

CONTROLE SATURANTE AMOSTRADO DE SISTEMAS LPV

ALESSANDRA H. K. PALMEIRA, JOÃO MANOEL GOMES DA SILVA JR., JEFERSON V. FLORES

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, UFRGS, Porto Alegre, Brasil.

Emails: kimura.palmeira@ufrgs.br, jmgomes@ufrgs.br, jefferson.flores@ufrgs.br

Abstract— This paper addresses the problem of aperiodic sampled-data control of linear parameter varying (LPV) systems under input saturation. It is explicitly assumed that the LPV-controller is updated only at the sampling instants and that the control signal is kept constant between two consecutive samples by means of a zero order holder, while the plant and the scheduling parameter evolve continuously in time. In this case, quasi Linear Matrix Inequality (LMI) conditions to compute a sampled-data LPV state feedback control law that ensures the asymptotic stability of the closed-loop system, provided that the intersampling interval respect some bounds are proposed.

Keywords— Sampled-data, LPV systems, Control saturation, Linear Matrix Inequality (LMI)

Resumo— Este trabalho aborda o problema de controle amostrado aperiódicamente de sistemas lineares com parâmetros variantes (LPV) considerando saturação do sinal de controle. Assume-se que o controlador LPV é atualizado apenas nos instantes de amostragem e mantido constante entre duas amostragens consecutivas, através de um retentor de ordem zero, enquanto a planta e os parâmetros variantes evoluem continuamente no tempo. Neste caso, condições *quasi*-LMI para projeto do controle LPV amostrado por realimentação de estados são propostas para garantir a estabilidade assintótica da origem do sistema em malha fechada, com o intervalo de amostragem aperiódico. A abordagem baseia-se em uma modelagem politópica para o sistema LPV, no uso de um *looped*-funcional dependente dos parâmetros e uma condição de setor generalizada, para que possam ser considerados os efeitos da amostragem aperiódica e da saturação, respectivamente.

Palavras-chave— Sistemas amostrados, Sistemas LPV, Saturação de controle, Inequação Linear Matricial (LMI)

1 Introdução

Para lidar com algumas incertezas e não-linearidades, os sistemas podem ser modelados como sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo (LPV) ou *quasi*-LPV (Huang e Jadbabaie, 1999). Nas estratégias de controle LPV, assume-se que o parâmetro variante está disponível para medição e que o controlador é continuamente atualizado para lidar com a variação do modelo. Na prática, a medição do parâmetro variante e atualização do controlador de forma contínua é inviável, por isso o interesse em sistemas com dados amostrados aumentou nas últimas décadas (Hespanha et al., 2007), em especial o caso de amostragem aperiódica. Neste caso, o comportamento da planta em tempo contínuo e a atualização discreta do sinal de controle devem ser explicitamente considerados na análise de estabilidade e desempenho do sistema em malha fechada. Para lidar com os efeitos da amostragem aperiódica, basicamente três abordagens são utilizadas: a primeira é baseada em um modelo discreto com incertezas (Cloosterman et al., 2010); a segunda trata o problema como um sistema híbrido (Sivashankar e Khargonekar, 1994) e a terceira trata o sinal amostrado como uma entrada com atraso variante no tempo e, assim, baseia-se no uso de funcionais de Lyapunov-Krasovskii, (Naghshtabrizi et al., 2008), (Fridman, 2010). Uma alternativa menos conservadora aos funcionais de Lyapunov-Krasovskii, é a utilização de um *looped*-funcional (Seuret, 2012).

Considerando sistemas LPV, poucos trabalhos lidam formalmente com o problema de controle amostrado. Em (Tan et al., 2002), assume-se que os parâmetros não variam durante o intervalo de amostragem, o que é uma hipótese restritiva. Neste caso, a técnica de *lifting* é aplicada para propor condições de

estabilidade. Em (Ramezanifar et al., 2012) é considerada a abordagem de sistemas com atraso, necessitando assim a aplicação de técnicas de varredura (*gridding*). Braga et al. (2015) apresentam condições LMI para projeto de uma lei de controle por *event triggered* para sistemas LPV, considerando atraso e amostragem aperiódica. Para isso, o método de discretização proposto é baseado em expansão de séries de Taylor e assume-se também que o parâmetro não varia no intervalo de amostragem. Já (Shi e Su, 2014) e (Du et al., 2012), utilizam funcionais de Lyapunov-Krasovskii clássicos e consideram saturação do sinal de controle. O primeiro utiliza a estratégia de controle preditivo baseada em modelo (MPC), enquanto o segundo considera um ganho $\mathcal{L}_2$ entre o distúrbio e o sinal de saída. Outro modo de tratar o problema é considerado em (Gomes da Silva Jr. et al., 2015). A abordagem utiliza um *looped*-funcional dependente de parâmetros para lidar com os efeitos da amostragem aperiódica e assume que o parâmetro da planta evolui continuamente no tempo.

A partir dos resultados apresentados em (Gomes da Silva Jr. et al., 2015), neste trabalho são propostas condições para estabilização de sistemas LPV com saturação do sinal de controle, por meio de realimentação de estados LPV amostrados. Assume-se que o controlador LPV é atualizado apenas nos instantes de amostragem e mantido constante entre duas amostragens consecutivas, enquanto o parâmetro da planta evolui continuamente. Considera-se que os limites de magnitude e de variação do parâmetro são conhecidos. A abordagem é baseada em um modelo politópico que descreve o sistema LPV e em um *looped*-funcional dependente dos parâmetros. Assim, condições *quasi*-LMI são propostas para projeto dos ganhos de realimentação de estados e para resolver problemas

de otimização propostos.

Notação. Os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbb{S}^n$ representam o conjunto de números naturais, reais positivos, vetores de n -dimensões, matrizes $n \times n$ e matrizes simétricas de $\mathbb{R}^{n \times n}$, respectivamente. Para um escalar T_2 , $\mathbb{K}$ define o conjunto de funções contínuas no intervalo $[0, T]$ para $\mathbb{R}^n$, com $0 < T \leq T_2$. $\|\cdot\|$ representa a norma Euclidiana. O sobrescrito $'$ representa matriz transposta. $\otimes$ representa o produto de Kronecker. A not  o $P > 0$ significa que P é positiva definida. $\text{He}\{A\} > 0$ refere-se a $A + A' > 0$. I e 0 são matrizes identidade e zero de dimensão apropriada. $\text{Co}\{\cdot\}$ denota um envelope convexo. $A_{(i)}$ e $x_{(i)}$ correspondem a i -ésima linha da matriz A e ao i -ésimo elemento do vetor x , respectivamente. $\mathcal{E}(P, c)$ corresponde ao elipsoide $\mathcal{E}(P, c) = \{x \in \mathbb{R}^n; x'Px \leq c\}$, com $P = P' > 0$, $c > 0$.

2 Formulação do Problema

Considere o seguinte sistema LPV com controle saturante:

$$\dot{x}(t) = A(\sigma(t))x(t) + B\text{sat}(u(t)), \quad (1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^m$ representam os vetores de estado e de entrada, respectivamente. $\text{sat}(u)$ representa a função de saturação, definida como

$$\text{sat}_{(i)}(u_{(i)}) = \text{sign}(u_{(i)})\min\{|u_{(i)}|, \bar{u}_{(i)}\},$$

para $i = 1, \dots, m$, onde $\bar{u}_{(i)}$   o limite simétrico do i -ésimo sinal de entrada. $\sigma(t) = [\sigma_{(1)}(t) \ \sigma_{(2)}(t) \ \dots \ \sigma_{(N)}(t)]'$ corresponde a um vetor de N parâmetros variantes no tempo. Assume-se que cada componente de $\sigma(t)$ é limitado em magnitude e em taxa de variação como segue:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{(j)} &\leq \sigma_{(j)}(t) \leq \bar{\sigma}_{(j)}, \\ \underline{\xi}_{(j)} &\leq \dot{\sigma}_{(j)}(t) \leq \bar{\xi}_{(j)}, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2)$$

$A(\sigma(t))$ e B são matrizes de dimensão apropriada, com $A(\sigma(t))$ sendo afim no parâmetro variante tal que $A(\sigma(t)) = A_0 + \sum_{j=1}^N \sigma_{(j)}(t)A_j$.

Considera-se uma abordagem por dados amostrados para implementar o controle, i.e. os valores de $\sigma(t)$ e $x(t)$ são medidos e disponíveis apenas no instante de amostragem t_k , com t_k sendo uma sequência crescente de escalares positivos, tais que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [t_k, t_{k+1}) = [0, +\infty)$. A diferença entre dois instantes de amostragem consecutivos é definida por $T_k = t_{k+1} - t_k$. Assume-se que T_k satisfaz $0 < T_1 \leq T_k \leq T_2$. O caso particular $T_k = T_1 = T_2 > 0$, $\forall k$ corresponde a estratégia por amostragem per dica. No intervalo $[t_k, t_{k+1})$, os dados amostrados de $x(t)$ e $\sigma(t)$ são mantidos constantes por meio de um segurador de ordem zero (ZOH). Neste caso, considera-se o sinal de controle como uma realimentação LPV dos estados amostrados descrito como:

$$\begin{aligned} u(t) &= K(\sigma(t_k))x(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ K(\sigma(t_k)) &= K_0 + \sum_{j=1}^N \sigma_{(j)}(t_k)K_j. \end{aligned} \quad (3)$$

Considere um conjunto de condições iniciais admissíveis:

$$\mathcal{E}(X_0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n; x'X_0x \leq 1\}.$$

Assim, o problema de interesse neste artigo pode ser enunciado como segue.

Problema 1 Dados T_1 e T_2 , projetar os ganhos de realimentação K_0 e K_j , $j = 1, \dots, N$, tais que, $\forall x(0) \in \mathcal{E}(X_0, 1)$, $\forall \sigma(t)$ satisfazendo (2), as trajetórias do sistema em malha fechada (1)-(3) tendem assintoticamente para a origem.

A partir do Problema 1, um problema implícito   projetar os ganhos de realimentação K_0 e K_j , $j = 1, \dots, N$, tais que o limite do intervalo de amostragem seja maximizado, ou seja, dado T_1 maximizar T_2 . Quando possível será considerada a estabilidade assintótica global da origem do sistema em malha fechada (1)-(3), neste caso, a região de atração será todo o conjunto $\mathbb{R}^n$.

3 Preliminares

3.1 Modelagem Polit pica

Para $t \in [t_k, t_{k+1})$, a função $\sigma(t)$ pode ser decomposta como:

$$\sigma(t) = \sigma(t_k) + \delta_k(t), \quad (4)$$

com $\delta_k(t)$ representando a possível variação de $\sigma(t)$ durante o intervalo de amostragem. Assumindo $\bar{\xi}_{(j)} \geq 0$, $\underline{\xi}_{(j)} \leq 0$ e $T_2 \geq T_1$, segue que:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{(j)} &\leq \sigma_{(j)}(t_k) \leq \bar{\sigma}_{(j)}, \\ T_2 \underline{\xi}_{(j)} &\leq \delta_{k(j)}(t) \leq T_2 \bar{\xi}_{(j)}, \quad j = 1, \dots, N, \\ \underline{\xi}_{(j)} &\leq \dot{\delta}_{k(j)}(t) \leq \bar{\xi}_{(j)}, \end{aligned} \quad (5)$$

uma vez que $\dot{\delta}_k(t) = \dot{\sigma}(t)$. A partir dos limites definidos em (5), nota-se que $\sigma(t_k)$, $\delta_k(t)$ e $\dot{\delta}_k(t)$ pertencem a politopos convexos em $\mathbb{R}^N$ com 2^N v rtices. Assim, $\sigma(t_k) \in \mathcal{B}_\sigma = \text{Co}\{v_1, v_2, \dots, v_{2^N}\}$, $\delta_k(t) \in \mathcal{B}_\delta = \text{Co}\{T_2 v_1^d, T_2 v_2^d, \dots, T_2 v_{2^N}^d\}$ e $\dot{\delta}_k(t) \in \mathcal{B}_{\dot{\delta}} = \text{Co}\{v_1^d, v_2^d, \dots, v_{2^N}^d\}$. Definindo-se agora as matrizes auxiliares

$$\begin{aligned} \Lambda(t_k) &= \sum_{f=1}^{2^N} \lambda_f(t_k) v_f \otimes I = \sigma(t_k) \otimes I, \\ \Gamma(t) &= \sum_{h=1}^{2^N} \rho_h(t) v_h^d \otimes I = \dot{\delta}_k \otimes I, \\ \Gamma_2(t) &= \sum_{g=1}^{2^N} \gamma_g(t) T_2 v_g^d \otimes I = \delta_k \otimes I. \end{aligned}$$

É possível escrever:

$$\begin{aligned} A(\sigma(t)) &= A_0 + \mathcal{A}\Lambda(t_k) + \mathcal{A}\Gamma_2(t), \\ K(\sigma(t_k)) &= K_0 + \mathcal{K}\Lambda(t_k), \end{aligned}$$

com $\mathcal{A} = [A_1 \ A_2 \ \dots \ A_N]$, $\mathcal{K} = [K_1 \ K_2 \ \dots \ K_N]$, $\sum_{f=1}^{2^N} \lambda_f(t_k) = \sum_{g=1}^{2^N} \gamma_g(t) = \sum_{h=1}^{2^N} \rho_h(t) = 1$ e $\lambda_f(t_k)$, $\gamma_g(t)$, $\rho_h(t) \geq 0$. Note que os ganhos de realimentação de estados $K(\sigma(t_k))$ dependem somente dos valores de

$\sigma(t)$ medidos no instante de amostragem t_k , permanecendo constantes no intervalo entre duas amostragens consecutivas. No instante de amostragem t_{k+1} , uma nova medição de $\sigma(t_{k+1})$ é obtida e então um novo ganho $K(\sigma(t_{k+1}))$ é calculado.

3.2 Tratamento da Saturação

A partir da função de saturação, pode-se definir a seguinte função zona-morta:

$$\psi_k = \text{sat}(K(\sigma(t_k))x(t_k)) - K(\sigma(t_k))x(t_k). \quad (6)$$

Com relação a esta função, o seguinte Lema é enunciado (Tarbouriech et al., 2011).

Lema 1 *Seja o conjunto $\mathcal{S}(\bar{u}, \sigma(t_k)) = \{x \in \mathbb{R}^n; |(K(\sigma(t_k)) - S(\sigma(t_k)))_{(i)}x| \leq \bar{u}_{(i)}, \text{ para } i = 1, \dots, m\}$, com $S(\sigma(t_k)) = S_0 + \sum_{j=1}^N \sigma_{(j)}(t_k)S_j$, S_0 e $S_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Então se $x(t_k) \in \mathcal{S}(\bar{u}, \sigma(t_k))$, a seguinte inequação é satisfeita $\forall U \in \mathbb{S}^m$ diagonal e definida positiva*

$$\psi_k' U (\psi_k + S(\sigma(t_k))x(t_k)) \leq 0.$$

3.3 Função de Lyapunov Dependente de Parâmetros

Considere uma função quadrática dependente de parâmetros descrita como

$$V(x, \sigma) = x' P(\sigma(t)) x, \quad (7)$$

com a matriz definida positiva $P(\sigma(t)) \in \mathbb{S}^n$, para todo $\sigma(t) \in \mathcal{B}_\sigma$, onde $P(\sigma(t)) = P_0 + \mathcal{P}\Lambda(t_k) + \mathcal{P}\Gamma_2(t)$ e $\mathcal{P} = [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_N]$.

A partir da modelagem em (4), tem-se que para $t = t_k$, $\delta_k(t) = 0$. Assim, segue que $\Gamma_2(t_k) = 0$ e

$$\begin{aligned} P(\sigma(t_k)) &= P_0 + \mathcal{P}\Lambda(t_k) = P_0 + \mathcal{P} \sum_{f=1}^{2^N} \lambda_f(t_k) v_f \otimes I \\ &= \sum_{f=1}^{2^N} \lambda_f(t_k) \mathbb{P}_s^f, \text{ com } \mathbb{P}_s^f = P_0 + \mathcal{P}(v_f \otimes I). \end{aligned}$$

Com base nos resultados em (Jungers e Castelan, 2011), pode-se enunciar os seguintes lemas.

Lema 2 *Os conjuntos de nível $c > 0$ da função (7) para $t = t_k$ são dados por*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V(c) &= \{x \in \mathbb{R}^n; V(x, \sigma) \leq c, \forall \sigma \in \mathcal{B}_\sigma\} \\ &= \bigcap_{\sigma \in \mathcal{B}_\sigma} \mathcal{E}(P(\sigma), c) = \bigcap_{f \in \{1, \dots, 2^N\}} \mathcal{E}(\mathbb{P}_s^f, c). \end{aligned} \quad (8)$$

Lema 3 *Seja $\Delta V(k) = x'(t_{k+1})P(\sigma(t_{k+1}))x(t_{k+1}) - x'(t_k)P(\sigma(t_k))x(t_k)$. Para $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x, \sigma) < c\}$, se*

$$\Delta V(k) < 0, \forall x(t_k) \in \mathcal{D} - \{0\}. \quad (9)$$

Então se $\forall x(t_0) \in \mathcal{L}_V(c) \subset \mathcal{D}$, tem-se

(i) $x(t_k) \in \mathcal{L}_V(c)$, $\forall k > 0$, i.e. $\mathcal{L}_V(c)$ é invariante e contrativo com relação a trajetória discreta (nos instantes de amostragem) do sistema (1)-(3).

(ii) $x(t_k) \rightarrow 0$, para $k \rightarrow \infty$.

4 Resultados Principais

4.1 Abordagem por looped-funcional

Para obter condições para estabilização do sistema (1) com a lei de controle (3), foca-se no comportamento do sistema entre os instantes de amostragem $[t_k, t_{k+1})$. Para isso, define-se $x_k(\tau)$ como:

$$x_k(\tau) = x(t_k + \tau), \quad \tau \in [0, T_k],$$

e $\sigma_k(\tau) = \sigma(t_k + \tau)$. A partir de (1), (3), (6) e baseado na formulação politópica da Seção 3.1, a dinâmica do sistema durante o intervalo de amostragem, i.e. para $\tau \in [0, T_k]$, é descrita por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_k(\tau) &= (A_0 + \mathcal{A}\Lambda_k(0) + \mathcal{A}\Gamma_{2k}(\tau))x_k(\tau) \\ &\quad + B(K_0 + \mathcal{K}\Lambda_k(0))x_k(0) + B\psi_k, \end{aligned} \quad (10)$$

com $\Lambda_k(0) = \Lambda(t_k)$, $\Gamma_k(0) = \Gamma(t_k)$ e $\Gamma_{2k}(\tau) = \Gamma_2(t_k + \tau)$. A partir dos resultados em (Seuret, 2012) e (Seuret e Gomes da Silva Jr., 2012), o Teorema a seguir é base para a abordagem por looped-funcional, utilizada para assegurar a estabilidade assintótica para sistemas amostrados.

Teorema 1 *Considere o sistema (10). Se existe uma função $V : \mathbb{R}^n \times \mathcal{B}_\sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$, na forma:*

$$V(x_k(\tau), \sigma_k(\tau)) = x_k'(\tau)P(\sigma_k(\tau))x_k(\tau), \quad (11)$$

com a matriz positiva definida $P(\sigma_k(\tau)) \in \mathbb{S}^n$, onde $P(\sigma_k(\tau)) = P_0 + \mathcal{P}\Lambda_k(0) + \mathcal{P}\Gamma_{2k}(\tau)$ e $\mathcal{P} = [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_N]$ e $\sigma_k(\tau) \in \mathcal{B}_\sigma$, e uma matriz $S(\sigma_k(0)) = S_0 + \mathcal{S}\Lambda_k(0)$ com $\mathcal{S} = [S_1 \ S_2 \ \dots \ S_N]$, tais que,

$$\begin{aligned} \|(K(\sigma_k(0)) - S(\sigma_k(0)))_{(i)}x_k(0)\|^2 &\leq \\ \bar{u}_{(i)}^2 V(x_k(0), \sigma_k(0)), \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (12)$$

então as seguintes declarações são equivalentes:

(i) *O incremento da função candidata de Lyapunov $\Delta V_k = V(x_{k+1}(0), \sigma_{k+1}(0)) - V(x_k(0), \sigma_k(0))$, satisfaz*

$$\Delta V_k - 2T_k \psi_k' U (\psi_k + S(\sigma_k(0))x_k(0)) < 0. \quad (13)$$

(ii) *Existe um funcional contínuo $\mathcal{V}_0 : [0, T_2] \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz para todo $x_k \in \mathbb{K}$ e $T_k \in [T_1, T_2]$*

$$\mathcal{V}_0(T_k, x_k) = \mathcal{V}_0(0, x_k) = 0, \quad (14)$$

tal que para $\mathcal{W}(\tau, x_k, \sigma_k) = V(x_k, \sigma_k) + \mathcal{V}_0(\tau, x_k)$, tem-se

$$\dot{\mathcal{W}}(\tau, x_k, \sigma_k) - 2\psi_k' U (\psi_k + S(\sigma_k(0))x_k(0)) < 0. \quad (15)$$

Além disso, se (i) ou (ii) é satisfeita, então a origem do sistema em malha fechada (1)-(3) é assintoticamente estável, para qualquer condição inicial pertencente ao conjunto:

$$\mathcal{L}_V(1) = \bigcap_{f \in \{1, \dots, 2^N\}} \mathcal{E}(\mathbb{P}_s^f, 1). \quad (16)$$

Prova: A prova deste teorema baseia-se nos resultados apresentados em (Seuret e Gomes da Silva Jr., 2012) e (Gomes da Silva Jr. et al.,

2015). Assumindo que (ii) é satisfeita, integrando (15) no intervalo $[0, T_k]$, tem-se $V(x_k(T_k), \sigma_k(T_k)) - V(x_k(0), \sigma_k(0)) - 2T_k \psi_k' U(\psi_k + S(\sigma_k(0))x_k(0)) < 0$. Como $x_k(T_k) = x_{k+1}(0)$ e $\sigma_k(T_k) = \sigma_{k+1}(0)$, então (ii) implica que (i) é verdadeira. Assumindo que (i) é satisfeita, considere que existe um funcional $\mathcal{V}_0(\tau, x_k)$ que satisfaça (14), por exemplo, $\mathcal{V}_0(\tau, x_k) = -V(x_k(\tau), \sigma_k(\tau)) + \Delta V_k \tau / T_k + V(x_k(0), \sigma_k(0))$. Pela definição de $\mathcal{W}(\tau, x_k, \sigma_k)$ e derivando em relação a τ , tem-se $\dot{V}(x_k(\tau), \sigma_k(\tau)) + \mathcal{V}_0'(\tau, x_k) = \mathcal{W}'(\tau, x_k, \sigma_k)$. Observe que $\dot{V}(x_k(0), \sigma_k(0)) = \dot{V}(x_k(T_k), \sigma_k(T_k)) = 0$. Logo, $\mathcal{W}'(\tau, x_k, \sigma_k) = \frac{1}{T_k} [\Delta V_k]$. Então como (i) é satisfeita, assegura-se que (ii) é verdadeira.

Considere agora que $x_0(0) \in \mathcal{L}_V(1)$. De (12) segue então que $|(K(\sigma_0(0)) - S(\sigma_0(0)))_{(i)} x_0(0)| \leq \bar{u}_{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, o que significa que $x_0(0) \in \mathcal{S}(\bar{u}, \sigma_0(0))$. Assim, a partir do Lema 1, segue que $\psi_0' U(\psi_0 + S(\sigma_0(0))x_0(0)) \leq 0$.

Com (15) ou (13) satisfeitas, segue então que $x_0(T_k)' P(\sigma_0(T_k)) x_0(T_k) - x_0(0)' P(\sigma_0(0)) x_0(0) < 0$. Como $x_0(T_k) = x_1(0)$ e $\sigma(t)$ é limitado, i.e. $\sigma(t) \in \mathcal{B}_\delta$, $\sigma(t)$ é contínuo. Logo, $\sigma_k(T_k) = \sigma_{k+1}(0)$, o que resulta em $x_1(0)' P(\sigma_1(0)) x_1(0) < x_0(0)' P(\sigma_0(0)) x_0(0) \leq 1$. Assim conclui-se que $x_1(0) \in \mathcal{S}(\bar{u}, \sigma_1(0))$ e $\sigma_1(0) \in \mathcal{B}_\sigma$.

Repetindo o raciocínio, tem-se que $\forall x_0(0) \in \mathcal{L}_V(1)$, segue que $\Delta V_k < 0$, $\forall k \geq 0$. Portanto, a partir do Lema 3, $x_k(0) \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$, $\forall x_0(0) \in \mathcal{L}_V(1)$. $\square$

4.2 Condições de Estabilização

A partir do Problema 1 e do Teorema 1, o seguinte teorema apresenta condições *quasi*-LMIs para o projeto de ganhos estabilizantes.

Teorema 2 *Se existem matrizes definidas positivas e simétricas $\tilde{P}_0, \tilde{P}_j, \tilde{R} \in \mathbb{S}^n$ e $\tilde{X} \in \mathbb{S}^{n+m}$, uma matriz diagonal positiva definida $\tilde{U} \in \mathbb{S}^m$, uma matriz simétrica $\tilde{F} \in \mathbb{S}^n$, matrizes $\tilde{G}, \tilde{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{Q} \in \mathbb{R}^{(3n+m) \times n}$, $\tilde{S}_0, \tilde{S}_j \tilde{K}_0, \tilde{K}_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $j = 1, \dots, N$, e um escalar positivo ε satisfazendo*

$$\tilde{\Pi}_1^{f,g,h} + T_r \tilde{\Pi}_2 + T_r \tilde{\Pi}_3 < 0 \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_1^{f,g,h} - T_r \tilde{\Pi}_3 & T_r \tilde{Q} \\ * & -T_r \tilde{R} \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} X_0 & I \\ I & \tilde{Y}' + \tilde{Y} - \tilde{P}_s^f \end{bmatrix} > 0 \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}_s^f & (\tilde{K}^f - \tilde{S}_{(i)}^f)' \\ * & \tilde{u}_{(i)}^2 \end{bmatrix} > 0 \quad (20)$$

$\forall f, g, h = 1, \dots, 2^N$, $\forall i = 1, \dots, m$ e $\forall r = 1, 2$, com

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_1^{f,g,h} &= \text{He} \{ M_1' (\tilde{P}_s^f + \tilde{P}_\delta^g) M_3 - M_{12}' \tilde{G} M_2 \\ &\quad - M_4' \tilde{S}^f M_2 + (\varepsilon M_1' + M_3') (\mathbb{A}^{f,g} \tilde{Y} M_1 \\ &\quad + B \tilde{K}^f M_2 - \tilde{Y} M_3 + B \tilde{U} M_4) - \tilde{Q} M_{12} \} \\ &\quad - M_{12}' \tilde{F} M_{12} + M_1' (\tilde{P}_d^h) M_1 - 2 M_4' \tilde{U} M_4, \\ \tilde{\Pi}_2 &= M_3' \tilde{R} M_3 + \text{He} \{ M_3' (\tilde{F} M_{12} + \tilde{G} M_2) \}, \\ \tilde{\Pi}_3 &= M_{24}' \tilde{X} M_{24}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} M_1 &= [I \ 0 \ 0 \ 0], \quad M_2 = [0 \ I \ 0 \ 0], \quad M_3 = [0 \ 0 \ I \ 0], \\ M_4 &= [0 \ 0 \ 0 \ I], \quad M_{12} = M_1 - M_2, \quad M_{24} = [M_2' \ M_4']', \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}} &= [\tilde{P}_1 \dots \tilde{P}_N], \quad \tilde{\mathcal{S}} = [\tilde{S}_1 \dots \tilde{S}_N], \quad \tilde{\mathcal{K}} = [\tilde{K}_1 \dots \tilde{K}_N], \\ \tilde{K}^f &= \tilde{K}_0 + \tilde{\mathcal{K}}(v_f \otimes I), \quad \tilde{S}^f = \tilde{S}_0 + \tilde{\mathcal{S}}(v_f \otimes I), \\ \tilde{P}_s^f &= \tilde{P}_0 + \tilde{\mathcal{P}}(v_f \otimes I), \\ \tilde{P}_\delta^g &= \tilde{\mathcal{P}} T_2 (v_g^d \otimes I), \quad \tilde{P}_d^h = \tilde{\mathcal{P}} (v_h^d \otimes I), \\ \mathbb{A}^{f,g} &= A_0 + \mathcal{A}(v_f \otimes I) + \mathcal{A} T_2 (v_g^d \otimes I), \end{aligned} \quad (23)$$

então a matriz de ganhos $K(\sigma(t_k)) = K_0 + \mathcal{K} \Lambda(t_k)$, com $K_0 = \tilde{K}_0 \tilde{Y}^{-1}$ e $K_j = \tilde{K}_j \tilde{Y}^{-1}$, $j = 1, \dots, N$, assegura que as trajetórias do sistema LPV amostrado em malha fechada (1)-(3), com $\sigma(t)$ satisfazendo (2) convergem assintoticamente para a origem, para qualquer intervalo de amostragem satisfazendo $0 < T_1 \leq T_k \leq T_2$, $\forall x(0) \in \mathcal{E}(X_0, 1)$.

Prova: Considere a função candidata de Lyapunov dependente de $\sigma(t)$ definida em (11) e o seguinte funcional

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0(\tau, x_k) &= (T_k - \tau)(x_k(\tau) - x_k(0))' [F(x_k(\tau) - x_k(0)) \\ &\quad + 2Gx_k(0)] + (T_k - \tau) \tau \begin{bmatrix} x_k(0) \\ \psi_k \end{bmatrix}' X \begin{bmatrix} x_k(0) \\ \psi_k \end{bmatrix} \\ &\quad + (T_k - \tau) \int_0^\tau \dot{x}_k'(\theta) R \dot{x}_k(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

com $R = R' > 0$, $R \in \mathbb{S}^n$ e as matrizes $F \in \mathbb{S}^n$ e $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X \in \mathbb{S}^{n+m}$. Note que $\mathcal{V}_0(\tau, x_k)$ satisfaz a condição (14) do Teorema 1. Derivando $\mathcal{W}'(\tau, x_k, \sigma_k) = V(x_k(\tau), \sigma_k(\tau)) + \mathcal{V}_0(\tau, x_k)$ em relação a τ resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{W}' &= 2\dot{x}_k'(\tau) P(\sigma_k(\tau)) x_k(\tau) + \dot{x}_k'(\tau) \dot{P}(\sigma_k(\tau)) x_k(\tau) \\ &\quad - (x_k(\tau) - x_k(0))' [F(x_k(\tau) - x_k(0)) + 2Gx_k(0)] \\ &\quad + (T_k - \tau) [2\dot{x}_k'(\tau) F(x_k(\tau) - x_k(0)) \\ &\quad + 2\dot{x}_k'(\tau) Gx_k(0)] + (T_k - 2\tau) \begin{bmatrix} x_k(0) \\ \psi_k \end{bmatrix}' X \begin{bmatrix} x_k(0) \\ \psi_k \end{bmatrix} \\ &\quad + (T_k - \tau) \dot{x}_k'(\tau) R \dot{x}_k(\tau) - \int_0^\tau \dot{x}_k'(\theta) R \dot{x}_k(\theta) d\theta, \end{aligned} \quad (24)$$

com $\dot{P}(\sigma_k(\tau)) = \mathcal{P} \Gamma_k(\tau)$. Defina $\chi(\tau) = \begin{bmatrix} x_k'(\tau) & x_k'(0) & \dot{x}_k'(\tau) & \psi_k' \end{bmatrix}'$. Como $R > 0$, $\forall Q \in \mathbb{R}^{(3n+m) \times n}$ tem-se que (Seuret e Gomes da Silva Jr., 2012):

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \dot{x}_k'(\theta) R \dot{x}_k(\theta) d\theta &\geq 2\chi'(\tau) Q(x_k(\tau) - x_k(0)) \\ &\quad - \tau \chi'(\tau) Q R^{-1} Q' \chi(\tau). \end{aligned} \quad (25)$$

Usando as matrizes auxiliares (22), a partir de (24) e (25), resulta que

$$\begin{aligned} \mathcal{W}' - 2\psi_k' U(\psi_k + S(\sigma_k(0))x_k(0)) &\leq \\ \chi'(\tau) [\tilde{\Pi}_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) + (T_k - \tau) \Pi_2 \\ &\quad + (T_k - 2\tau) \Pi_3 + \tau Q R^{-1} Q'] \chi(\tau), \end{aligned} \quad (26)$$

com $\hat{\Pi}_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) = \text{He} \{ M_3' (P_0 + \mathcal{P} \Lambda_k(0) + \mathcal{P} \Gamma_{2k}(\tau)) M_1 - M_{12}' G M_2 - Q M_{12} - M_4' U (S_0 + \mathcal{S} \Lambda_k(0)) M_2 \} - M_{12}' F M_{12} + M_1' \mathcal{P} \Gamma_k(\tau) M_1 - 2 M_4' U M_4$, $\Pi_2 = \text{He} \{ M_3' (F M_{12} + G M_2) \} + M_3' R M_3$, $\Pi_3 = M_{24}' X M_{24}$. Por ou-

tro lado, de (10), resulta que $(Y_1 x_k(\tau) + Y_2 \dot{x}_k(\tau))'[(A_0 + \mathcal{A}\Lambda_k(0) + \mathcal{A}\Gamma_{2k}(\tau))x_k(\tau) + B(K_0 + \mathcal{K}\Lambda_k(0))x_k(0) + B\psi_k - \dot{x}_k(\tau)] = 0$, para quaisquer matrizes Y_1 e $Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Defina-se então

$$\Pi_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) = \hat{\Pi}_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) + \Theta(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)),$$

com $\Theta(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)) = (Y_1 M_1 + Y_2 M_3)'[(A_0 + \mathcal{A}\Lambda_k(0) + \mathcal{A}\Gamma_{2k}(\tau))M_1 - B(K_0 + \mathcal{K}\Lambda_k(0))M_2 - M_3 - BM_4]$. Suponha que Y_2 é não singular, considere $\tilde{Y} = Y_2^{-1}$, $Y_1 = \varepsilon Y_2$, com $\varepsilon > 0$, e $\tilde{U} = U^{-1}$. Então, definindo a transformação de similaridade $\tilde{\chi}(\tau) = \Xi^{-1}\chi(\tau)$, com $\Xi = \text{diag}\{\tilde{Y}, \tilde{Y}, \tilde{U}\}$, é possível reescrever (26) como:

$$\begin{aligned} & \mathcal{W}' - 2\psi_k' U(\psi_k + (S_0 + \mathcal{S}\Lambda_k(0))x_k(0)) \leq \\ & \tilde{\chi}'(\tau)[\Xi'\Pi_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau))\Xi + (T_k - \tau)\Xi'\Pi_2\Xi \\ & + (T_k - 2\tau)\Xi'\Pi_3\Xi + \tau\Xi'QR^{-1}Q'\Xi]\tilde{\chi}(\tau). \end{aligned} \quad (27)$$

A partir do lado direito da inequação (27), define-se $\Psi_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) = \Xi'\Pi_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau))\Xi + (T_k - \tau)\Xi'\Pi_2\Xi + (T_k - 2\tau)\Xi'\Pi_3\Xi + \tau\Xi'QR^{-1}Q'\Xi$. Assim, uma condição suficiente para verificar (15) é dada por:

$$\Psi_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) < 0. \quad (28)$$

Como $\Lambda_k(0) = \sigma_k(0) \otimes I$, $\Gamma_{2k}(\tau) = \delta_k(\tau) \otimes I$ e $\Gamma_k(\tau) = \dot{\delta}_k(\tau) \otimes I$, tem-se que (28) é afim em $\sigma_k(0)$, $\delta_k(\tau)$ e $\dot{\delta}_k(\tau)$. Logo para satisfazer (28) é necessário e suficiente verificar a mesma nos vértices do politopo $\mathcal{B}_\sigma \times \mathcal{B}_{\delta_k} \times \mathcal{B}_{\dot{\delta}_k}$. Ou seja, devemos ter

$$\tilde{\Pi}_1^{f,g,h} + (T_k - \tau)\tilde{\Pi}_2 + (T_k - 2\tau)\tilde{\Pi}_3 + \tau\tilde{Q}\tilde{R}^{-1}\tilde{Q}' < 0, \quad (29)$$

com $\tilde{\Pi}_1^{f,g,h}$, $\tilde{\Pi}_2$ e $\tilde{\Pi}_3$ definidos em (21), $\forall f, g, h = 1, \dots, 2^N$. Por outro lado, levando em conta $\tau \in [0, T_k]$ e $T_k \in [T_1, T_2]$, por argumentos de convexidade, segue que (17) e (18) asseguram que (29) é satisfeita. Portanto, a condição (15) do Teorema 1 é satisfeita. (17) e (18) asseguram implicitamente que $\tilde{Y}$ é não-singular.

Considerando que $\tilde{\mathbb{P}}_s^f = \tilde{Y}'\mathbb{P}_s^f\tilde{Y}$, com $\mathbb{P}_s^f$ definido em (23), sendo $P_0 = \tilde{Y}'^{-1}\tilde{P}_0\tilde{Y}^{-1}$ e $P_j = \tilde{Y}'^{-1}\tilde{P}_j\tilde{Y}^{-1}$, para $j = 1, \dots, N$, note que a inequação (19) assegura que $X_0 \geq \mathbb{P}_s^f$, $\forall f = 1, \dots, 2^N$, i.e. $\mathcal{E}(X_0, 1) \subseteq \bigcap_{f=1, \dots, 2^N} \mathcal{E}(\mathbb{P}_s^f, 1) = \mathcal{L}_V(1)$.

Considerando agora $\tilde{\mathbb{K}}^f = \mathbb{K}^f\tilde{Y}$ e $\tilde{\mathbb{S}}^f = \mathbb{S}^f\tilde{Y}$ definidos em (23), com $K_0 = \tilde{K}_0\tilde{Y}^{-1}$, $K_j = \tilde{K}_j\tilde{Y}^{-1}$, $S_0 = \tilde{S}_0\tilde{Y}^{-1}$ e $S_j = \tilde{S}_j\tilde{Y}^{-1}$, para $j = 1, \dots, N$, pré e pós-multiplicando a condição (20) por $\text{diag}\{\tilde{Y}^{-1}, I\}$, considerando argumentos de convexidade e aplicando o complemento de Schur, tem-se que (12) é satisfeita. Assim, segue que (17), (18) e (20) implicam que (12) e (15) são satisfeitas. Como $\mathcal{E}(X_0, 1) \subseteq \mathcal{L}_V(1)$, a partir do Teorema 1, conclui-se a prova. $\square$

Observação 1 No caso em que $A(\sigma(t))$ é Hurwitz $\forall \sigma(t) \in \mathcal{B}_\sigma$, condições similares para garantir a estabilidade global da origem podem ser escritas. Neste caso, a condição de setor é satisfeita globalmente, i.e. para qualquer matriz diagonal e definida positiva $U \in \mathbb{S}^m$ a seguinte inequação é satisfeita: $\psi_k' U(\psi_k + K(\sigma(t_k))x(t_k)) \leq 0$.

4.3 Maximização do Intervalo de Amostragem

A partir do Problema 1, dado T_1 , projetar os ganhos de realimentação K_0 e K_j , $i = 1, \dots, N$, com objetivo de maximizar T_2 , para o qual as respectivas trajetórias do sistema LPV para qualquer condição inicial pertencente a $\mathcal{E}(X_0, 1)$ convirjam assintoticamente para a origem. Isto pode ser obtido através do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \max T_2 \\ & \text{sujeito à} \\ & (17), (18), (19), (20). \end{aligned} \quad (30)$$

Note que as condições (17) a (20) são LMIs para um escalar fixo ε e dados os limites T_1 e T_2 do intervalo de amostragem. Assim, o problema (30) pode ser resolvido de forma iterativa como um problema LMI para valores crescentes de T_2 e testando a factibilidade destas LMIs em um grid em ε .

5 Exemplo Numérico

Considere o seguinte sistema LPV:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,1 & 0,4 + 0,6\sigma(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{sat}(u(t)),$$

com $|\sigma(t)| \leq 1$, $|\dot{\sigma}(t)| \leq 0,2$, $\bar{u} = 1$ e $T_1 = 1$ ms. A partir de (30) com $X_0 = 1,5I$, três casos são considerados a fim de analisar a influência das matrizes variáveis dependentes de parâmetro. O primeiro consiste nas matrizes P , K e S dependentes do parâmetro. No segundo e no terceiro caso, $P_j = 0$, para $j = 1, \dots, N$. Além disso, no terceiro caso, K e S independem de σ . A Tabela 1 apresenta o máximo intervalo de amostragem obtido para os três casos. Note que, quanto mais dependência do parâmetro nas condições, melhores resultados são obtidos, i.e. obtém-se um T_2 maior.

Tabela 1: Máximo intervalo de amostragem T_2 para $T_1 = 1$ ms, nos três casos

	T_2
$P(\sigma), K(\sigma), S(\sigma)$	938ms
$P, K(\sigma), S(\sigma)$	933ms
P, K, S	897ms

Considerando agora P , K e S dependentes de parâmetro, os seguintes casos são considerados: caso (a) $T_k \in [1; 200]$ ms e o caso (b) $T_k \in [1; 938]$ ms, os valores das matrizes K e P para cada caso estão na Tabela 2. Verifica-se em ambos os casos que $\mathcal{E}(\mathbb{P}_s^1, 1) \subset \mathcal{E}(\mathbb{P}_s^2, 1)$, então $\mathcal{L}_V(1) = \mathcal{E}(\mathbb{P}_s^1, 1) = \mathcal{E}(P_0 + \sigma P_1, 1)$, conforme a Figura 1 que apresenta os conjuntos $\mathcal{E}(X_0, 1)$, $\mathcal{E}(\mathbb{P}_s^1, 1)$ e $\mathcal{E}(\mathbb{P}_s^2, 1)$ em linha sólida, tracejada e pontilhada, respectivamente. Considerando $T_k \in [1; 938]$ ms, a Figura 1 apresenta também trajetórias do sistema. Note que as trajetórias para condições iniciadas na borda do conjunto $\mathcal{L}_V(1)$ convergem para a origem, enquanto para condições iniciais não muito distantes do conjunto, algumas trajetórias divergentes são obtidas (em tracejado).

Tabela 2: Matrizes K e P para os casos (a) e (b)

Caso (a)	Caso (b)
$T_k \in [1; 200]$ ms	$T_k \in [1; 938]$ ms
$K_0 = [-0, 240 \quad -2, 030]$	$K_0 = [-0, 148 \quad -1, 100]$
$K_1 = [-0, 014 \quad -0, 716]$	$K_1 = [0, 014 \quad -0, 228]$
$P_0 = \begin{bmatrix} 0, 0214 & 0, 1073 \\ 0, 1073 & 1, 1505 \end{bmatrix}$	$P_0 = \begin{bmatrix} 0, 0639 & 0, 1056 \\ 0, 1056 & 1, 3753 \end{bmatrix}$
$P_1 = \begin{bmatrix} 0, 0019 & 0, 0154 \\ 0, 0154 & 0, 1276 \end{bmatrix}$	$P_1 = \begin{bmatrix} 0, 0046 & 0, 0183 \\ 0, 0183 & 0, 0778 \end{bmatrix}$

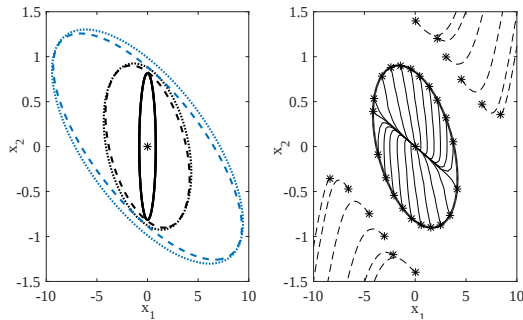


Figura 1: Esquerda: Conjuntos $\mathcal{E}(X_0, 1)$ (linha sólida), $\mathcal{E}(\mathbb{P}_s^1, 1)$ (tracejada) e $\mathcal{E}(\mathbb{P}_s^2, 1)$ (pontilhada) para o caso (a) (em azul) e (b) (em preto). Direita: $\mathcal{L}_V(1)$ e estados $x(t)$ para $T_k \in [1; 938]$ ms.

6 Conclusão

Considerando uma modelagem politópica do sistema LPV, este trabalho apresentou condições *quasi*-LMI para projeto de ganhos de realimentação de estados amostrados LPV estabilizantes. Estas condições são obtidas com o uso de um *looped*-funcional dependente de parâmetro e de condições de setor generalizadas para tratar a saturação. Em particular, considera-se formalmente a possibilidade de amostragem aperiódica e o fato de que apesar dos parâmetros da planta variarem continuamente, os ganhos do controlador são atualizados apenas com as informações destes parâmetros nos instantes de amostragem.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao apoio recebido pelo CNPq (Bolsa 140551/2015-8, Univ. 443979/2014-6, PQ. 305886/2015-0 e 305979/2015-9).

Referências

Braga, M. F., Morais, C. F., Tognetti, E. S., Oliveira, R. C. e Peres, P. L. (2015). Discretization and event triggered digital output feedback control of lpv systems, *Syst. & Contr. Letters* **86**: 54–65.

Cloosterman, M., Hetel, L., Wouw, N. V. D., Heemels, W., Daafouz, J. e Nijmeijer, H. (2010). Controller synthesis for networked control systems, *Automatica* **46**(10): 1584–1594.

Du, H., Zhang, N., Samali, B. e Naghdy, F. (2012). Robust sampled-data control of structures subject to parameter uncertainties and actuator saturation, *Engineering Structures* **36**: 39–48.

Fridman, E. (2010). A refined input delay approach to sampled-data control, *Automatica* **46**(2): 421–427.

Gomes da Silva Jr., J. M., Moraes, V. M., Flores, J. V. e Palmeira, A. H. K. (2015). Sampled-data lpv control: a looped functional approach, *1st IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems*, Vol. 48, Elsevier, Grenoble, pp. 19–24.

Hespanha, J. P., Naghshtabrizi, P. e Xu, Y. (2007). A survey of recent results in networked control systems, *Proceedings-IEEE* **95**(1): 138.

Huang, Y. e Jadbabaie, A. (1999). Nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control: An enhanced quasi-lpv approach, *Proceedings of the IFAC World Congress*, Beijing, pp. 85–90.

Jungers, M. e Castelan, E. B. (2011). Gain-scheduled output control design for a class of discrete-time nonlinear systems with saturating actuators, *Systems & Control Letters* **60**(3): 169–173.

Naghshtabrizi, P., Hespanha, J. e Teel, A. (2008). Exponential stability of impulsive systems with application to uncertain sampled-data systems, *Systems & Control Letters* **57**(5): 378–385.

Ramezanifar, A., Mohammadpour, J. e Grigoriadis, K. (2012). Sampled-data control of LPV systems using input delay approach, *51st IEEE CDC*, Maui, USA, pp. 6303–6308.

Seuret, A. (2012). A novel stability analysis of linear systems under asynchronous samplings, *Automatica* **48**(1): 177–182.

Seuret, A. e Gomes da Silva Jr., J. (2012). Taking into account period variations and actuator saturation in sampled-data systems, *Systems & Control Letters* **61**: 1286–1293.

Shi, T. e Su, H. (2014). Sampled-data MPC for LPV systems with input saturation, *IET Control Theory & Applications* **8**(17): 1781–1788.

Sivashankar, N. e Khargonekar, P. P. (1994). Characterization of the $\mathcal{L}_2$ -induced norm for linear systems with jumps with applications to sampled-data systems, *SIAM Journal on Control and Optimization* **32**(4): 1128–1150.

Tan, K., Grigoriadis, K. e Wu, F. (2002). Output-feedback control of LPV sampled-data systems, *International Journal of Control* **75**(4): 252–264.

Tarbouriech, S., Garcia, G., Gomes da Silva Jr., J. M. e Queinnec, I. (2011). *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*, 1st edn, Springer, London.