

SINTONIA ANALÍTICA DE CONTROLADORES AVANÇO/ATRASSO DE FASE EM TEMPO DISCRETO ATRAVÉS DO LUGAR DAS RAÍZES

CAIO F. DE PAULA*, FERNANDO H. D. GUARACY*, RENAN L. PEREIRA*

**Universidade Federal de Itajubá
Campus Itabira
35903-087 Itabira, Minas Gerais, Brasil*

Emails: caiofernandes@unifei.edu.br, fernandoh@unifei.edu.br, renan.lima@unifei.edu.br

Abstract— In this paper an analytical methodology to design discrete-time Lead/Lag controllers by Root Locus method is presented. Based on the closed-loop poles specification, which can be found by requirements on the time-domain transient response, the methodology guarantees that the designed Lead/Lag compensator will make the Root Locus plot pass through the desired closed-loop poles. Simulations are then carried out to highlight the efficiency of the proposed methodology.

Keywords— Root Locus, Lead/Lag compensators, analytical controller synthesis, discrete-time linear control.

Resumo— Neste artigo é apresentada uma metodologia de sintonia analítica de controladores Avanço/Atraso de Fase através do método do Lugar das Raízes. A partir da especificação dos polos desejados em malha fechada, os quais podem ser determinados a partir de requisitos da resposta transitória no domínio do tempo, a metodologia garante que o controlador Avanço/Atraso de Fase projetado fará com que o diagrama de Lugar Geométrico das Raízes passe pelos polos desejados. São realizadas simulações para comprovar a eficiência do método.

Palavras-chave— Lugar Geométrico das Raízes, controladores Avanço/Atraso de Fase, sintonia analítica de controladores, controle linear em tempo discreto.

1 Introdução

A sintonia de controladores de estrutura fixa, como Avanço/Atraso de Fase e PID e variações, tem sua base bastante estabelecida em livros de autores clássicos na área de sistemas de controle (Ogata, 2011), (Phillips and Harbor, 1999), (Dorf and Bishop, 2013), e muitos outros. O objetivo central é calcular os ganhos do compensador de maneira a forçar com que o diagrama de Lugar das Raízes passe pelos pontos requeridos, que por sua vez fornecem características da resposta temporal desejados, principalmente sobressinal (*overshoot*) e tempo de acomodação. Infelizmente, os métodos clássicos de sintonia de controladores via Lugar das Raízes possuem muitas variações com relação ao controlador utilizado e a planta a ser controlada, o que dificulta uma abordagem padronizada, e então muito do tempo é gasto especificamente com o método de sintonia e pouco é utilizado na escolha do compensador ideal (O'Brien Jr. and Watkins, 2001). Além disso, poucos livros e/ou referências tratam do problema do projeto do controlador diretamente no tempo discreto.

Neste sentido, uma abordagem padronizada, ou seja, uma sintonia analítica de controladores via Lugar das Raízes, onde se necessita somente do ângulo e do módulo da planta no ponto de compensação é desejado, assim como é feito em tempo contínuo em (Phillips and Harbor, 1999). Em anos recentes, a síntese analítica de controladores de estrutura fixa, tanto em tempo contínuo quanto em tempo discreto, via técnicas clássicas tem recebido atenção de pesquisadores, seja via Lugar

das Raízes (O'Brien Jr. and Watkins, 2005), (Loh et al., 2004), (Nassirharand and Karimi, 2004), (Lee, 2005), (Emami et al., 2007) seja via Resposta em Frequência (Wang et al., 2006), (Zanasi and Morselli, 2009), (Wang, 2008), (Cuoghi and Ntogramatzidis, 2013), ou abordagens unificadas (O'Brien Jr. and Watkins, 2005). Isto se deve ao fato da simplicidade do projeto e também ao apelo didático no ensino de Sistemas de Controle. Além disso, devido à sua natureza, tais métodos são adequados para serem empregados na etapa de projeto do compensador em esquemas de controle adaptativo, como reguladores autossintonizáveis via método indireto (Åström and Wittenmark, 2008).

Entretanto não há, no melhor conhecimento dos autores, uma metodologia para sintonia analítica de controladores Avanço/Atraso de Fase em tempo discreto via Lugar das Raízes no qual tanto o polo quanto o zero do controlador são definidos. Em geral, a sintonia é feita com um cancelamento de polos e zeros entre planta e controlador, sendo então o polo ou zero do controlador calculado via condição de ângulo e o ganho calculado via condição de módulo. Entretanto, cancelamento de polos e zeros entre controlador e planta na prática é, no melhor dos cenários, difícil de ser atingido, uma vez que os parâmetros da planta nunca são conhecidos com exatidão. Se a planta é de fase não-mínima, ou seja, possui um ou mais zeros no semiplano à direita (fora do círculo unitário para sistemas a tempo discreto), então o cancelamento efetivo entre polos e zeros é impossível.

Desta forma, a proposta deste artigo é apre-

sentar uma metodologia simplificada de sintonia de controladores Avanço/Atraso de Fase em tempo discreto via Lugar das Raízes, no qual é passado como especificação os polos dominantes desejados, os quais tem relação com características de desempenho da resposta transitória como *overshoot* e tempo de acomodação. O procedimento garante com que o diagrama de Lugar das Raízes do sistema em tempo discreto irá passar pelos pontos de compensação desejados através da alocação do polo e do zero do controlador. Entretanto, como o controlador possui três parâmetros e no Lugar das Raízes duas condições devem ser atingidas, é necessário designar *à priori* um deles, sendo neste caso o ganho dc. Tradicionalmente, no tempo contínuo, a vantagem reside no fato de que o ganho dc do controlador pode ser calculado através da especificação do erro em regime permanente, o que não ocorre no caso do tempo discreto (Phillips and Nagle, 1994). Entretanto, opta-se por manter a mesma abordagem de designar *à priori* o ganho, uma vez que a principal motivação é encontrar um método analítico que não conta com cancelamento de polos e zeros.

O artigo está organizado da seguinte forma: na Seção 2 apresenta-se todo o desenvolvimento teórico que resulta nas equações de compensação. Na Seção 3 é apresentado um exemplo de aplicação envolvendo simulações em um modelo nominal de uma planta real, o controle de posição de um servomotor. Por fim, a Seção 4 é dedicada à conclusão e propostas de trabalhos futuros.

2 Desenvolvimento Teórico

Considere o diagrama de blocos geral de sistema de controle em tempo discreto ilustrado pela Figura 1.

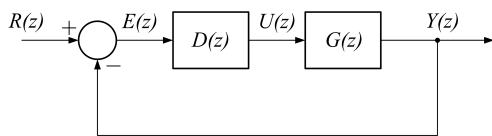


Figura 1: Diagrama de blocos geral de um sistema de controle em tempo discreto.

Na Figura 1, $G(z)$ representa a função de transferência discreta (no domínio- z) da planta, incluindo seus atuadores e o retentor de ordem zero, e $D(z)$ representa a função de transferência discreta do controlador, o qual deverá ser projetado para atingir os requisitos desejados. O sinal $R(z)$ é a Transformada- z da entrada de referência, $E(z)$ é do erro, $U(z)$ é da entrada de comando e $Y(z)$ da saída a ser controlada. Da Figura 1, a equação característica do sistema em malha fechada é

$$1 + D(z)G(z) = 0. \quad (1)$$

O Lugar Geométrico das Raízes é o conjunto de todos os pontos $z \in \mathbb{C}$ que satisfazem o critério de ângulo, ou seja (Phillips and Nagle, 1994)

$$\mathcal{LGR} = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg(D(z)G(z)) = \pm 180^\circ(2k+1), k = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (2)$$

onde $\arg(D(z)G(z))$ denota o argumento (ângulo) de $D(z)G(z)$.

Suponha que seja desejado que o ponto $z_1 \in \mathbb{C}$ faça parte do diagrama de Lugar das Raízes, de modo que os polos em malha fechada em z_1 imponham características de desempenho desejadas para a resposta transitória, como máximo sobressinal (*overshoot*) e tempo de acomodação. Logo, no ponto de compensação z_1 tem-se que

$$D(z_1)G(z_1) = \alpha e^{j\varphi} \quad (3)$$

O controlador Avanço/Atraso de Fase em tempo discreto possui a seguinte estrutura (Phillips and Nagle, 1994)

$$D(z) = K_d \frac{z - z_0}{z - z_p}, \quad (4)$$

onde K_d é um ganho proporcional, z_0 é o valor do zero e z_p o valor do polo. Uma vez que há três parâmetros a serem calculados e apenas duas equações a serem satisfeitas (os critérios (ou condições) de ângulo e módulo do Lugar das Raízes), o procedimento será feito com a designação de K_d *à priori*, e então os parâmetros z_0 e z_p deverão ser calculados através das duas restrições disponíveis, ou seja, as condições de ângulo e módulo.

No ponto de compensação z_1 , tem-se que

$$K_d \frac{z_1 - z_0}{z_1 - z_p} G(z_1) = \alpha e^{j\varphi} \quad (5)$$

$$z_1 - z_0 = \frac{\alpha e^{j\varphi}}{K_d G(z_1)} (z_1 - z_p).$$

Como $G(z_1)$ é em geral um número complexo, pode-se denotá-lo como

$$G(z_1) = |G(z_1)| e^{j\psi}, \quad (6)$$

e então a equação (5) é reescrita como

$$z_1 - z_0 = \frac{\alpha e^{j\varphi}}{K_d |G(z_1)| e^{j\psi}} (z_1 - z_p). \quad (7)$$

Utilizando-se a notação

$$M = \frac{\alpha}{K_d |G(z_1)|}, \quad (8)$$

e

$$\theta = \varphi - \psi, \quad (9)$$

a fim de simplificar as expressões a seguir, reescreve-se (7) como

$$z_1 - z_0 = M e^{j\theta} (z_1 - z_p)$$

$$z_1 - z_0 = Me^{j\theta} z_1 - Me^{j\theta} z_p . \quad (10)$$

Como em geral z_1 também é um número complexo, pode-se denotá-lo por

$$z_1 = Ne^{j\beta} , \quad (11)$$

e então a equação (10) é reescrita como

$$Ne^{j\beta} - z_0 = Me^{j\theta} Ne^{j\beta} - Me^{j\theta} z_p$$

$$Ne^{j\beta} - z_0 = MNe^{j(\theta+\beta)} - Me^{j\theta} z_p . \quad (12)$$

Utilizando a identidade de Euler, pode-se reescrever a equação (12) como

$$N(\cos \beta + j \sin \beta) - z_0 = MN(\cos(\theta + \beta) + j \sin(\theta + \beta)) - M(\cos \theta + j \sin \theta) z_p$$

$$N \cos \beta + jN \sin \beta - z_0 = MN \cos(\theta + \beta) + jMN \sin(\theta + \beta) - M \cos \theta z_p - jM \sin \theta z_p . \quad (13)$$

A equação (13) pode ser separada em duas: a equação da parte real e equação da parte imaginária. Na equação da parte real, tem-se que

$$N \cos \beta - z_0 = MN \cos(\theta + \beta) - M \cos \theta z_p . \quad (14)$$

Já na equação da parte imaginária, tem-se que

$$N \sin \beta = MN \sin(\theta + \beta) - M \sin \theta z_p . \quad (15)$$

Na equação da parte imaginária a única incógnita é z_p , e portanto é possível resolvê-la. Levando-se em consideração que se o ponto z_1 faz parte do Lugar Geométrico das Raízes, então $\alpha = 1$ e $\varphi = 180^\circ$. Logo, vem que

$$M = \frac{1}{K_d |G(z_1)|} \quad (16)$$

e

$$\theta = 180^\circ - \psi . \quad (17)$$

Logo, reescrevendo a equação da parte imaginária em (15), tem-se que

$$N \sin \beta = MN \sin(180^\circ - \psi + \beta) - M \sin(180^\circ - \psi) z_p . \quad (18)$$

Utilizando a identidade trigonométrica do seno da diferença, reescreve-se (18) como

$$N \sin \beta = MN \sin(\psi - \beta) - M \sin \psi z_p . \quad (19)$$

Isolando z_p na equação (19), tem-se que

$$M \sin \psi z_p = MN \sin(\psi - \beta) - N \sin \beta$$

$$z_p = \frac{N \sin(\psi - \beta)}{\sin \psi} - \frac{N \sin \beta}{M \sin \psi} . \quad (20)$$

Substituindo-se M e N , tem-se que

$$z_p = \frac{|z_1| \sin(\psi - \beta)}{\sin \psi} - \frac{|z_1| \sin \beta}{\frac{1}{K_d |G(z_1)|} \sin \psi}$$

$$z_p = \frac{|z_1| \sin(\psi - \beta)}{\sin \psi} - \frac{K_d |z_1| |G(z_1)| \sin \beta}{\sin \psi}$$

$$z_p = \frac{|z_1|}{\sin \psi} (\sin(\psi - \beta) - K_d |G(z_1)| \sin \beta) . \quad (21)$$

Desenvolvendo-se a equação da parte real em (14) fornece

$$N \cos \beta - z_0 = MN \cos(180^\circ - \psi + \beta) - M \cos(180^\circ - \psi) z_p . \quad (22)$$

Utilizando a identidade trigonométrica do cosseno da diferença, é possível reescrever (22) como

$$N \cos \beta - z_0 = -MN \cos(\psi - \beta) + M \cos \psi z_p . \quad (23)$$

Substituindo-se a expressão para z_p em (20) na equação (23), tem-se

$$N \cos \beta - z_0 = -MN \cos(\psi - \beta) + M \cos \psi \left(\frac{N \sin(\psi - \beta)}{\sin \psi} - \frac{N \sin \beta}{M \sin \psi} \right)$$

$$N \cos \beta - z_0 = -MN \cos(\psi - \beta) + \frac{MN \cos \psi \sin(\psi - \beta)}{\sin \psi} - \frac{N \cos \psi \sin \beta}{\sin \psi} . \quad (24)$$

Isolando-se z_0 em (24), tem-se que

$$z_0 = N \cos \beta + MN \cos(\psi - \beta) - \frac{MN \cos \psi \sin(\psi - \beta)}{\sin \psi} + \frac{N \cos \psi \sin \beta}{\sin \psi}$$

$$z_0 = N \cos \beta + MN \cos(\psi - \beta) - MN \cot \psi \sin(\psi - \beta) + N \cot \psi \sin \beta$$

$$z_0 = N(\cos \beta + M \cos(\psi - \beta) - M \cot \psi \sin(\psi - \beta) + \cot \psi \sin \beta) . \quad (25)$$

Finalmente, substituindo-se M e N em (25), chega-se a

$$z_0 = |z_1| \left(\cos \beta + \frac{\cos(\psi - \beta)}{K_d |G(z_1)|} - \frac{\cot \psi \sin(\psi - \beta)}{K_d |G(z_1)|} + \cot \psi \sin \beta \right) . \quad (26)$$

Infelizmente, diferente do que ocorre para o projeto do controlador Avanço/Atraso de Fase em tempo contínuo, no projeto do controlador em tempo discreto não há como determinar o ganho K_d através da especificação de erro em regime permanente, uma vez que o ganho dc do controlador depende também dos parâmetros z_0 e z_p

$$\text{ganho dc} = \lim_{z \rightarrow 1} D(z) = \lim_{z \rightarrow 1} K_d \frac{z - z_0}{z - z_p} = \frac{K_d(1 - z_0)}{1 - z_p}. \quad (27)$$

As equações (21) e (26) mostram então como obter os parâmetros z_0 e z_p de um controlador Avanço/Atraso de Fase de maneira que o diagrama de Lugar das Raízes passe pelos pontos z_1 e z_1^* (onde o asterisco denota o conjugado de um número complexo), e consequentemente tanto z_1 e z_1^* sejam polos do sistema em malha fechada. Observe que o procedimento garante apenas isso, e portanto não garante onde os outros polos, caso existam, irão se localizar. Portanto, o procedimento não garante que o sistema em malha fechada é estável, garante apenas que os polos especificados farão parte do diagrama de Lugar das Raízes. Este é um fato em outros procedimentos de sintonia analítica de controladores de estrutura fixa por meio de técnicas de Lugar das Raízes ou Resposta em Frequência (Phillips and Harbor, 1999) e (Phillips and Nagle, 1994).

Logo, a partir do polo especificado z_1 , e com os valores de módulo e ângulo de $G(z_1)$ e z_1 , é possível determinar analiticamente os parâmetros de um compensador Avanço/Atraso de Fase, sem recorrer a interpretações e projetos gráficos e/ou partindo de cancelamento de polos e zeros entre controlador e planta. Além disso, outras vantagens do método, em comparação com o procedimento de alocação de polos com representação em função de transferência, é que as equações analíticas envolvem operações aritméticas simples de serem efetuadas, eliminando a necessidade de resolver equações diofantinas, além de utilizar um controlador de estrutura mais simples (menos polos e zeros) em relação ao que resultaria no procedimento de alocação de polos.

Observe ainda que os parâmetros z_0 e z_p devem ser positivos e maiores que zero, ou seja, o zero e o polo do controlador devem estar no eixo real positivo, de maneira que no mapeamento do plano- s no plano- z o zero e o polo devam estar no eixo real negativo, de modo a gerar um controlador estável.

3 Exemplo de Aplicação

De maneira a mostrar a aplicação do método, resultados de simulação serão conduzidos em um modelo à parâmetros nominais do controle de posição de um servomotor em um protótipo fabri-

cado pela empresa *Quanser Consulting* para ser utilizado em conjunto com a plataforma *Elvis II* da empresa *National Instruments*. O modelo em tempo contínuo, utilizando-se parâmetros nominais de acordo com o fabricante, é

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{31}{s(0,155s + 1)}, \quad (28)$$

sendo que a saída (posição angular do eixo) é dada em radianos e a entrada é a tensão Volts. Utilizando-se um tempo de amostragem de 20 [ms], o modelo em função de transferência discreta via retentor de ordem-zero é

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,0383z - 0,0367}{z^2 - 1,8789z + 0,8789}. \quad (29)$$

A planta, em malha aberta, possui um zero em $z = -0,9582$ e dois polos, sendo um deles em $z = 0,8789$ e o outro em $z = 1$. Deseja-se que o sistema em malha fechada possua polos em $z_{1,2} = 0,8054 \pm j0,2673$, o que para um tempo de amostragem igual a 20 [ms] gera as seguintes estimativas para a características da resposta transitória: *overshoot* aproximadamente igual a 20% e tempo de acomodação aproximadamente igual a 0,5 [s].

A Figura 2 ilustra o diagrama de Lugar das Raízes do sistema não-compensado, ou seja, considerando o controlador como um ganho unitário ($D(z) = 1$).

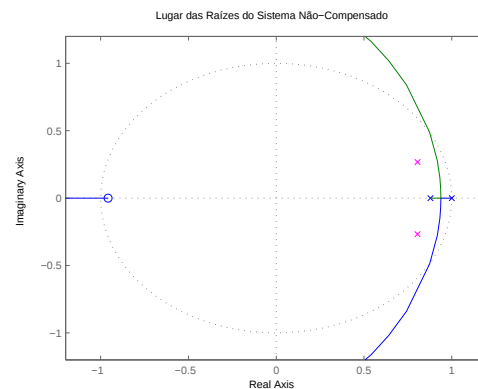


Figura 2: Diagrama de Lugar das Raízes do Sistema Não-Compensado.

Na Figura 2, as cruces em azul denotam os polos da planta, os círculos em azul denotam o zero da planta e as linhas em azul e verde denotam os ramos do diagrama. As cruces em magenta denotam os polos desejados para o sistema em malha fechada. Claramente vê-se que o diagrama de Lugar das Raízes não passa por estes polos desejados, e portanto não há ganho proporcional capaz de impor tais polos em malha fechada. É necessário então o projeto do controlador para forçar com que o diagrama de Lugar das Raízes passe por tais pontos.

Com os polos em malha fechada especificados, tem-se que $|z_1| = 0,8486$ e $\beta = 0,3204$ [rad]. Substituindo-se z_1 em $G(z)$, tem-se que $|G(z_1)| = 0,7456$ e $\psi = 2,3944$ [rad]. Uma vez que $\psi = 2,3944$ [rad], o controlador deverá contribuir com um ângulo de $\pi - \psi = 0,7472$ [rad] ao critério de ângulo, devendo ser, portanto, do tipo Avanço de Fase, pois a contribuição é positiva. Designando-se $K_d = 2$, e então utilizando as equações (21) e (26), calcula-se os parâmetros $z_0 = 0,7807$ e $z_p = 0,5075$, que por sua vez geram um controlador estável. Sendo assim, a equação do controlador Avanço de Fase é

$$D(z) = 2 \frac{(z - 0,7807)}{z - 0,5075} . \quad (30)$$

A Figura 2 ilustra o diagrama de Lugar das Raízes do sistema com o compensador projetado, dado por (30).

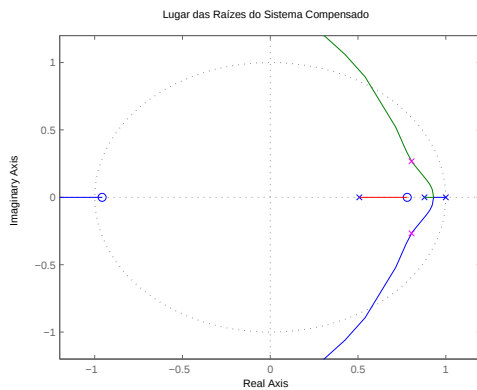


Figura 3: Diagrama de Lugar das Raízes do Sistema Compensado.

Na Figura 3, as cruze em azul denotam os polos da planta e do controlador, os círculos em azul denotam os zeros da planta e do controlador e as linhas em azul, verde e vermelho denotam os ramos do diagrama. As cruze em magenta denotam os polos desejados para o sistema em malha fechada. Claramente vê-se que o diagrama de Lugar das Raízes para o sistema compensado passa por estes polos desejados, e para $K_d = 2$ então os polos em malha fechada serão $z_{1,2} = 0,8054 \pm j0,2673$. Percebe-se que, para este caso, o ramo que surge devido a inserção do polo do controlador está sempre no interior do círculo unitário, e portanto para estes polos especificados o sistema será estável em malha fechada.

A Figura 4 ilustra a resposta ao degrau unitário discreto do sistema de controle sem compensador, ou seja, considerando $D(z) = 1$, e com o compensador projetado, dado por (30).

A análise da Figura 4 mostra que o sistema compensado trouxe uma melhoria nas características da resposta transitória em relação ao sistema sem compensador, diminuindo o *overshoot*

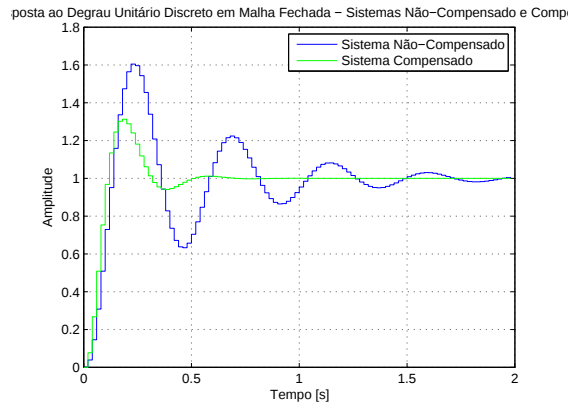


Figura 4: Resposta ao degrau do sistema não-compensado e do sistema compensado.

e o tempo de acomodação. Em relação à resposta esperada, verifica-se que o *overshoot* é um pouco maior que o esperado, em torno de 30% atingido contra 20% esperado, e o tempo de acomodação atingido é igual ao esperado, em torno de 0,5 [s]. O erro em regime permanente é nulo devido ao polo em $z = 1$ proveniente da planta.

4 Conclusões

Neste artigo uma metodologia de sintonia analítica de controladores Avanço/Atraso de Fase em tempo discreto via Lugar Geométrico das Raízes foi apresentada. A metodologia apresentada parte da especificação de polos desejados para o sistema em malha fechada no plano- z , e faz com que o diagrama de Lugar das Raízes do sistema compensado passe pelos pontos desejados.

A metodologia determina analiticamente, através de duas equações que podem ser resolvidas de maneira direta, a posição do polo e do zero do controlador Avanço/Atraso de Fase, sem a necessidade de cancelamento de polos e zeros entre planta e controlador, método tradicionalmente utilizado, ou a resolução de equações diofantinas no procedimento de alocação de polos com a representação em função de transferência.

Em trabalhos futuros pretende-se estender o procedimento para controladores PID e suas variações e aplicar a metodologia em sistemas reais de modo a obter resultados experimentais.

Referências

- Åström, K. J. and Wittenmark, B. (2008). *Adaptive Control*, 2 edn, Dover Publications.
- Cuoghi, S. and Ntogramatzidis, L. (2013). Direct and exact methods for the synthesis of discrete-time proportional-integral-derivative controllers, *IET Control Theory and Applications* 7(18): 2164–2171.

- Dorf, R. C. and Bishop, R. H. (2013). *Sistemas de Controle Modernos*, 12 edn, LTC.
- Emami, T., Watkins, J. M. and O'Brien, R. T. (2007). An unified procedure for continuous-time and discrete-time root locus and bode design, *Proceedings of the 2007 American Control Conference*, pp. 2509–2514.
- Lee, J. H. (2005). A new phase-lead design method using the root locus diagrams, *IEEE Transactions on Automatic Control* **50**(11): 1887–1891.
- Loh, A. P., Cai, X. and Tan, W. W. (2004). Auto-tuning of phase lead/lag compensators, *Automatica* **40**: 423–429.
- Nassirharand, A. and Karimi, H. (2004). Closed-form solution for design of lead/lag compensators, *International Journal of Electrical Engineering Education* **41**: 172–180.
- O'Brien Jr., R. T. and Watkins, J. M. (2001). A streamlined for teaching root locus compensator design, *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3224–3229.
- O'Brien Jr., R. T. and Watkins, J. M. (2005). A unified procedure for discrete-time root locus and bode design, *Proceedings of the 2005 American Control Conference*, pp. 4935–4940.
- Ogata, K. (2011). *Engenharia de Controle Moderno*, 5 edn, Pearson.
- Phillips, C. L. and Harbor, R. D. (1999). *Feedback Control Systems*, Prentice Hall.
- Phillips, C. L. and Nagle, H. T. (1994). *Digital Control System Analysis and Design*, Prentice Hall.
- Wang, D. J. (2008). Synthesis of phase-lead/lag compensators with complete information on gain and phase margins, *Automatica* **45**: 1026–1031.
- Wang, Q. G., Ye, Z. and Hang, C. C. (2006). Tuning of phase-lead compensators for exact gain and phase margins, *Automatica* **42**(2): 349–352.
- Zanasi, R. and Morselli, R. (2009). Discrete inversion formulas for the design of lead and lag compensators, *Proceedings of European Control Conference 2009*, pp. 5069–5074.