

CONTROLE $\mathcal{H}_\infty$ POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS PARA SISTEMAS LINEARES POLITÓPICOS AFETADOS POR RUÍDO MULTIPLICATIVO

ELMER LÉVANO, CECÍLIA F. MORAIS, RICARDO C. L. F. OLIVEIRA*

*Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP, 13083-852
Campinas, SP, Brasil.

Email: {elevanoh,cfmoraiss,ricfow}@dt.fee.unicamp.br,

Abstract— This paper proposes LMI conditions for $\mathcal{H}_\infty$ robust state feedback control design of polytopic linear systems with state-multiplicative noise. Considering two distinct domains to deal with uncertainties in the multiplicative noise matrix and in the other matrices of the system, extra slack variables are introduced to provide more flexibility to trade-off the computational effort and accuracy of the $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed costs. In addition, the design conditions allow the use of polynomial matrices with generic degree and also include a scalar parameter that can be used to reduce the conservativeness of the results through line searches. The efficiency of the proposed method, that handles both continuous and discrete-time cases, is illustrated by numerical examples and comparisons with other techniques from the literature.

Keywords— $\mathcal{H}_\infty$ control, state-multiplicative noise, polytopic uncertainty, linear matrix inequalities.

Resumo— Neste artigo são propostas condições LMIs para o projeto de controladores $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de estados para sistemas lineares politópicos com estados afetados por ruído multiplicativo. Considerando domínios diferentes para tratar as incertezas na matriz de ruído multiplicativo e nas demais matrizes do sistema, são introduzidas variáveis de folga extras que fornecem maior flexibilidade no controle do compromisso entre esforço computacional e precisão dos custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$. Além disso, as condições de projeto permitem o uso de matrizes polinomiais de grau genérico e também possuem um parâmetro escalar, cuja busca pode ajudar a reduzir o conservadorismo dos resultados. A eficiência do método proposto, que trata tanto sistemas contínuos quanto discretos no tempo, é ilustrada por meio de exemplos numéricos e comparações com outras técnicas da literatura.

Palavras-chave— Controle $\mathcal{H}_\infty$, ruído multiplicativo no estado, incerteza politópica, desigualdades matriciais lineares.

1 Introdução

A teoria de controle tem como objetivos primários a análise de estabilidade e o projeto de controladores que gerem sistemas estáveis em malha fechada, geralmente otimizando algum critério de desempenho associado, por exemplo, a rejeição de distúrbios, a qual pode ser especificada em termos da norma $\mathcal{H}_\infty$ (Colaneri et al., 1997; Zhou et al., 1996). No contexto de sistemas lineares, uma importante classe compreende modelos em que as variáveis de estado são afetadas por ruídos multiplicativos com propriedades estocásticas, caracterizando uma dinâmica também conhecida como estocástica bilinear (Kumar and Varaiya, 1986). Nesse contexto destacam-se aplicações em várias áreas como química, biologia, economia e teoria de controle (Costa and Kurbusly, 1996). Condições de projeto baseadas no *Bounded Real Lemma* estendido (em Hinrichsen and Pritchard (1998)) para tratar essa classe de sistemas em termos de otimização convexa, mais precisamente em termos de procedimentos de otimização baseados em desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* ou LMIs), foram propostas em Gershon et al. (2005), tratando o problema de realimentação de estados com minimização da norma $\mathcal{H}_\infty$. Condições menos conservadoras foram propostas em Gershon and Shaked (2015) e Gershon et al. (2015) utilizando variáveis de folga (de Oliveira et al., 1999).

O objetivo deste trabalho é propor condições de projeto de controladores $\mathcal{H}_\infty$ menos conservadoras e mais flexíveis que as condições propostas em Gershon et al. (2015) para sistemas contínuos e Gershon and Shaked (2015) para sistemas discretos no tempo. A primeira novidade técnica é o desacoplamento da matriz de ruído multiplicativo da matriz de Lyapunov por meio do emprego de variáveis de folga adicionais, que são introduzidas especialmente para esse fim. Além disso, essas variáveis podem ser dependentes de parâmetros, o que pode proporcionar uma redução no conservadorismo e permitir um maior controle no compromisso entre esforço computacional e precisão dos resultados. As condições de projeto propostas admitem o uso de matrizes de Lyapunov polinomiais de grau genérico, e também apresentam um parâmetro escalar, cuja busca linear pode reduzir o conservadorismo dos resultados. Exemplos numéricos ilustram as vantagens da técnica proposta.

2 Notação geral

O símbolo $'$ representa o transposto de matrizes ou vetores, e usa-se $He(X) = X + X'$ para qualquer matriz quadrada X . $\mathbb{R}^n$ denota o espaço euclidiano n -dimensional e $\mathbb{R}^{n \times m}$ representa o conjunto das matrizes de ordem $n \times m$ com entradas reais. Uma matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita simétrica definida positiva se $P = P' > 0$. O valor esperado é denotado por $E[\cdot]$. A norma eucli-

diana é representada da seguinte forma $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ tal que $\|x(\cdot)\|_{\mathbb{R}^n}^2 = \langle x(\cdot), x(\cdot) \rangle$, com $\langle \cdot \rangle$ representando o produto interno. Considera-se o espaço $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ das funções quadraticamente integráveis pertencentes a $\mathbb{R}^n$ e $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ o espaço das probabilidades, no qual, $\mathcal{F}$ é um σ - lgebra e $\mathbf{P}$ é uma medida de probabilidade sobre $\mathcal{F}$. Denota-se $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ uma família de σ -álgebras, tal que, $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s$ para todo $t \leq s$. Em tempo contínuo denota-se $\tilde{L}^2([0, \infty+), \mathbb{R}^n)$ o espaço de processos estocásticos não-antecipativos com respeito ao $(\mathcal{F}_\tau)_{\tau \in [0, \infty+)}$ que satisfazem a norma em $\tilde{L}^2$ (forma abreviada de $\tilde{L}^2([0, \infty+), \mathbb{R}^n)$),

$$\|f(\cdot)\|_{\tilde{L}^2}^2 = \int_0^\infty E[\|f(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2] dt < \infty.$$

Em tempo discreto, $[0, \infty+)$ é substituído por $\mathbb{N}$ que representa o conjunto dos números naturais, nesse caso, a norma em $\tilde{\ell}^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}^n)$ é definida como

$$\|f_k\|_{\tilde{\ell}^2}^2 = \sum_{k=0}^\infty E[\|f_k\|_{\mathbb{R}^n}^2] < \infty, \quad \{f\} \in \tilde{\ell}^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}^n).$$

Denota-se δ_{ij} como o delta de Kronecker. Neste trabalho, considera-se a estabilidade exponencial em L^2 e ℓ^2 , respectivamente, no sentido de Kozin (1969, Definição I e II). O símbolo $*$ representa um bloco simétrico em uma matriz e $\text{diag}(\cdot)$ denota uma matriz bloco diagonal. No decorrer do texto $t \in \mathbb{R}$ é usado para tempo contínuo e $k \in \mathbb{N}$ é empregado para amostras em tempo discreto.

3 Sistemas contínuos no tempo

Considere o seguinte sistema linear sujeito a ruído multiplicativo $\nu(t)$ na variável de estado,

$$\begin{cases} dx(t) = (A(\alpha) + D(\beta)\nu(t))x(t)dt \\ \quad + B_1(\alpha)w(t) + B_2(\alpha)u(t), \\ x(\tau) = 0, \quad \tau \leq 0, \\ z(t) = C_1(\alpha)x(t) + D_{12}(\alpha)u(t), \end{cases} \quad (1)$$

no qual $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $w(t) \in \mathbb{R}^p$ é a perturbação externa do sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^\ell$ é a entrada de controle e $z(t) \in \mathbb{R}^r$ é a saída a ser controlada. As matrizes $A(\alpha)$, $B_1(\alpha)$, $B_2(\alpha)$, $C_1(\alpha)$, $D_{12}(\alpha)$ e $D(\beta)$ são polit picas, ou seja, são dadas pela combinação convexa de v rtices conhecidos de forma que os vetores de parâmetros invariantes no tempo $\alpha \in \Lambda_{N_1}$ e $\beta \in \Lambda_{N_2}$ com Λ_N sendo o simplex unitário definido como

$$\Lambda_N = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \zeta_i = 1, \zeta_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}.$$

Combinando os dois vetores de parâmetros, tem-se (α, β) pertencente ao domínio multi-simplex Λ , dado pelo produto cartesiano $\Delta_{N_1} \times \Delta_{N_2}$ (Oliveira et al., 2008). Adicionalmente, o escalar $\nu(t) \in$

$\mathbb{R}$ representa um processo de Wiener com valor esperado zero, que satisfaz

$$E[d\nu(t)] = 0, \quad E[d\nu(t)^2] = dt.$$

O objetivo é fornecer condições de projeto de controladores robustos estabilizantes por realimentação de estados para o sistema (1) que minimizem o seguinte funcional de custo

$$J_{SE} := E \left[\int_0^\infty (\|z(t)\|^2 - \gamma^2 \|w(t)\|^2) dt \right], \quad (2)$$

ou seja, determinar um limitante superior $\gamma > 0$ para a norma $\mathcal{H}_\infty$ da entrada de ruído $w(t)$ para a saída $z(t)$. O teorema seguinte apresenta uma solução para esse problema, a qual foi proposta em Gershon et al. (2005) para o caso do sistema (1) com matrizes precisamente conhecidas ($N = 1$).

Teorema 3.1 O sistema (1) precisamente conhecido em malha aberta   exponencialmente estável no sentido de média quadrática e, para algum escalar $\gamma > 0$, a condição $J_{SE} < 0$   garantida para todo $w(t) \in \tilde{L}^2([0, \infty+), \mathbb{R}^p)$ não nulo, se existir uma matriz simétrica $P > 0$, que satisfaz

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & C_1' & PB_1 & D'P \\ * & -\gamma^2 I_r & 0 & 0 \\ * & * & -I_p & 0 \\ * & * & * & -P \end{bmatrix} < 0. \quad (3)$$

No caso politópico, uma condição menos conservadora do que o Teorema 3.1 foi proposta recentemente em Gershon et al. (2015) (com $D(\beta) = D$), em que uma variável de folga é utilizada para separar as matrizes do sistema da matriz de Lyapunov, com exceção da matriz de ruído multiplicativo. Na seqüência é fornecida uma condição de projeto aprimorada com relação a Gershon et al. (2015), que é a contribuição deste artigo para sistemas contínuos.

Proposição 3.1 Para um escalar $\gamma > 0$ prescrito, se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$, $Y_1(\alpha, \beta)$, $Y_2(\alpha, \beta)$, $Y_4(\alpha, \beta)$, $Y_6(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e um parâmetro escalar dado $\xi > 0$, que satisfaçam a seguinte condição LMI dependente de parâmetros

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & * & * & * & * & * \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & * & * & * & * \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & -\gamma^2 I_r & * & * & * \\ \Sigma_{41} & \Sigma_{42} & 0 & \Sigma_{44} & * & * \\ B_1(\alpha)' & 0 & 0 & 0 & -I_p & * \\ \Sigma_{61} & \Sigma_{62} & 0 & \Sigma_{64} & 0 & \Sigma_{66} \end{bmatrix} < 0, \quad (4)$$

para todo $(\alpha, \beta) \in \Lambda$, na qual

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} &= He(A(\alpha)X + B_2(\alpha)Z), \\ \Sigma_{21} &= P(\alpha, \beta) - X + \xi(A(\alpha)X + B_2(\alpha)Z)', \\ \Sigma_{31} &= C_1(\alpha)X + D_{12}(\alpha)Z, \\ \Sigma_{22} &= -\xi He(X), \\ \Sigma_{32} &= \xi(C_1(\alpha)X + D_{12}(\alpha)Z), \end{aligned}$$

$\Sigma_{6j} = D(\beta)Y_j(\alpha, \beta), \quad j = 1, 2,$
 $\Sigma_{41} = P(\alpha, \beta) - Y_1(\alpha, \beta),$
 $\Sigma_{42} = -Y_2(\alpha, \beta),$
 $\Sigma_{44} = -He(Y_4(\alpha, \beta)),$
 $\Sigma_{64} = -Y_6(\alpha, \beta)' + D(\beta)Y_4(\alpha, \beta),$
 $\Sigma_{66} = -P(\alpha, \beta) + He(D(\beta)Y_6(\alpha, \beta)),$
 então $K = ZX^{-1}$ é um ganho de realimentação de estados que estabiliza o sistema (1) e garante que J_{SE} é negativo para todo $w \in L^2$ não nulo.

Prova: Observe que (4) pode ser reescrita como

$$\mathcal{Q} + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}'\mathcal{X}' < 0 \quad (5)$$

em que¹

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 0 & P & 0 & P & B_1 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I_r & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I_p & 0 \\ * & * & * & * & * & -P \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} X & \xi X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_1 & Y_2 & 0 & Y_4 & 0 & Y_6 \end{bmatrix}',$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} A'_{cl} & -I_n & C'_{cl} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_n & 0 & D' \end{bmatrix},$$

com $A_{cl} = A(\alpha) + B_2(\alpha)K$ e $C_{cl} = C_1(\alpha) + D_{12}(\alpha)K$. Sendo assim, multiplicando (5) à direita por

$$B^\perp = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ A'_{cl} & C'_{cl} & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D' \\ 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_n \end{bmatrix}$$

e à esquerda pelo transposto obtém-se

$$\begin{bmatrix} A_{cl}P + PA'_{cl} & PC'_{cl} & B_1 & PD' \\ * & -\gamma^2 I_r & 0 & 0 \\ * & * & -I_p & 0 \\ * & * & * & -P \end{bmatrix} < 0. \quad (6)$$

Finalmente, pré e pós multiplicando (6) por $\text{diag}(P^{-1}, I_r, I_p, P^{-1})$ obtém-se (3) para todo $(\alpha, \beta) \in \Lambda$ com $A = A_{cl}$, $C_1 = C_{cl}$ e $P = P^{-1}$. $\square$

Uma novidade técnica da condição proposta em relação à condição de projeto dada em Gershon et al. (2015) que também usa variáveis de folga, é o desacoplamento da matriz de ruído multiplicativo da matriz de Lyapunov. Note que a matriz $D(\beta)$ aparece multiplicando as variáveis de folga $Y_i(\alpha, \beta)$, que foram especialmente introduzidas para tratar a incerteza na matriz $D(\beta)$. Além disso, considerar incertezas independentes na matriz $D(\beta)$ e nas outras matrizes do sistema (que dependem de α) também é uma contribuição do

¹Por economia de espaço a dependência dos parâmetros α e β foi omitida na sequência da prova.

presente trabalho. Como será mostrado nos exemplos numéricos, esta proposição fornece ao projetista um maior controle do compromisso entre esforço computacional e precisão dos resultados. Para ajudar na redução do conservadorismo introduzido pelas restrições na primeira coluna da matriz $\mathcal{X}$, também é incluído nas LMIs um parâmetro escalar (Braga et al., 2012), cuja busca pode melhorar os resultados em termos de custos garantidos menores. Observe ainda que, quanto à modelagem do sistema, por simplicidade optou-se por considerar o ruído multiplicativo afetando apenas $x(t)$ na equação dinâmica. Contudo, a metodologia proposta poderia ser estendida para tratar o caso mais geral, seguindo a modelagem fornecida em El Ghaoui (1995) em que o ruído multiplicativo afeta todos os sinais, tanto na equação dinâmica quanto na equação de saída.

4 Sistemas discretos no tempo

Considere o seguinte sistema linear sujeito a ruído multiplicativo ν_k na variável de estado,

$$\begin{cases} x_{k+1} = (A(\alpha) + D(\beta)\nu_k)x_k \\ \quad + B_1(\alpha)w_k + B_2(\alpha)u_k, \\ x_l = 0, \quad l \leq 0, \\ z_k = C_1(\alpha)x_k + D_{12}(\alpha)u_k, \end{cases} \quad (7)$$

no qual, $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $\omega_k \in \mathbb{R}^p$ é o ruído externo, $u_k \in \mathbb{R}^\ell$ é o sinal de controle e $z_k \in \mathbb{R}^r$ é o sinal de saída a ser controlado. A variável escalar ν_k , que representa o ruído multiplicativo, possui valor esperado nulo e satisfaz

$$E[\nu_k \nu_j] = \delta_{kj}, \quad \forall k, j \geq 0.$$

As matrizes incertas do sistema são representadas do mesmo modo que no caso de sistemas contínuos. O objetivo é projetar uma lei de controle robusta por realimentação de estados $u_k = Kx_k$ que otimize o seguinte funcional de custo

$$J_{SEd} := \|z_k\|_{\ell^2}^2 - \gamma^2 \|\omega_k\|_{\ell^2}^2,$$

ou seja, determinar um limitante superior $\gamma > 0$ para a norma $\mathcal{H}_\infty$ da entrada de ruído w_k para a saída z_k do sistema (7). No teorema a seguir é apresentado o resultado de Gershon et al. (2005) no qual foram propostas condições baseadas em LMIs para resolver esse problema quando as matrizes do sistema são precisamente conhecidas ($N = 1$).

Teorema 4.1 O sistema (7) precisamente conhecido em malha aberta, é exponencialmente estável no sentido de média quadrada e, para algum escalar $\gamma > 0$, a condição $J_{SE} < 0$ é assegurada para todo $w_k \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}^p)$ não nulo, se existir uma matriz simétrica $P > 0$, que satisfaz a seguinte LMI

$$\begin{bmatrix} P & * & * & * & * \\ 0 & \gamma^2 I_p & * & * & * \\ AP & B_1 & P & * & * \\ DP & 0 & 0 & P & * \\ C_1 P & 0 & 0 & 0 & I_r \end{bmatrix} > 0. \quad (8)$$

Uma nova condição foi apresentada em Gershon and Shaked (2015) para contemplar o caso incerto, nesse sentido, a proposição apresentada a seguir é a contribuição deste trabalho no contexto de sistemas politópicos discretos visando obter resultados menos conservadores que os existentes na literatura.

Proposição 4.1 Para um escalar $\gamma > 0$ prescrito, se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$, $Y_2(\alpha, \beta)$, $Y_6(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y_5(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e um dado parâmetro escalar $|\xi| \geq 1$ que satisfaçam a seguinte LMI dependente de parâmetros

$$\begin{bmatrix} \gamma^2 I_p & * & * & * & * & * \\ B_1(\alpha) & \Phi_{22} & * & * & * & * \\ 0 & \Phi_{32} & \Phi_{33} & * & * & * \\ 0 & \Phi_{42} & 0 & I_r & * & * \\ 0 & \Phi_{52} & \Phi_{53} & \Phi_{54} & \Phi_{55} & * \\ 0 & \Phi_{62} & \Phi_{63} & \Phi_{64} & \Phi_{65} & \Phi_{66} \end{bmatrix} > 0, \quad (9)$$

para todo $(\alpha, \beta) \in \Lambda$ na qual

$$\begin{aligned} \Phi_{22} &= P(\alpha, \beta) + He(A(\alpha)X' + B_2(\alpha)Z), \\ \Phi_{32} &= D(\beta)Y_2(\alpha, \beta)', \\ \Phi_{33} &= P(\alpha, \beta), \\ \Phi_{42} &= C_1(\alpha)X' + D_{12}(\alpha)Z, \\ \Phi_{52} &= -X' + \xi(XA'(\alpha) + Z'B'_2(\alpha)), \\ \Phi_{53} &= Y_5(\alpha, \beta)D(\beta)', \\ \Phi_{54} &= \xi(XC_1(\alpha)' + Z'D_{12}(\alpha)'), \\ \Phi_{55} &= -P(\alpha, \beta) - \xi He(X), \\ \Phi_{62} &= -Y_2(\alpha, \beta)', \\ \Phi_{63} &= Y_6(\alpha, \beta)D(\beta)', \\ \Phi_{65} &= -P(\alpha, \beta) - Y_5(\alpha, \beta)', \\ \Phi_{66} &= -P(\alpha, \beta) - He(Y_6(\alpha, \beta)), \end{aligned}$$

então $K = ZX'^{-1}$ é um ganho de realimentação de estados que estabiliza o sistema (7) e garante que J_{SEd} é negativo para todo $w \in \ell^2$ não nulo.

Prova: Observe que (9) pode ser reescrita como

$$\mathcal{Q} + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}'\mathcal{X}' > 0 \quad (10)$$

em que ²

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \begin{bmatrix} \gamma^2 I_p & * & * & * & * & * \\ B_1 & P & * & * & * & * \\ 0 & 0 & P & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & I_r & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -P & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -P & -P \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} 0 & A'_{cl} & 0 & C'_{cl} & -I_n & 0 \\ 0 & 0 & D' & 0 & 0 & -I_n \end{bmatrix}, \\ \mathcal{X} &= \begin{bmatrix} 0 & X' & 0 & 0 & \xi X' & 0 \\ 0 & Y'_2 & 0 & 0 & Y'_5 & Y'_6 \end{bmatrix}', \end{aligned}$$

²Novamente, omite-se a dependência de α e β .

com $A_{cl} = A(\alpha) + B_2(\alpha)K$ e $C_{cl} = C_1(\alpha) + D_{12}(\alpha)K$. Multiplicando (10) à direita por

$$B^\perp = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_r \\ 0 & A'_{cl} & 0 & C'_{cl} \\ 0 & 0 & D' & 0 \end{bmatrix},$$

e à esquerda pelo transposto, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \gamma^2 I_p & * & * & * \\ B_1 & \begin{pmatrix} P- \\ A_{cl}PA'_{cl} \end{pmatrix} & * & * \\ 0 & -DPA'_{cl} & \begin{pmatrix} P- \\ DPD' \end{pmatrix} & * \\ 0 & -C_{cl}PA'_{cl} & -C_{cl}PD' & \begin{pmatrix} I_r- \\ C_{cl}PC'_{cl} \end{pmatrix} \end{bmatrix} > 0. \quad (11)$$

Por outro lado, aplicando-se o complemento de Schur no bloco superior $P(\alpha)$ da LMI (8), obtém-se (11) para todo $(\alpha, \beta) \in \Lambda$. $\square$

Os mesmos comentários do caso contínuo se aplicam ao caso discreto.

5 Exemplos

Nesta seção são apresentados alguns exemplos numéricos para demonstrar as vantagens das condições LMIs propostas neste artigo. Todas as rotinas foram programadas em Matlab-R2013b usando SeDuMi, mediante a interface ROLMIP versão 3.0, desenvolvida em Agulhari et al. (2012), para programação de LMIs robustas. Note que as condições propostas foram expressas em termos de LMIs dependentes de parâmetros, que não são programáveis. Contudo, relaxações que fornecem condições programáveis podem ser obtidas por meio da imposição de estruturas polinomiais para as variáveis do problema (Oliveira et al., 2008). A obtenção das condições programáveis foi realizada por meio do *parser* ROLMIP, que foi desenvolvido especialmente para essa tarefa. Como as variáveis de otimização das condições propostas dependem de α e β , o grau dessas matrizes será denotado por um vetor de duas componentes (g_α, g_β) , que representam o grau de dependência polinomial em α e em β . Essa flexibilidade fornece um maior controle do esforço computacional ao usuário, uma vez que o número de variáveis e linhas de LMIs dependem desses graus.

Exemplo 1 Considere um sistema massa mola descrito pelas seguintes matrizes

$$\begin{aligned} A_i &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & k_1 & -0.2 & 0.2 \\ \frac{k_1}{2} & -\frac{k_1+k_2}{2} & 0.1 & -0.15 \end{bmatrix}, \\ B_{1i} &= [0 \ 0 \ 0 \ 0.5]', \quad B_{2i} = [0 \ 0 \ 1 \ 0]', \\ C_{1i} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

com $k_1 \in [1.6 \ 2.4]$, $k_2 \in [6.4 \ 9.6]$, e a matriz de ruído multiplicativo

$$D_i = \text{diag}(d(i), -d(i), 0, 0), \quad i = 1, \dots, 4, \quad (12)$$

no qual, $d = [0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.0]$. Neste exemplo são apresentados resultados comparativos para o projeto de controladores $\mathcal{H}_\infty$ calculados usando o Corolário 2 de Gershon et al. (2015) e Proposição 3.1, com variáveis dependentes de parâmetros com busca escalar. Como a abordagem da literatura trata apenas o caso em que D é precisamente conhecida, para efeito comparativo, consideramos $D = D_3$ e utilizando o Corolário 2 de Gershon et al. (2015) o valor do custo garantido obtido é $\gamma = 0.6083$. Por outro lado, empregando a Proposição 3.1 com grau $g = (1, 0)$ e $\xi = 2$ obteve-se como resultado $\gamma = 0.6002$.

Considerando $D(\beta)$ com v rtices dados em (12), ao testarmos a Proposição 3.1 com $g = (0, 0)$ e parâmetro escalar dado por uma busca em 40 valores distribuídos em uma faixa logarítmica de 10^{-2} a 10^2 , o melhor resultado obtido foi $\gamma = 2.739$ para $\xi = 0.01$. O aumento do grau nas variáveis de decisão permite obter custos garantidos menos conservadores, por exemplo, para grau $g = (1, 1)$ e busca escalar na mesma faixa de valores, o melhor resultado obtido foi $\gamma = 0.599$ para $\xi = 1.43$, que representa uma melhoria de aproximadamente 78% com respeito ao caso em que as variáveis do problema são fixas (polinomiais de grau zero). Na Figura 1, apresenta-se a variação do custo garantido na faixa de busca considerada, fazendo uso da Proposição 3.1 com graus $g = (1, 1)$. O melhor resultado é destacado com um ponto vermelho. Observe que diferentes valores do parâmetro escalar permitem projetar controladores associados com melhor desempenho.

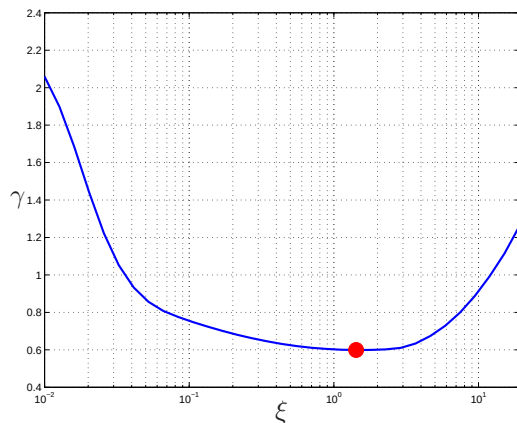


Figura 1: Custos garantidos $\mathcal{H}_\infty(\gamma)$ computados pela Proposição 3.1 com grau $g = (1, 1)$ em função do parâmetro escalar $\xi > 0$ para o Ex. 1 com D_i dada por (12).

Para avaliar o efeito das variáveis de folga que dependem de β no custo garantido, considere os seguintes v rtices (gerados randomicamente) para

a matriz de ruído multiplicativo

$$D_1 = \begin{bmatrix} -0.22 & -0.49 & 0.50 & 0.18 \\ 0.72 & 0.19 & 0.38 & 0.05 \\ -0.74 & 0 & -0.54 & -0.49 \\ 0.22 & 0.13 & -0.51 & -0.31 \end{bmatrix},$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} -0.15 & 0.17 & 0.33 & -0.29 \\ 0.38 & -0.63 & -0.48 & 0.12 \\ 0.33 & -0.15 & 0.02 & -0.23 \\ -0.37 & 0.29 & 0.29 & 0.30 \end{bmatrix}.$$

Novos testes forem realizados aplicando a Proposição 3.1 com graus diferentes em cada simplex unitário e parâmetro escalar $\xi = 0.01$ fixo. Todos os resultados obtidos em termos de custo garantido são apresentados na Tabela 1. Observe que o aumento do grau nos parâmetros α e β permite a redução do conservadorismo. Adicionalmente, note que o uso de graus diferentes para cada simplex, permite produzir melhores resultados com menor esforço computacional (E.C), expresso em termos do número de variáveis (V) e linhas de LMIs (L).

graus		Pro3.1	E.C	
g_α	g_β	γ	V	L
0	0	-	-	-
1	0	8.9306	316	168
0	1	3.3493	168	236
1	1	2.8397	612	260
0	2	3.3111	242	316
2	1	2.8397	1500	650
1	2	2.8045	908	352
2	2	2.8045	2240	880

Tabela 1: Custo garantido (γ) para o Ex. 1 usando a Proposição 3.1 com $g = (g_\alpha, g_\beta)$ e $\xi = 0.01$.

Exemplo 2 O objetivo deste exemplo   computar um controlador por realimentação de estados em tempo discreto para o sistema

$$A_{\{1,2\}} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.7 & 0.1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.3 & 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B_{\{1,2\}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_{\{1,2\}} = \begin{bmatrix} 0.21 & 0.42 & -0.01 & -0.02 \\ 0.105 & 0.21 & -0.01 & -0.01 \end{bmatrix},$$

$B_{\{1\}} = [2.5 \ 1]'$, $B_{\{2\}} = 2B_{\{1\}}$, $C_{\{1\}} = [1 \ 0]$, $C_{\{2\}} = [0 \ 1]$, $D_{12\{1\}} = 0.1$, $D_{12\{2\}} = 0.2$. Os custos garantidos γ associados à Proposição 4.1 com graus $(1, 1)$ e ao Lema 2 de Gershon and Shaked (2015) são apresentados na Figura 2.

Observe que a condição proposta nesse artigo consegue produzir controladores associados a menores custos garantidos que o método da literatura e que a variação do parâmetro escalar permite reduzir o conservadorismo de ambas as técnicas. Além disso, o aumento do grau nas variáveis de decisão na Proposição 4.1 permite obter menores custos garantidos, por exemplo, para $\xi = -2.069$ e grau $g = (0, 0)$ obt m-se $\gamma = 8.8279$, enquanto que

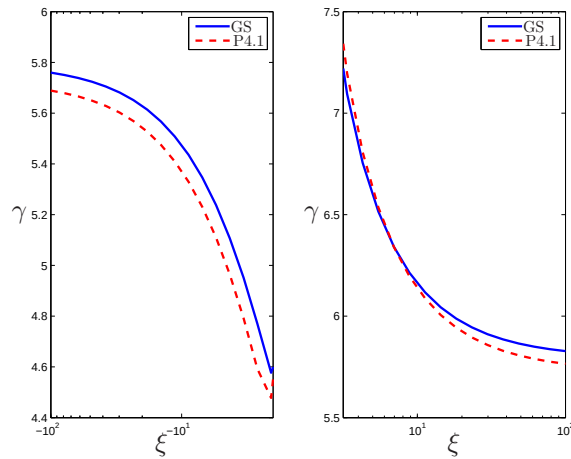


Figura 2: Custos garantidos H_∞ computados pela Proposição 4.1 (P4.1) com graus (1,1) e pelo Lema 2 de (GS) para o Ex. 2 em termos do parâmetro escalar $|\xi| \geq 1$.

para $g = (1, 1)$ o custo associado foi $\gamma = 4.4778$, o que representa uma melhoria de aproximadamente 97% com respeito ao caso em que as variáveis do problema são fixas (polinomiais de grau zero).

6 Conclusões gerais

Neste artigo foram propostas novas condições LMIs para a síntese de controladores robustos por realimentação de estados H_∞ para sistemas incertos afetados por ruídos multiplicativos nas variáveis de estado. As condições são expressas em termos de variáveis dependentes de parâmetros e um parâmetro escalar adicional. Observou-se que tanto a busca no parâmetro escalar quanto o aumento do grau das variáveis de decisão representam graus de liberdade que permitem produzir controladores com melhores desempenhos sob o critério de norma H_∞ . Adicionalmente, é possível escolher graus diferentes para cada simplex unitário, viabilizando a obtenção de boas estimativas do custo garantido sem um grande incremento no esforço computacional.

Agradecimentos

Às agências CAPES, CNPq e FAPESP (Proc. 2014/22881-1).

Referências

- Agulhari, C. M., Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D. (2012). Robust LMI parser: A computational package to construct LMI conditions for uncertain systems, *XIX CBA*, Campina Grande, PB, Brasil, pp. 2298–2305.
- Braga, M. F., Moraes, C. F., Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D. (2012). Realimentação de estados robusta H_2 e H_∞ para sistemas lineares discretos no tempo por meio de LMIs

com parâmetros escalares, *XIX CBA*, Campina Grande, PB, Brasil, pp. 1672–1679.

- Colaneri, P., Geromel, J. C. and Locatelli, A. (1997). *Control Theory and Design: An H_2 and H_∞ Viewpoint*, Academic press.
- Costa, O. L. V. and Kubrusly, C. S. (1996). State feedback h_∞ -control for discrete-time infinite-dimensional stochastic bilinear systems, *Journal of Mathematical Systems Estimation and Control* **6**: 1–32.
- de Oliveira, M. C., Bernussou, J. and Geromel, J. C. (1999). A new discrete-time robust stability condition, *Syst. Control Lett.* **37**(4): 261–265.
- El Ghaoui, L. (1995). State-feedback control of systems with multiplicative noise via linear matrix inequalities, *Syst. Control Lett.* **24**(3): 223–228.
- Gershon, E. and Shaked, U. (2015). Vertex-dependent approach to robust H_∞ control and estimation of stochastic discrete-time systems, *IFAC-PapersOnLine* **48**(11): 949–953. 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems (MICNON 2015), Saint Petersburg, Russia, June 2015.
- Gershon, E., Shaked, U. and Itzhaki, L. (2015). Stochastic linear systems: Robust H_∞ control via vertex-dependent approach, *Proceedings of the 23rd Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, Torremolinos, Spain, pp. 638–643.
- Gershon, E., Shaked, U. and Yaesh, I. (2005). *H_∞ Control and Estimation of State-multiplicative Linear Systems*, Vol. 318 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag, London, UK.
- Hinrichsen, D. and Pritchard, A. J. (1998). Stochastic H^∞ , *SIAM J. Control Optim.* **36**(5): 1504–1538.
- Kozin, F. (1969). A survey of stability of stochastic systems, *Automatica* **5**(1): 95–112.
- Kumar, P. R. and Varaiya, P. (1986). *Stochastic systems: Estimation, identification, and adaptive control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.
- Oliveira, R. C. L. F., Bliman, P.-A. and Peres, P. L. D. (2008). Robust LMIs with parameters in multi-simplex: Existence of solutions and applications, *Proc. 47th IEEE Conf. Decision Control*, Cancun, Mexico, pp. 2226–2231.
- Zhou, K., Doyle, J. C. and Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA.