^i = A^i x_k^i + B^i u_k \\ y_k^i = C^i x_k^i + D^i u_k \end{cases} \end{aligned} \quad (43)$$

onde $i = 1, 2$.

Os parâmetros utilizados no algoritmo de identificação recursiva proposto são: $p = 3$, $\alpha = 50$, $\beta = 100$, $\lambda = 0,95$. Analisando os valores singulares da matriz de *Hankel* mostrados na Fig. 2, percebe-se que a mesma possui apenas quatro valores singulares relevantes, então a ordem escolhida para o modelo identificado é $n = 4$.

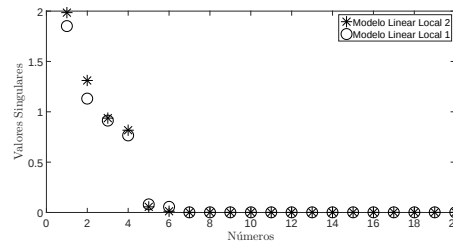


Figura 2: Valores singulares da matrix de *Hankel* para cada modelo local no espaço de estados.

O sinal de entrada utilizado para a identificação recursiva do modelo *fuzzy* no espaço de estados é dado por:

$$\begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{2\pi k}{25}\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi k}{25}\right) \end{bmatrix} \quad (44)$$

A variação nos parâmetros é ilustrada nas Fig. 3 e 4 através da variação dos elementos da diagonal principal de A^i . Uma comparação entre a saída do modelo identificado e da resposta real do sistema em estudo juntando com o erro de estimação ao quadrado em cada instante de tempo, são mostradas nas Fig. 5 e 6. O grau de ativação de cada regra durante o processo de identificação recursivo, é mostrado na Fig. 7.

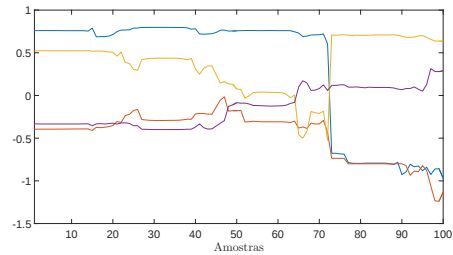


Figura 3: Variação paramétrica do modelo local 1 - elementos da diagonal principal de A^1 .

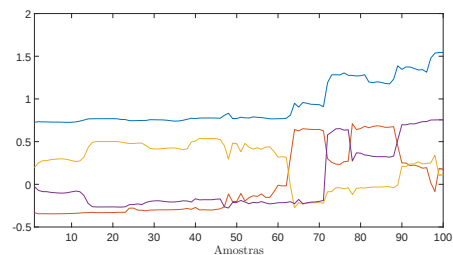
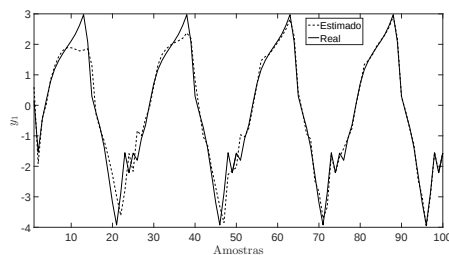
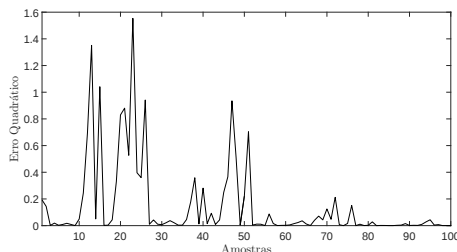


Figura 4: Variação paramétrica do modelo local 2 - elementos da diagonal principal de A^2 .

De modo a evidenciar a qualidade dos resultados obtidos com a metodologia proposta, Na Tabela 1 é apresentada uma comparação com os resultados obtidos em (Liu et al., 2010) utilizando a técnica *Selective Recursive Kernel Learning* (SRKL).

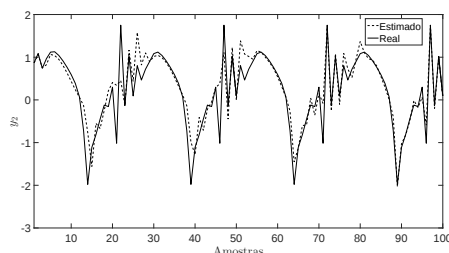


(a) Comparação entre a saída estimada e a saída da planta.

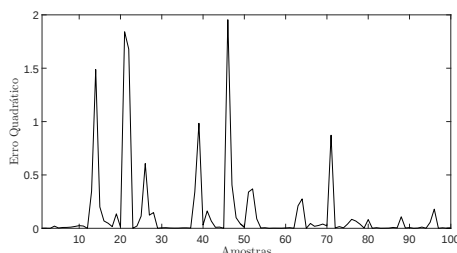


(b) Erro quadrático durante o processo de identificação para a saída y_1 .

Figura 5: Resultados obtidos para a saída 1 y_1 do sistema teste com a metodologia proposta.



(a) Comparação entre a saída estimada e a saída da planta.



(b) Erro quadrático durante o processo de identificação para a saída y_2 .

Figura 6: Resultados obtidos para a saída 1 y_1 do sistema teste com a metodologia proposta.

Tabela 1: Comparação da metodologia proposta com o SRKL.

Metodologia	RMSE	
	Saída 1	Saída 2
PROPOSTA	0,42	0,41
SRKL	0,46	0,48

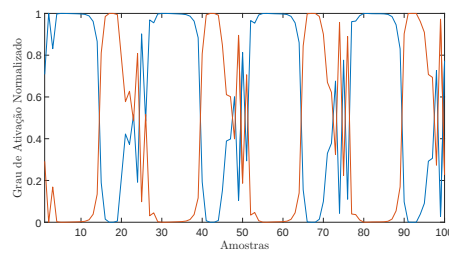


Figura 7: Grau de ativação normalizado de cada regra *fuzzy* durante o processo de identificação.

4 Conclusões

A metodologia proposta neste trabalho se mostrou eficiente para garantir uma boa representação de um sistema teste multivariável não-linear. Por fim, com o intuito de mostrar a eficiência da metodologia proposta em relação a outras técnicas existentes, foi feita uma comparação com outra técnica *online* para estimação sistemas multivariáveis não-lineares, onde os resultados mostraram um melhor resultado obtido com a metodologia apresentada neste trabalho.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq pelo apoio financeiro à pesquisa.

Referências

- Gustafson, D. and Kessel, W. (1978). Fuzzy clustering with a fuzzy covariance matrix, *Decision and Control including the 17th Symposium on Adaptive Processes, 1978 IEEE Conference on*, pp. 761–766.
- Juang, J.-N. (1994). *Applied system identification*, Prentice Hall.
- Liu, Y., Wang, H., Yu, J. and Li, P. (2010). Selective recursive kernel learning for online identification of nonlinear systems with {NARX} form, *Journal of Process Control* **20**(2): 181 – 194.
- Ljung, L. (1998). *System identification*, Springer.
- Serra, G. and Bottura, C. (2007). An iv-qr algorithm for neuro-fuzzy multivariable online identification, *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* **15**(2): 200–210.
- Wu, C.-Y., Tsai, J.-H., Guo, S.-M., Shieh, L.-S., Canelon, J., Ebrahimzadeh, F. and Wang, L. (2015). A novel on-line observer/kalman filter identification method and its application to input-constrained active fault-tolerant tracker design for unknown stochastic systems, *Journal of the Franklin Institute* **352**(3): 1119 – 1151.