

UM MODELO EM REDES DE PETRI ESTOCÁSTICAS PARA A SIMULAÇÃO E ANÁLISE DE DESEMPENHO DE SISTEMAS PÚBLICOS DE COMPARTILHAMENTO DE BICICLETAS

INGRID ANTUNES*, LILIAN K. CARVALHO*, JOÃO C. BASILIO*

**COPPE - Programa de Engenharia Elétrica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro, RJ, Brasil*

ingrid@poli.ufrj.br, lilian.carvalho@poli.ufrj.br, basilio@poli.ufrj.br

Abstract— The essence of a public bicycle sharing system (PBSS) is very simple: to allow someone to pick up a bicycle at some point of a region and return it to another place. In order to guarantee that there will be bicycles available for pick up, a redistribution vehicle is used to move bicycles from stations that are almost full to those almost empty; this is usually referred to as balancing operation. This poses an important research problem: the modeling of PBSS suitable for simulating balancing strategies prior to its application to the real system. In this paper, we address the problem of modeling PBSS using a generalized stochastic Petri net model. The proposed model has the following advantages: (i) PBSSs with arbitrary number of stations can be modeled; and (ii) it takes into account the stochastic characteristics of PBSSs. Based on this model, an algorithm for carrying out simulations of PBSSs to validate designed balancing strategies has been developed. An example applied to real PBSS is used to illustrate the model and the simulation algorithm.

Keywords— Discrete event systems, Petri net models, Public bicycle transportation system.

Resumo— O objetivo de um sistema público de compartilhamento de bicicletas (SPCB) é muito simples: permitir que alguém retire uma bicicleta em um determinado ponto de uma região e retorne-a em um outro lugar. Para garantir a disponibilidade de bicicletas, um veículo de redistribuição é utilizado para levar as bicicletas das estações que estão quase lotadas para aquelas quase vazias; esta operação é denominada balanceamento. Isso leva à formulação de um importante problema, isto é, a modelagem de um SPCB adequado para simular estratégias de balanceamento antes de sua implementação no sistema real. Neste artigo, consideramos o problema de se modelar SPCB utilizando redes de Petri generalizadas. O modelo proposto possui as seguintes vantagens: (i) SPCBs com qualquer número de estações podem ser modelados; (ii) ele leva em conta a natureza estocástica do SPCB. Baseado no modelo proposto, será desenvolvido um algoritmo de simulação de SPCBs que permite validar estratégias de balanceamento que estão sendo desenvolvidas. Um exemplo aplicado a um SPCB real será utilizado para ilustrar o modelo proposto e o algoritmo de simulação.

Palavras-chave— Sistemas a eventos discretos, redes de Petri, sistema público de compartilhamento de bicicletas.

1 Introdução

A objetivo de um sistema público de compartilhamento de bicicletas (SPCB) é muito simples: permitir que um indivíduo retire uma bicicleta em algum ponto de uma região e a retorne em outro. Em um SPCB, cada estação tem um número fixo de suportes para bicicletas, que é definido de acordo com a demanda de usuários e com o nível de utilização do serviço, e para manter o SPCB em um nível adequado de funcionamento, utiliza-se, em geral, um veículo motorizado para redistribuir as bicicletas entre as estações. Essa operação é denominada balanceamento de bicicletas.

O problema do SPCB tem recebido bastante atenção na literatura. Shu, Chou, Liu, Teo & Wang (2010) utilizam grafos para modelar o SPCB e, usando pesquisa operacional, desenvolve modelos práticos. Vogel, Greisera & Mattfelda (2011) analisam dados operacionais extensos retirados de sistemas de compartilhamento de bicicletas e usa “data mining” para determinar padrões de atividades e entender as causas espaciais e temporais para os desequilíbrios entre as estações. Mais recentemente, Labadi, Benarbia, Barbot, Hamaci & Omari (2015) propõem um mo-

delo em redes de Petri estocástica com arcos variáveis, dependentes das marcações, para modelar SPCBs e sugerem um algoritmo de simulação, baseado na rede de Petri proposta, para simulações de SPCBs. Outros trabalhos (Benchimol, Benchimol, Chappert, De La Taille, Laroche, Meunier & Robinet 2011, Chemla, Meunier & Wolfier Calvo 2013, Caggiani & Ottomanelli 2013) abordam um outro problema relacionado a SPCBs: a determinação de estratégias de balanceamento.

Neste artigo, iremos propor um modelo em redes de Petri para a simulação e análise de desempenho de SPCBs que leva em consideração aspectos específicos dos SPCBs tais como a natureza estocástica associada aos movimentos dos usuários, alterações no número de estações e nas suas capacidades e a rota do veículo de redistribuição. O modelo aqui proposto melhora significativamente o proposto por Labadi et al. (2015), uma vez que os pesos dos arcos da rede de Petri do modelo são fixos, o que permite obter de forma direta as correspondentes equações dinâmicas, além de permitir que um algoritmo para a simulação de SPCBs possa ser obtido de forma direta a partir do modelo proposto. Neste artigo, iremos considerar a mesma política de redistribuição de Labadi et al.

(2015), qual seja, que o veículo de redistribuição visita todas as estações em cada ronda.

Este artigo está organizado como a seguir. Na Seção 2, apresentamos uma breve revisão sobre redes de Petri, finalizando com a definição de redes de Petri estocásticas. Na Seção 3, exibimos o modelo em redes de Petri estocásticas para o SPCB e, na Seção 4, definimos as equações de estados para esse modelo. Na Seção 5, propomos um algoritmo de simulação, que é aplicado ao SPCB a ser implementado na Universidade Federal do Rio de Janeiro na Seção 6. Finalmente apresentamos algumas conclusões e trabalhos futuros na Seção 7.

2 Fundamentos Teóricos

Um grafo de rede de Petri (Peterson 1981, Murata 1989) é um grafo bipartido ponderado $\mathcal{N} = (P, T, Pre, Post)$, em que $P = \{p_1, p_2, \dots, p_{n_P}\}$ é o conjunto finito de lugares, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_{n_T}\}$ é o conjunto finito de transições e Pre (resp. $Post$) é uma matriz de dimensão $n_P \times n_T$ em que o elemento (i, j) corresponde ao peso do arco que conecta o lugar p_i (resp. transição t_j) à transição t_j (resp. ao lugar p_i). Os conjunto de lugares de entrada e saída de uma transição t_j são, respectivamente, definidos como: $I(t_j) = \{p_i \in P : Pre(i, j) \neq 0\}$ e $O(t_j) = \{p_i \in P : Post(i, j) \neq 0\}$. O conjunto de transições T é particionado como $T = T_i \cup T_d$, em que as transições em T_d disparam após um atraso pré-determinado enquanto que as transições em T_i podem disparar imediatamente ou após um tempo não especificado. Nesse caso, a rede de Petri é denominada temporizada.

Uma rede de Petri estendida é definida como: $\mathcal{EN} = (\mathcal{N}, Inhib)$, em que $Inhib : (P \times T) \rightarrow \mathbb{N}$ é a função que atribui pesos aos arcos inibidores da rede. O conjunto de todos os lugares inibidores de t_j é denotado por $I_{Inhib}(t_j)$. Um arco inibidor é graficamente representado com um pequeno círculo no lugar da seta em um arco orientado e conecta somente lugares a transições. É importante ressaltar que $Pre(p_i, t_j) = 0, \forall p_i \in I_{Inhib}(t_j)$.

A função marcação $m : P \rightarrow \mathbb{Z}_+$, where $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, atribui um número inteiro não negativo a cada lugar da rede. O vetor $\underline{m} = [m(p_1) m(p_2) \dots m(p_{n_P})]$ formado pelas marcações de todos os lugares da rede de Petri define o estado da rede. O vetor $\underline{m}_0 = [m_0(p_1) m_0(p_2) \dots m_0(p_{n_P})]$ denota a marcação (estado) inicial da rede de Petri, ou seja, o número de fichas inicialmente atribuído a cada lugar da rede. Adicionando-se marcações a $\mathcal{EN}$, obtém-se a rede de Petri estendida com marcação, que é denotada por: $\mathcal{EN}_m = (\mathcal{EN}, \underline{m}_0)$.

Uma transição t_j está habilitada se as seguintes condições são satisfeitas:

- $m(p_i) \geq Pre(p_i, t_j), \forall p_i \in I(t_j) \setminus I_{Inhib}(t_j),$
- $m(p_i) < Inhib(p_i, t_j), \forall p_i \in I_{Inhib}(t_j).$ (1)

Após o disparo de uma transição habilitada t_j , a rede de Petri alcança um novo estado $\underline{m}' = \underline{m} + (Post - Pre)\underline{\sigma}$, em que $\underline{\sigma}$ é um vetor cuja j -ésima componente é igual a 1 e as demais iguais a 0. Neste artigo, iremos supor que várias transições podem disparar simultaneamente; nesse caso, todas as componentes de $\underline{\sigma}$ correspondentes às transições que disparam são iguais a 1 e as demais iguais a 0.

Duas transições t_i e $t_j, i \neq j$, formam um conflito estrutural se $I(t_i) \cap I(t_j) \neq \emptyset$. Além disso, se para todas as marcações $\underline{m}$ para as quais t_i e t_j estão simultaneamente habilitadas, o disparo de uma desabilita a outra, então t_i e t_j formam um conflito efetivo (David & Alla 2005). Uma marcação da rede de Petri que envolve um conflito efetivo é chamada de volátil se habilita pelo menos uma transição que dispara imediatamente após a sua habilitação, e perceptível se habilita somente transições temporizadas (Chiola, Marsan, Balbo & Conte 1993). Iremos supor aqui que as transições imediatas têm prioridade de disparo sobre as transições estocásticas. Se uma marcação volátil habilita duas ou mais transições imediatas, é necessário definir uma lei de prioridade. Uma maneira de se definir prioridade é atribuindo-se uma probabilidade de disparo para cada transição imediata envolvida no conflito, ou seja, se $T_c \subseteq T_i$ denota o conjunto de transições imediatas habilitadas por uma marcação volátil, então $P(t_k|\underline{m})$ define a probabilidade de t_k disparar quando a rede de Petri tem marcação $\underline{m}$; note que, neste caso, $\sum_{t_k \in T_c} P(t_k|\underline{m}) = 1$. Por outro lado, transições temporizadas habilitadas por marcações tangíveis são definidas em termos de variáveis aleatórias que descrevem seus tempos de atraso, i.e., $\Lambda(t_k) = X(\underline{t})$, em que $\underline{t}$ é um vetor cujas componentes são valores de tempo utilizados para descrever a variável aleatória X ; por exemplo, se t_k tem uma distribuição uniforme (resp. de Poisson), então $\Lambda(t_k) = \text{Uniforme}(t_i, t_f)$ (resp. $\Lambda(t_k) = \text{Poisson}(t_{med})$).

Uma rede de Petri estocástica generalizada estendida com marcação é definida por: $GSPN = (\mathcal{EN}, \underline{m}_0, \Lambda)$, em que $\Lambda(t_k)$ é definido da seguinte forma: (i) $\Lambda(t_k) = P(t_k|\underline{m})$, se t_k for uma transição imediata habilitada pela marcação volátil $\underline{m}$, ou não definida, se t_k não for uma transição imediata ou temporizada; (ii) $\Lambda(t_k) = X(\underline{t})$ se t_k for uma marcação temporizada, ou $\Lambda(t_k) = t_d$ se t_k for uma transição temporizada cujo tempo de disparo é exatamente t_d .

3 Um modelo em rede de Petri estocástica para o balanceamento de SPCBs

A figura 1 apresenta a sub-rede correspondente à estação S_1 e os lugares e transições do sistema de balanceamento que interagem com essa esta-

ção. Nesse modelo podemos distinguir três sub-redes: (i) sub-rede do fluxo de bicicletas (lugares com contorno na cor preta); (ii) sub-rede de controle das estações (lugares com contorno de cor azul); (iii) sub-rede do circuito de redistribuição (lugares com contornos em laranja); o círculo com duas cores diferentes indica que o lugar pertence a duas sub-redes. É importante ressaltar que os lugares PBS_{Car} e PES_{Car} , que representam, respectivamente, o número de bicicletas e suportes disponíveis no veículo de redistribuição, não devem ser replicados para as sub-redes das outras estações do SPCB, pois são lugares compartilhados pelas N estações do sistema; nesse sentido, os arcos que conectam esses lugares para as transições TE_{ji} , para $j = 1, 2, i = 1, 2, \dots, N$ devem aparecer no modelo completo.

3.1 Sub-rede do fluxo de bicicletas

Essa sub-rede modela o fluxo de bicicletas e descreve a retirada de uma bicicleta de qualquer uma das estações que tenha pelo menos uma bicicleta disponível e a devolução dessa bicicleta para a mesma, ou para qualquer outra estação que tenha um suporte vazio. Cada estação S_i do SPCB é modelada pelos seguintes lugares: PBS_i , PES_i , PR_i , PR_{ij} ($j = 1, 2, \dots, N$), PIn_i e $PWin_i$ e as transições conectadas a eles. As marcações $m(PBS_i)$ e $m(PES_i)$ representam, respectivamente, o número de bicicletas e suportes disponíveis na estação S_i . Note que $m(PBS_i) + m(PES_i) = C_i$, em que C_i denota a capacidade da estação S_i , isto é, o número de suportes na estação.

Quando o usuário retira uma bicicleta da estação S_i , ele tem em mente uma estação de destino. Tal comportamento é modelado na sub-rede do fluxo de bicicletas da seguinte forma. Quando há pelo menos uma ficha no lugar PBS_i , a transição $TOut_i$ encontra-se habilitada e seu disparo modela a retirada de uma bicicleta. A ficha é, então, colocada no lugar PR_i , recurso comum para as transições $TInd_{ij}$ ($j = 1, 2, \dots, N$), caracterizando um conflito efetivo. Esse conflito é resolvido pelo disparo aleatório de uma das transições de acordo com suas probabilidades de disparo, que são definidas a partir de pesquisas realizadas previamente ou a partir de dados da utilização do SPCB.

Após o disparo da transição $TInd_{ij}$, que representa a escolha da estação de destino, a transição temporizada Tt_{ij} é habilitada. O tempo de disparo da transição Tt_{ij} é estocástico, modelado por uma variável aleatória uniformemente distribuída definida em função da distância entre as estações S_i e S_j e pela velocidade média do usuário pela ciclovias que interliga as estações.

Quando o indivíduo chega à estação de destino S_j e se nela houver pelo menos uma vaga disponível sem que haja fila de espera, a bicicleta é devolvida à estação, o que é modelado pela au-

sência de fichas no lugar $PWin_j$ e pelo disparo instantâneo da transição TIn_j . Caso a estação de destino esteja lotada, o usuário terá que decidir se permanecerá na estação até que uma vaga esteja disponível (transição T_{jj}) ou se vai para qualquer outra estação (transição T_{ij} para $i \neq j$). Se a bicicleta chega a uma estação lotada ($m(PIn_i) > 0$ e $m(PBS_i) = C_i$), e portanto, as transições T_{ij} ($j = 1, 2, \dots, N$) formarão um conflito. Novamente, uma transição T_{ij} dispara de acordo com a sua probabilidade; para qualquer marcação da rede do modelo, o somatório das probabilidades de disparo das transições T_{ij} ($j = 1, 2, \dots, N$) de uma estação S_i é igual a 1. O arco inibidor, que liga o lugar $PWin_i$ à transição TIn_i , garante que o usuário não poderá retornar a bicicleta à estação S_i caso haja fila de espera por uma vaga.

3.2 Sub-rede do controle das estações

A sub-rede do controle das estações é composta pelos lugares PBS_i , PES_i , $PCar_i$, PE_i , PBS_{Car} e PES_{Car} , as transições $TAdd_i$, $TRem_i$, TE_{1i} , TE_{2i} e TE_{3i} e seus arcos correspondentes. O parâmetro que determina o balanceamento da estação é o número de reordenação, denotado por R_i , que representa o número de bicicletas que a estação S_i deve ter após o veículo de redistribuição sair dela.

Quando o veículo de redistribuição chega à estação S_i , o lugar $PCar_i$ recebe uma ficha; então $m(PCar_i) = 1$. Dependendo do número de bicicletas e de suportes disponíveis na estação naquele instante, marcações $m(PBS_i)$ e $m(PES_i)$, respectivamente, o veículo pode colocar bicicletas na estação (disparo da transição $TAdd_i$) ou retirar bicicletas da estação (disparo da transição $TRem_i$). Existem algumas situações, em que, ao chegar na estação, o veículo de redistribuição não realizará o balanceamento, quais sejam: (i) quando o veículo precisar remover bicicletas excedentes da estação ($m(PBS_i) > R_i$) mas já estiver lotado ($m(PBS_{Car}) = C_V$); nesse caso, a transição de saída TE_{1i} será habilitada; (ii) quando for necessário adicionar bicicletas na estação S_i ($m(PES_i) > C_i - R_i$) e o veículo de redistribuição encontra-se vazio; nesse caso, a transição de saída TE_{2i} será habilitada; (iii) quando a quantidade de bicicletas disponíveis na estação controlada S_i for exatamente igual ao número de reordenação ($m(PBS_i) = R_i$ e $m(PES_i) = C_i - R_i$); nesse caso, será habilitada a transição de saída TE_{3i} . Após o disparo de uma das transições que modelam a saída do veículo da estação, o lugar $PCar_i$ perderá uma ficha e o lugar PE_i ganhará uma ficha, indicando o término do controle da estação S_i .

3.3 Sub-rede do circuito de redistribuição

Essa sub-rede é formada pelos lugares $PCar_i$, PE_i ($i = 1, 2, \dots, N$), $PCar_C$ e $PCar_{CR}$, as transições $TCar_{i(i+1)}$ ($i = 1, 2, \dots, N - 1$), TE_{1i} , TE_{2i} , TE_{3i}

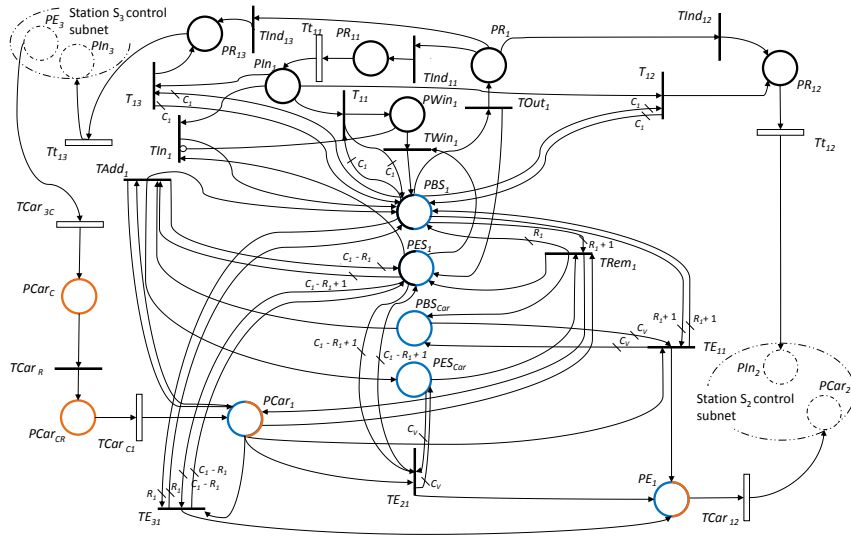


Figura 1: Sub-rede do controle da estação S_1 control da rede de Petri do modelo proposto.

($i = 1, 2, \dots, N$), $TCar_{NC}$, $TCar_R$ e $TCar_{C1}$ e seus arcos correspondentes. O modelo proposto considera que o veículo de redistribuição visita sucessivamente as estações $S_1, S_2, \dots, S_N$, nessa ordem, formando um caminho fechado.

O veículo se mantém esperando no centro de redistribuição, representado pela ficha no lugar $PCar_C$. A permissão para que o veículo inicie sua ronda é modelada pelo disparo da transição $TCar_R$. Após o disparo da transição $TCar_R$, a transição temporizada $TCar_{C1}$ torna-se habilitada, tendo um tempo de atraso estocástico determinado pela distância entre o centro de redistribuição e a primeira estação. A marcação $m(PCar_i) = 1$ indica que o veículo de redistribuição encontra-se na estação S_i para realizar seu rebalanceamento. Após o disparo de TE_{1i} , TE_{2i} ou TE_{3i} , a ficha do lugar $PCar_i$ é transferida para o lugar PE_i , indicando que o veículo está liberado para deixar S_i . O deslocamento do veículo de uma estação S_i para outra estação S_{i+1} é modelada pela transição temporizada $TCar_{i(i+1)}$, em que seu tempo de retardo é uma variável aleatória uniformemente distribuída definida baseada no tempo em que o veículo realiza o percurso entre as estações S_i e S_{i+1} . Após o controle da última estação, o retorno do veículo ao centro é representado pelo disparo da transição $TCar_{NC}$.

4 Equações de estado do modelo em rede de Petri do modelo do SPCB com N estações

Nessa seção, iremos obter as equações de estado para a rede de Petri do modelo de um SPCB composto por N estações.

As equações de estados que descrevem a dinâmica do sistema são dadas por:

$$m_{k+1}(\underline{p}) = m_k(\underline{p}) + A\sigma_k(\underline{t}), \quad (2a)$$

com a restrição

$$Inhib(PWin_i, TIn_i) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2b)$$

em que $A = Post - Pre$. A presença da função *Inhib* assegura que as transições TIn_i , $i = 1, 2, \dots, N$, irão disparar apenas quando $m_k(PWin_i) = 0$.

Definem-se os seguintes vetores de transições:

$$\begin{aligned} \underline{t}_{Si} &= [TOut_i \ TIn_i \ TWin_i \ TAdd_i \ TRem_i \ TE_{1i} \\ &\quad TE_{2i} \ TE_{3i}]^T, \\ \underline{tr}_{Si} &= [T_{i1} \ T_{i2} \ \dots \ T_{iN}]^T, \quad \underline{tt}_{Si} = [Tt_{i1} \ Tt_{i2} \ \dots \ Tt_{iN}]^T, \\ \underline{td}_{Si} &= [Tind_{i1} \ Tind_{i2} \ \dots \ Tind_{iN}]^T, \\ \underline{t}_{CR} &= [TCar_{12} \ TCar_{23} \ \dots \ TCar_{(N-1)N} \ TCar_{NC} \\ &\quad TCar_R \ TCar_{C1}]^T, \end{aligned} \quad (3)$$

e os seguintes vetores de lugares

$$\begin{aligned} \underline{p}_{Si} &= [PIn_i \ PE_i \ PES_i \ PBS_i \ PR_i \ PWin_i \ PCar_i]^T, \\ \underline{p}_{CR} &= [PCar_C \ PCar_{CR}]^T, \quad \underline{p}_C = [PBS_{Car} \ PES_{Car}]^T, \\ \underline{pr}_{Si} &= [PR_{i1} \ PR_{i2} \ \dots \ PR_{iN}]^T, \end{aligned} \quad (4)$$

$i = 1, 2, \dots, N$. Utilizando as Equações (3) e (4), podemos definir os seguintes vetores de lugares e transições:

$$\begin{aligned} \underline{t} &= [\underline{t}_{S1}^T \ \dots \ \underline{t}_{SN}^T \ \underline{tr}_{S1}^T \ \dots \ \underline{tr}_{SN}^T \ \underline{tt}_{S1}^T \ \dots \ \underline{tt}_{SN}^T \ \underline{td}_{S1}^T \ \dots \ \underline{td}_{SN}^T \ \underline{t}_{CR}^T]^T \\ \underline{p} &= [\underline{p}_{S1}^T \ \dots \ \underline{p}_{SN}^T \ \underline{p}_{CR}^T \ \underline{p}_{S1}^T \ \dots \ \underline{p}_{SN}^T \ \underline{p}_C^T]^T. \end{aligned} \quad (5)$$

Com base na rede de Petri do modelo da Figura 1 e utilizando os vetores de lugares e transições definidos na Equação (5), obtemos as seguintes matrizes *Pre* e *Post*:

$$Pre = \begin{pmatrix} -PreS & +PreT & -0 & +PreTd & \\ -0 & +0 & -0 & +0 & PreCr \\ -0 & -0 & +I & -0 & -0 \\ -PreC & -0 & -0 & -0 & -0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$Post = \begin{pmatrix} PostS & PostTa & PostTt & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & PostTb & 0 & I \\ PostC & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Os blocos de matrizes que compõem as matrizes Pre e $Post$ acima são definidos da seguinte forma:
1) $PreS$ e $PostS$: matrizes de dimensão $7N \times 8N$, diagonais por blocos, que relacionam os lugares e as transições dos vetores $\underline{t}_{Si}$ e $\underline{p}_{Si}$, $i = 1, 2, \dots, N$, da seguinte forma:

$$PreS = \text{blockdiag}\{PreS_1, PreS_2, \dots, PreS_N\},$$

$$PostS = \text{blockdiag}\{PostS_1, PostS_2, \dots, PostS_N\},$$

em que

$$PreS_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & C_i - R_i + 1 & 0 & 0 & C_i - R_i + 1 & C_i - R_i \\ 1 & 0 & 0 & 0 & R_i + 1 & R_i + 1 & 0 & R_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$PostS_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & C_i - R_i & 1 & 0 & C_i - R_i + 1 & C_i - R_i \\ 0 & 1 & 1 & 1 & R_i & R_i + 1 & 0 & R_i \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) $PreT$, $PostTa$ e $PostTb$: matrizes diagonais por blocos cujas colunas estão associadas às transições dos vetores $\underline{t}_{Si}$. As linhas das matrizes $PreT$ e $PostTa$, correspondem aos vetores $\underline{p}_{Si}$, enquanto as linhas da matriz $PostTb$ estão associadas aos vetores $\underline{pr}_{Si}$, $i = 1, 2, \dots, N$. Sendo dadas por:

$$PreT = \text{blockdiag}\{PreT_1, PreT_2, \dots, PreT_N\},$$

$$PostTa = \text{blockdiag}\{PostTa_1, PostTa_2, \dots, PostTa_N\},$$

$$PostTb = \text{blockdiag}\{PostTb_1, PostTb_2, \dots, PostTb_N\},$$

sendo

$$PreT_i = [\underline{e}_1 + C_i \underline{e}_4 \quad \underline{e}_1 + C_i \underline{e}_4 \quad \dots \quad \underline{e}_1 + C_i \underline{e}_4]_{7 \times N};$$

$$PostTa_i = [\underbrace{C_i \underline{e}_4 C_i \underline{e}_4 \dots C_i \underline{e}_4}_{i-1 \text{ colunas}} \underbrace{C_i \underline{e}_4}_{N-i \text{ colunas}}]_{7 \times N};$$

$$PostTb_i = [\underbrace{\underline{e}_1 \quad \underline{e}_2 \dots \underline{e}_{i-1}}_{i-1 \text{ colunas}} \underbrace{0 \quad \underline{e}_{i+1} \dots C_i \underline{e}_N}_{N-i \text{ colunas}}]_{N^2 \times N}.$$

Nas definições acima, $\underline{e}_k$ denota a k -ésima coluna da matriz identidade I_l de dimensão l , sendo l determinado pelo número de linhas da matriz em que o vetor $\underline{e}_k$ aparece.

3) $PostTt$: Matriz de dimensão $7N \times N^2$ formado por N blocos de matrizes, em que suas linhas são associadas com os vetores $\underline{p}_{Si}$ e suas colunas correspondem aos vetores de transições $\underline{tt}_{Si}$, $i = 1, 2, \dots, N$, dada por:

$$PostTt = [PostTt_1 \quad PostTt_2 \quad \dots \quad PostTt_N],$$

em que

$$PostTt_i = [\underline{e}_1 \quad \underline{e}_8 \dots \underline{e}_{7(i-1)+1} \dots \underline{e}_{7(N-1)+1}]_{7N \times N}.$$

4) $PreTd$: Matriz diagonal por blocos, de dimensão $7N \times N^2$, em que suas linhas e colunas estão associadas, respectivamente, aos vetores $\underline{p}_{Si}$ e $\underline{td}_{Si}$, para $i = 1, 2, \dots, N$, sendo formadas como:

$$PreTd = \text{blockdiag}\{PreTd_1, PreTd_2, \dots, PreTd_N\},$$

sendo $PreTd_i = [\underline{e}_4 \quad \underline{e}_4 \dots \underline{e}_4]_{7 \times N}$.

5) $PreCr$ e $PostCr$: matrizes de dimensões $(7N+2) \times (N+2)$, que relacionam os vetores $\underline{t}_{Cr}$ e $\underline{p}_{SC} = [\underline{p}_{S1} \quad \underline{p}_{S2} \dots \underline{p}_{SN} \quad \underline{p}_{CR}]$, dadas por:

$$PreCr = [\underbrace{\underline{e}_2 \quad \underline{e}_9 \dots \underline{e}_{(i-1)+2} \dots \underline{e}_{(N-1)+2}}_{N \text{ colunas}} \quad \underline{e}_{7N+1} \quad \underline{e}_{7N+2}]_{(7N+2) \times (N+2)};$$

$$PostCr = [\underbrace{\underline{e}_{14} \quad \underline{e}_{21} \dots \underline{e}_{7(i+1)} \dots \underline{e}_{7((N-1)+1)}}_{N-1 \text{ colunas}} \quad \underline{e}_{7((N-1)+1)+1} \quad \underline{e}_{7((N-1)+1)+2} \quad \underline{e}_7]_{(7N+2) \times (N+2)}.$$

6) $PostTt$: matrizes de dimensão $2 \times 8N$, formadas por N blocos de matrizes, cujas linhas e colunas estão associadas, respectivamente, aos vetores $\underline{p}_C$ e $\underline{t}_{Si}$, $i = 1, 2, \dots, N$, definidas como:

$$PreC = [PreCar \quad PreCar \dots PreCar]_{2 \times 8N},$$

$$PostC = [PostCar \quad PostCar \dots PostCar]_{2 \times 8N},$$

em que

$$PreCar = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & C_V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & C_V & 0 \end{pmatrix},$$

$$PostCar = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & C_V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & C_V & 0 \end{pmatrix}.$$

Observação 1 (Dimensão da rede de Petri do modelo proposto) Não é difícil verificar que a matriz de incidência associada à rede de Petri do modelo proposto tem dimensão $(N^2 + 7N + 4) \times (3N^2 + 9N + 2)$. $\square$

5 O algoritmo de simulação

Vamos, agora, propor um algoritmo para realizar simulações de SPCBs que tira proveito da modularidade do modelo da rede de Petri proposto. O algoritmo terá como base: (i) os parâmetros do SPCB (listados na Tabela 1); (ii) a demanda de bicicletas (retirada de bicicletas) pelos usuários; (iii) a evolução dinâmica do sistema.

As retiradas de bicicletas das estações ocorrem aleatoriamente com uma função de densidade de distribuição determinada de acordo com a demanda de bicicletas pelos usuários. Para simular essa demanda, é criada, no início de cada simulação, uma matriz $Tout_{des}$: $N \times t_{SIM}$, em que $Tout_{des}(i, :)$ indica em quais instantes de tempo as transições de retirada de bicicleta $Tout_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) irão disparar, se estiverem habilitadas. No algoritmo proposto, consideramos que a distribuição de demanda dos usuários é composta por dois termos: uma distribuição uniforme $X_{1i} \sim Uniform(t_i, t_f)$ e uma distribuição de Poisson $X_{2i} \sim Poisson(t_p(i))$. Contudo, também é possível, através de uma pequena alteração no algoritmo, considerar diferentes distribuições estocásticas.

Tabela 1: Parâmetros do SPCB necessários para o algoritmo de simulação

Variável	Descrição
• N (1×1) : Número de estações do SPCB; • t_{SIM} (1×1) : Tempo total de simulação; • $\underline{c}$ ($N \times 1$) : Vetor de capacidade das estações, em que $c(i) = C_i$; • $\underline{t}_p$ ($N \times 1$) : Vetor de tempo de pico, em que $t_p(i)$ � o horário de pico da estação S_i, em minutos, • $\underline{p}_p$ ($N \times 1$) : Vetor de pico de demanda, em que $p_p(i)$ corresponde à quantidade de pessoas que utilizam a estação S_i durante o horário de pico; • $\underline{p}$ ($N \times 1$) : Vetor de demanda diária, em que $p(i)$ � o número de retiradas de bicicletas da estação S_i durante o dia excluindo o horário de pico; • P_{dest} ($N \times N$) : Matriz de probabilidade de destino, em que p_{ij} representa a probabilidade de um indivíduo retirar uma bicicleta da estação S_i com a finalidade de retorn��la � estação S_j; • P_{ret} ($N \times N$) : Matriz de probabilidade de destino alternativo, em que pr_{ij} representa a probabilidade de um indivíduo que chegou na estação S_i, inicialmente escolhida como destino e a encontrou lotada, ir para outra estação S_j, $i \neq j$, para retornar a bicicleta, ou decidir esperar na estação S_i, $i = j$, até um suporte ser disponibilizado; • D ($N \times N$) : Matriz de distâncias, em que d_{ij} indica o valor da distância em quil�metros entre as estações S_i e S_j; • $\underline{m}_0$ ($N \times 1$) : Marcação inicial da rede; • $\underline{in}$ ($n_R \times 1$) : Vetor de início das rondas, em que n_R � o número total de rondas; • $\underline{r}$ ($N \times 1$) : Vetor de números de reordenação, em que $r(i) = R_i$; opcional se $\underline{in} = 0$; • C_V (1×1) : Capacidade do veículo de redistribuição; opcional se $\underline{in} = 0$; • $\underline{d}_{Car}$ ($(N+1) \times 1$) : Vetor de distâncias em quil�metros entre as estações consecutivas da ronda; opcional se $\underline{in} = 0$;	

A implementação da evolução dinâmica do sistema é realizada da seguinte forma. Primeiramente,   necessário determinar as transições que irão disparar a cada instante de tempo de simulação, o que é feito a partir da criação de dois vetores: um vetor habilitação $\underline{\sigma}_k$ e um vetor de disparos desejados $\underline{\sigma}_{desk} = \Sigma_{des}(:, k)$, ambos de dimensão n_T ; o primeiro indica as transições habilitadas enquanto que o segundo indica as transições que têm o disparo desejado. Isso é necessário devido a presença de conflitos e transições temporizadas, pois a ação de habilitar o disparo de uma transição t_j não assegura que t_j irá disparar no próximo instante de tempo. A matriz Σ_{des} é definida de acordo com as seguintes regras: (i) as transições imediatas, que não participam de conflitos, sempre ocorrerão; (ii) uma transição temporizada dispara apenas em um instante de tempo estocástico k , em segundos, após a sua habilitação; (iii) quando há um conflito, a escolha de qual transição irá disparar é definida estocasticamente. Assim, uma transição t_j irá disparar no instante

k se estiver habilitada ($\sigma_k(t_j) = 1$) e seu disparo for desejado ($\sigma_{desk}(t_j) = 1$). A cada instante de tempo k , a nova marcação da rede de Petri $\underline{m}_{k+1}$ será calculada de acordo com a Equação (2a).

Essa descrição leva ao seguinte algoritmo.

Algoritmo 1

Entradas:

- $\underline{m}_0, t_{SIM}, N, \underline{c}, \underline{t}_p, \underline{p}_p, \underline{p}, P_{dest}, P_{ret}, D, \underline{r}, C_V, \underline{d}_{Car}, \underline{in}$.

S ida:

- $M_f: n_P \times t_{SIM}$, Matriz de evolução da rede de Petri, em que $M_f(:, k) = \underline{m}_k$;

Passo 1: Construa a matriz $Tout_{des}: N \times t_{SIM}$, em que $Tout_{des}(i, :) = Tout_1(X_{1i}, p(i)) + Tout_2(X_{2i}, p_p(i))$;

Passo 2: Construa matrizes Pre e $Post$ de acordo com as Equações (6) e (7) e calcule $A = Pre - Post$;

Passo 3: Enquanto $t < t_{SIM}$, faça:

Passo 3.1: Construa o vetor de habilitação $\underline{\sigma}_k$ de dimensão n_T segundo a Equação (1), em que $\sigma_k(t_j) = 1$ se a transição t_j está habilitada, ou $\sigma_k(t_j) = 0$, caso contrário;

Passo 3.2: Construa o vetor de disparos desejados $\underline{\sigma}_{desk} = \Sigma_{des}(:, k)$ de dimensão n_T , em que $\sigma_{desk}(t_j) = 1$ se o disparo da transição t_j é desejado, ou $\sigma_{desk}(t_j) = 0$, caso contrário;

Passo 3.3: Calcule o vetor de disparos $\underline{\sigma}_{kf}$, em que se $\sigma_k(t_j) = \sigma_{desk}(t_j)$, então $\sigma_{kf}(t_j) = \sigma_k(t_j)$; ou $\sigma_{kf}(t_j) = 0$, caso contrário;

Passo 3.4: Atualize a matriz de evolução da rede de Petri M_f com $\underline{m}_k = M_f(:, k)$;

Passo 3.5: Calcule a marcação $\underline{m}_{k+1}$ da rede de Petri de acordo com a Equação (2a);

Passo 3.6: Atualize a marcação atual $\underline{m}_k = \underline{m}_{k+1}$. $\square$

6 Resultados da simulação

Iremos agora aplicar o modelo proposto e o algoritmo de simulação ao SPCB a ser implementado no Campus Fund o da Universidade Federal do Rio de Janeiro (referido neste artigo como SPCB-UFRJ), que foi elaborado a partir das diretrizes estabelecidas no Guia de planejamento de sistemas de bicicletas compartilhadas do Instituto de Políticas de Transporte e Desenvolvimento (ITDP) (Gauthier, Hughes, Kost, Li, Linke, Lotshaw, Mason, Pardo, Rosore, Schroeder & Xavier Trevi o 2014). Um veículo de redistribuição será utilizado para o balanceamento das estações e será inicialmente posicionado em um centro de redistribuição de onde partir  para a primeira estação e circular  de tal forma que todas as estações do sistema serão visitadas antes de retornar ao centro.

6.1 Parâmetros do sistema

Os parâmetros de entrada do SPCB-UFRJ foram definidos com base em um estudo de demanda de deslocamentos internos de moradores, estudantes,

visitantes e trabalhadores da Ilha do Fundão, chamado de pesquisa de origem e destino (OD), e são descritos a seguir.

O funcionamento do SPCB-UFRJ se inicia às 6h e encerra às 19h de cada dia útil; então $t_{SIM} = 46.800s$ e será composto de 9 estações cujas capacidades e distâncias em quilômetros entre elas (matriz D) estão indicadas na Tabelas 2 e 3, respectivamente. Os vetores de demanda de pico ($\underline{p}_p$), horário de pico (t_p) e de demanda diária ($\underline{p}$) foram construídos de acordo com os dados da Tabela 4 e as matrizes P_{dest} e P_{ret} do SPCB-UFRJ são compostas pelos valores indicados nas Tabelas 5 e 6, respectivamente. Note que a probabilidade do usuário permanecer na estação de destino desejada mesmo que esteja lotada é maior que a probabilidade de escolher outra estação para a devolução da bicicleta.

Tabela 2: Capacidade das estações do SPCB-UFRJ

Estação	Nome	Capacidade
S_1	Instituto de Engenharia Nuclear (IEN)	15
S_2	Parque Tecnológico	115
S_3	Reitoria	65
S_4	Petrobrás/CEPEL	110
S_5	Bandeirão Central	60
S_6	Alojamento	45
S_7	Centro de Ciência da Saúde (CCS)	115
S_8	Terminal BRT	100
S_9	Centro Tecnológico (CT)	170

Tabela 3: Distância (em quilômetros) entre as estações pela ciclovia

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
S_1	-	2,0	1,3	2,3	3,4	4,8	3,8	3,0	1,0
S_2	2,0	-	0,7	2,9	4,0	5,4	4,4	4,8	1,6
S_3	1,3	0,7	-	2,2	3,3	4,7	3,7	3,9	0,9
S_4	2,3	2,9	2,2	-	1,1	2,3	1,3	1,7	1,3
S_5	3,4	4,0	3,3	1,1	-	1,1	0,4	1,2	2,4
S_6	4,8	5,4	4,7	2,3	1,1	-	1,0	2,4	3,8
S_7	3,8	4,4	3,7	1,3	0,4	1,0	-	1,4	2,8
S_8	3,0	4,8	3,9	1,7	1,2	2,4	1,4	-	3,0
S_9	1,0	1,6	0,9	1,3	2,4	3,8	2,8	3,0	-

Tabela 4: Horários de pico e demandas das estações do SPCB-UFRJ

Estação	Horários de pico	Usuários ao longo do dia	Usuários em torno do pico
S_1	12h	20	15
S_2	12h	356	267
S_3	12h, 16h30min	201	151
S_4	12h	228	171
S_5	13h	81	60
S_6	7h30min, 9h30min	101	76
S_7	12h, 17h	174	131
S_8	7h30min	242	181
S_9	12h, 17h	517	388

Durante as rondas, o veículo de redistribuição, cuja capacidade foi fixada em 20 ($C_V = 20$), transita por vias públicas. A distância entre as

Tabela 5: Probabilidade do usuário que retira uma bicicleta da estação S_i (linha) desejar retorná-la na estação S_j (coluna)

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
S_1	0,01	0,01	0,15	0,01	0,01	0,01	0,29	0,01	0,50
S_2	0,01	0,01	0,01	0,10	0,01	0,01	0,15	0,30	0,40
S_3	0,01	0,01	0,01	0,01	0,15	0,10	0,10	0,25	0,36
S_4	0,01	0,20	0,10	0,05	0,01	0,01	0,15	0,01	0,46
S_5	0,01	0,01	0,21	0,01	0,01	0,10	0,35	0,20	0,10
S_6	0,01	0,01	0,15	0,01	0,10	0,01	0,25	0,01	0,45
S_7	0,01	0,01	0,15	0,05	0,07	0,10	0,01	0,40	0,20
S_8	0,01	0,02	0,12	0,04	0,04	0,01	0,23	0,01	0,52
S_9	0,01	0,15	0,05	0,20	0,05	0,05	0,05	0,34	0,10

Tabela 6: Probabilidade do usuário que deseja devolver a bicicleta na estação S_i , e a encontra lotada, tentar devolvê-la na estação S_j .

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
S_1	0,95	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,05
S_2	0,00	0,60	0,40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
S_3	0,00	0,40	0,40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
S_4	0,00	0,00	0,00	0,80	0,10	0,00	0,05	0,00	0,05
S_5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,60	0,00	0,40	0,00	0,00
S_6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,95	0,05	0,00	0,00
S_7	0,00	0,00	0,00	0,00	0,35	0,00	0,60	0,05	0,00
S_8	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,10	0,90	0,00
S_9	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00

estações é dada por:

$$\underline{d}_{Car} = [1.2 \quad 2.0 \quad 0.8 \quad 2.2 \quad 1.1 \quad 1.1 \quad 1.0 \quad 1.4 \quad 3.5 \quad 1.0].$$

A marcação inicial da rede de Petri (m_0) é um vetor de tamanho 148 construído da seguinte forma: (i) R_i fichas distribuídas nos lugares correspondentes ao número de bicicletas disponíveis nas estações ($m_0(PBS_i) = R_i$); (ii) $C_i - R_i$ fichas nos lugares que indicam o número de suportes vazios nas estações ($m_0(PES_i) = C_i - R_i$); (iii) uma ficha no lugar que representa a presença do veículo no centro de redistribuição ($m_0(PCar_C) = 1$) e; (iv) $\frac{C_V}{2}$ fichas nos lugares PBS_{Car} e PES_{Car} ; todos os outros lugares iniciam a simulação sem fichas.

Os vetores de números de ordenação $\underline{r}$ e de início das rondas $\underline{in}$ são definidos com de acordo com os resultados da avaliação da evolução do sistema na simulação.

6.2 Análise do desempenho do SPCB-UFRJ

Iremos agora analisar o desempenho do SPCB-UFRJ, considerando uma estratégia de balanceamento em que o veículo de redistribuição visita todas as estações em cada ronda. Serão analisados os seguintes casos: (i) simulação sem a utilização do veículo de redistribuição, (ii) o veículo realizando rondas de hora em hora; (iii) alteração dos seguintes parâmetros do sistema: distribuição inicial de bicicletas e números de reordenação das estações; (iv) considerando a mesma distribuição inicial de bicicletas do início da simulação e alterando os números de reordenação das estações e a ordem em que as estações serão visitadas pelo

Tabela 7: Percentual de tempo em que as estações permanecem vazias ou lotadas

	Caso	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
% de tempo vazia	(i)	21.2	46.3	18.1	9.9	0.0	13.2	0.0	1.9	5.1
	(ii)	0.0	14.8	22.5	16.8	3.8	13.7	0.0	1.3	1.2
	(iii)	1.0	7.8	11.5	14.0	4.0	12.1	0.0	2.6	2.0
	(iv)	0.6	9.8	20.8	1.6	6.0	4.8	0.0	1.9	3.8
% de tempo lotada	(i)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	27.8	50.9	0.0
	(ii)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	54.8	0.0
	(iii)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	4.8	0.0	53.0	0.0
	(iv)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	54.8	0.0

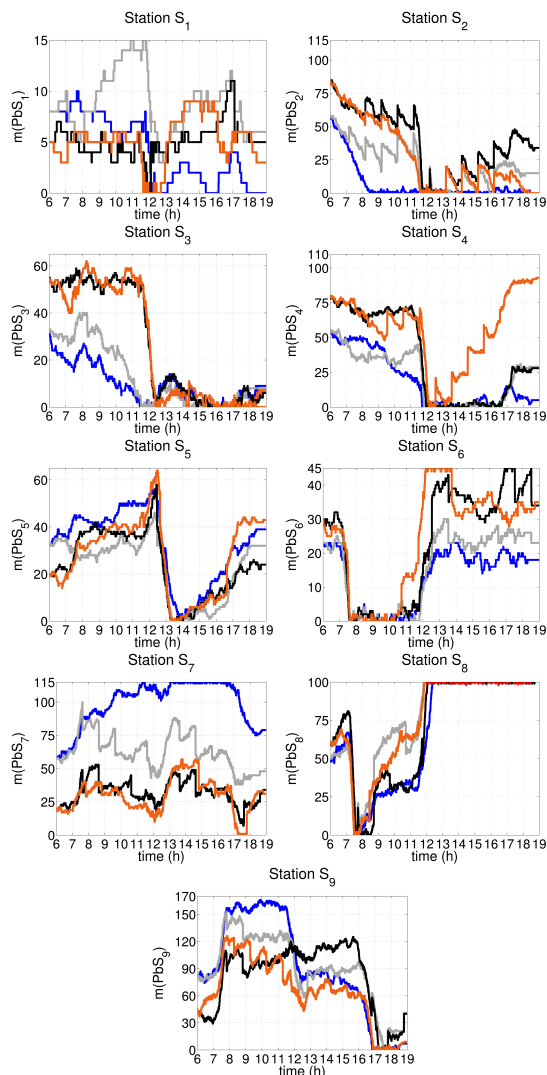


Figura 2: Número de bicicletas nas estações do SPCB-UFRJ para os casos (i) (linhas de cor azul), (ii) (linhas de cor cinza), (iii) (linhas de cor preta), (iv) (linhas de cor laranja) de 6h até 19h.

veículo de redistribuição. É importante ressaltar que as demandas de bicicletas pelos usuários não são as mesmas em todas as simulações, sendo definidas estocasticamente de acordo com o Passo 1 do Algoritmo 1. Os resultados da simulação estão mostrados na figura 2. Note que as alterações nos parâmetros da simulação produziram as alterações esperadas na evolução dinâmica do sistema.

7 Conclusão

Neste artigo, foi apresentado um modelo em redes de Petri para a simulação e a análise de desempenho de SPCBs que considera as características estocásticas do sistema. O modelo e o algoritmo de simulação podem ser utilizados para ajudar o dimensionamento de um SPCB de acordo com os dados obtidos de demanda e movimentação dos usuários da região. Como um trabalho futuro, pretendemos alterar o modelo em redes de Petri proposto possibilitando considerar outras políticas de redistribuição.

Referências

- Benchimol, M., Benchimol, P., Chappert, B., De La Taille, A., Laroche, F., Meunier, F. & Robinet, L. (2011). Balancing the stations of a self service bike hire system, *RAIRO-Operations Research* **45**(1): 37–61.
- Caggiani, L. & Ottomanelli, M. (2013). A dynamic simulation based model for optimal fleet repositioning in bike-sharing systems, *Procedia - Social and Behavioral Sciences* **87**: 203 – 210.
- Chemla, D., Meunier, F. & Wolfler Calvo, R. (2013). Bike sharing system: solving the static rebalancing problem, *Discrete Optimization* **10**(2): 120–146.
- Chiola, G., Marsan, M. A., Balbo, G. & Conte, G. (1993). Generalized stochastic petri nets: A definition at the net level and its implications, *IEEE Transactions on Software Engineering* **19**(2): 89–107.
- David, R. & Alla, H. (2005). *Discrete, continuous and hybrid Petri nets*, Springer, Berlin, Germany.
- Gauthier, A., Hughes, C., Kost, C., Li, S., Linke, C., Lotshaw, S., Mason, J., Pardo, C., Rosore, C., Schroeder, B. & Xavier Trevi  o, X. (2014). Guia de planejamento de sistemas de bicicletas compartilhadas. Last visited: 01/15/2016. URL: <https://www.itdp.org/wp-content/uploads/2013/12/ITDP-Brasil-Guia-de-Planejamento-de-Sistemas-de-Bicicletas-Compartilhadas.pdf>
- Labadi, K., Benarbia, T., Barbot, J.-P., Hamaci, S. & Omari, A. (2015). Stochastic petri net modeling, simulation and analysis of public bicycle sharing systems, *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering* **12**(4): 1380–1395.
- Murata, T. (1989). Petri nets: Properties, analysis and applications, *Proceedings of the IEEE* **77**(4): 541–580.
- Peterson, J. L. (1981). *Petri net theory and the modeling of systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Shu, J., Chou, M., Liu, Q., Teo, C.-P. & Wang, I.-L. (2010). Bicycle-sharing system: deployment, utilization and the value of redistribution. Last visited: 01/28/2016. URL: <http://bschool.nus.edu/Staff/bizteocp/BS2010.pdf>
- Vogel, P., Greisera, T. & Mattfelda, D. C. (2011). Understanding bike-sharing systems using data mining: Exploring activity patterns, *Procedia - Social and Behavioral Sciences* **20**: 514–523.