

## CONSENSO EM SISTEMAS MULTI-AGENTES HETEROGÊNEOS SUJEITOS A RETARDOS VARIANTES NAS AÇÕES DE CONTROLE

CARLOS R. P. DOS SANTOS JUNIOR\*, JOSÉ REGINALDO H. CARVALHO\*, FERNANDO O. SOUZA†

\**Instituto de Computação - Universidade Federal do Amazonas  
Av. Rodrigo Otávio 6200, 69077-000, Manaus, AM, Brasil.*

†*Departamento de Engenharia Eletrônica - Universidade Federal de Minas Gerais  
Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil.*

{carlosrpdsj,reginaldo}@icomp.ufam.edu.br, fosouza@cpdee.ufmg.br

**Abstract**— This paper presents a consensus analysis method, based on linear matrix inequalities, for heterogeneous multi-agent systems subject to delayed inputs. It is assumed that the delays are nonuniform and time-varying. The proposed approach consists in rewriting the multi-agent system as a reduced order delayed linear system, thus, the consensus is analyzed via Lyapunov-Krasovskii theory. Finally, the efficiency of the proposed method is verified by numerical simulations.

**Keywords**— heterogeneous multi-agent systems, consensus, time-delay, Lyapunov-Krasovskii, LMIs.

**Resumo**— Este artigo apresenta um método para análise do consenso, baseado em desigualdades matriciais lineares, em sistemas multi-agentes heterogêneos sujeitos a retardos nas ações de controle, os quais são assumidos não uniformes e variantes no tempo. A abordagem proposta consiste em reescrever o sistema multi-agente em um sistema linear sujeito a retardo no tempo e, assim, o consenso é analisado via teoria de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii. Por fim, a eficiência do método proposto é verificada por meio de simulações numéricas.

**Palavras-chave**— sistemas multi-agentes heterogêneos, consenso, retardo no tempo, Lyapunov-Krasovskii, LMIs.

### 1 Introdução

O problema do consenso em sistemas multi-agentes (SMAs) consiste em determinar uma lei de controle que possibilite ao grupo de agentes, por meio de troca de informações, chegar a um acordo sobre um determinado valor de interesse tal como distância, altura, velocidade, temperatura, etc. Suas aplicações vêm atraindo a atenção de pesquisadores no tratamento de problemas como a formação de agentes autônomos (Jadbabaie et al., 2003; Olfati-Saber, 2006), controle de múltiplos robôs (Mengji et al., 2014) e ranqueamento de páginas (Ishii and Tempo, 2014). Para uma revisão detalhada apresentando os avanços e aplicações do problema do consenso veja Cao et al. (2013).

Em aplicações reais SMAs estão sujeitos a: *i*) presença de retardos na comunicação entre os agentes, devido a limitações físicas; e nas ações de controle, inerentes do processamento de sinais e da ação dos atuadores, e *ii*) agentes heterogêneos, pois mesmo agentes de mesma natureza podem possuir dinâmicas diferentes devido, por exemplo, ao desgaste diferenciado dos atuadores e, além disso, existem aplicações em que os agentes podem ser de natureza diferente, por exemplo, um problema de formação entre robôs terrestres e robôs aéreos.

Na literatura, o estudo do consenso em sistemas multi-agentes heterogêneos (SMAHs) foi iniciado por Zheng et al. (2011), estudando um SMAH composto por agentes com dinâmica integrador puro de primeira e segunda ordem, além

de discutir o problema de consenso sob dois protocolos, um linear e outro com saturação. Como resultado, foram estabelecidas condições suficientes para análise do consenso para esta classe de sistemas. A partir deste trabalho diversas pesquisas foram desenvolvidas considerando outras peculiaridades do problema de consenso, tais como: tempo discreto (Liu and Liu, 2011), topologia variável, retardos de comunicação, retardos de entrada (Dai et al., 2014), agentes com dinâmicas lineares e não lineares (Zhu et al., 2014), etc.

O presente trabalho apresenta um método para análise de consenso em sistemas multi-agentes heterogêneos sujeitos a retardos variantes nas ações de controle do tipo *não uniforme* e, possivelmente, *não* diferenciáveis em redes direcionadas, diferentemente de Wang and Sun (2015) que considera retardos *uniformes* e diferenciáveis. O presente trabalho assume que os atrasos pertencem a domínios conhecidos, i.e.,  $\tau_i(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$ ,  $\forall i$  com  $\tau > 0$  e  $\tau \geq \mu \geq 0$ . Portanto, a caracterização do retardo considerada aqui é mais geral que a apresentada em (Wang and Sun, 2015).

No presente trabalho a abordagem proposta consiste em reescrever o SMAH como um sistema linear sujeito a retardo no tempo e, então, o consenso é analisado via teoria de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii. Assim, condições suficientes para a análise de consenso formuladas como desigualdades matriciais lineares (LMI, do inglês: *Linear Matrix Inequalities*) são obtidas. Por fim, para ilustração da eficiência do método proposto é apresentado um exemplo de aplicação em um problema de formação entre robôs terrestres e aéreos.

## 2 Ferramentas Matemáticas

### 2.1 Teoria Algébrica dos Grafos

Um grafo é uma representação de um conjunto de nós e um conjunto de arestas. Em um grafo direcionado as arestas que ligam os nós são unidirecionais, diferente dos grafos não direcionados onde as arestas são bidirecionais. O grafo é dito conectado quando existe um caminho de um nó para qualquer outro, caso contrário, diz-se que o grafo é não conectado.

Matematicamente, um grafo é descrito por  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , sendo que  $\mathcal{V}$  representa o conjunto dos  $n$  nós e  $\mathcal{E}$  o conjunto das arestas. A princípio, um grafo possui três representações matriciais, são elas as matrizes: de adjacências, de grau e a laplaciana. A matriz de adjacências  $\mathcal{A} = [a_{ij}]$ , é uma matriz quadrada e seus elementos são definidos por  $a_{ij} = 0$  se  $i = j$  ou se não existir uma aresta conectando o nó  $v_j$  ao  $v_i$  e  $a_{ij} = 1$  se existir uma aresta conectando o nó  $v_j$  ao  $v_i$ . A matriz de grau  $\mathcal{D} = [d_{ii}]$  é uma matriz diagonal relacionada a matriz de adjacências e seus elementos são definidos por  $d_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ . Já a matriz laplaciana  $L = [l_{ij}]$  é dada por  $L = \mathcal{D} - \mathcal{A}$ , ou seja,  $l_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}$  e  $l_{ij} = -a_{ij}$ . Note que a soma dos elementos das linhas de  $L$  é nula, ou seja:

$$L\mathbf{1} = 0, \quad (1)$$

sendo  $\mathbf{1}$  um vetor coluna unitário com dimensão apropriada.

## 3 Formulação do Problema

### 3.1 Sistemas Multi-Agentes Heterogêneos

Considere o seguinte SMAH sujeito a retardos variantes no tempo nas ações de controle, do tipo não uniformes e não diferenciáveis, composto por  $m$  agentes com dinâmica integrador simples puro e  $n$  agentes com dinâmica integrador duplo puro:

$$\dot{x}_i(t) = \begin{cases} u_i(t - \tau_i(t)) & i \in \mathcal{I}_m, \\ w_i(t), \dot{w}_i(t) = u_i(t - \tau_i(t)) & i \in \mathcal{I}_n, \end{cases} \quad (2)$$

sendo  $x_i, v_i \in \mathbb{R}$  os estados e  $u_i \in \mathbb{R}$  a entrada de controle do  $i$ -ésimo agente,  $\mathcal{I}_m = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ ,  $\mathcal{I}_n = \{m+1, m+2, m+3, \dots, m+n\}$  e  $\tau_i(t) = \tau + \mu_i(t)$  o retardo no tempo, sendo  $\tau$  uma constante que representa seu valor nominal e  $\mu_i(t)$  uma perturbação variante no tempo que satisfaz  $|\mu_i(t)| \leq \mu$ ,  $\forall i$ , assim, temos que  $\tau_i(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$ ,  $\forall i$ .

Ademais, para resolver o problema de consenso no SMAH (2), considere o protocolo:

$$u_i(t) = \begin{cases} -\sum_{j=1}^{m+n} a_{ij} (x_i(t) - x_j(t)) & i \in \mathcal{I}_m, \\ -\sum_{j=1}^{m+n} a_{ij} (x_i(t) - x_j(t)) - k_i w_i(t) & i \in \mathcal{I}_n, \end{cases} \quad (3)$$

no qual  $k_i > 0$  é o ganho de realimentação do estado  $w_i$ .

Um SMA pode ser representado por um grafo no qual os nós correspondem aos agentes e as arestas aos canais de comunicação. Assim, representando o SMAH considerado por um grafo no qual os  $m$  primeiros nós correspondem aos agentes de primeira ordem e os demais  $n$  nós aos agentes de segunda ordem, define-se a matrix laplaciana  $L$  de dimensão  $(m+n) \times (m+n)$ . Ademais, define-se a matrix laplaciana  $L_i$  que representa o subgrafo contendo apenas as arestas apontando para o vértice (agente)  $i$ , tal que  $L = L_1 + L_2 + \dots + L_{m+n}$ .

Assim, a dinâmica dos agentes em (2) sob o protocolo em (3) é dada por:

$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)}(t) &= \sum_{i=1}^{m+n} -L_i^{(1)} x(t - \tau_i(t)) \\ \dot{x}^{(2)}(t) &= w^{(2)}(t) \\ \dot{w}^{(2)}(t) &= \sum_{i=1}^{m+n} -L_i^{(2)} x(t - \tau_i(t)) \\ &\quad - \sum_{i=m+1}^{m+n} K_i w^{(2)}(t - \tau_i(t)) \end{cases}$$

com  $x^{(1)} = [x_1 \dots x_m]^T$ ,  $x^{(2)} = [x_{m+1} \dots x_{m+n}]^T$ ,  $x = [x^{(1)T} x^{(2)T}]^T$ ,  $w^{(2)} = [w_{m+1} \dots w_{m+n}]^T$ ;  $L_i^{(1)}$  de dimensão  $m \times (m+n)$  é a submatriz formada pelas  $m$  primeiras linhas de  $L_i$  e  $L_i^{(2)}$  de dimensão  $n \times (m+n)$  é a submatriz formada pelas  $n$  últimas linhas de  $L_i$ ;  $K_i$  é uma matriz de dimensão  $n \times n$  cujo elemento na posição  $(i-m) \times (i-m)$  é igual a  $k_i$  e os demais são nulos, tal que  $\sum_{i=m+1}^{m+n} K_i = \text{diag}\{k_{m+1}, \dots, k_{m+n}\}$ .

Então, definindo  $K_i = 0$  para todo  $i \in \mathcal{I}_m$ , podemos escrever o sistema na forma matricial:

$$\dot{X}(t) = AX(t) - \sum_{i=1}^{m+n} B_i X(t - \tau_i(t)) \quad (4)$$

na qual  $X = [x^{(1)} x^{(2)} w^{(2)}]^T$ ,

$$A = \begin{bmatrix} 0_{m \times (m+n)} & 0_{m \times n} \\ 0_{n \times (m+n)} & I_n \\ 0_{n \times (m+n)} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \text{ e } B_i = \begin{bmatrix} L_i^{(1)} & 0_{m \times n} \\ 0_{n \times (m+n)} & 0_{n \times n} \\ L_i^{(2)} & K_i \end{bmatrix}.$$

Para formalizar o problema de análise de consenso no SMAH apresentado, considere:

**Definição 1** (Zheng et al., 2011): O SMAH (4) atinge consenso se para qualquer condição inicial, as seguintes condições forem satisfeitas:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - x_j(t)| = 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{I}_m \cup \mathcal{I}_n, i \neq j \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} |w_i(t) - w_j(t)| = 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{I}_n, i \neq j.$$

### 3.2 Consenso como Problema de Estabilidade

Nesta Seção é apresentado como o SMA pode ser transformado em um sistema linear de ordem

reduzida de modo que a análise do consenso possa ser realizada por meio da análise de estabilidade deste sistema transformado.

Considerando a transformação do tipo árvore (Sun and Wang, 2009) e o SMAH (2), define-se:

$$z(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) - x_2(t) \\ x_1(t) - x_3(t) \\ \vdots \\ x_1(t) - x_{m+n}(t) \\ w_{m+1}(t) - w_{m+2}(t) \\ w_{m+1}(t) - w_{m+3}(t) \\ \vdots \\ w_{m+1}(t) - w_{m+n}(t) \end{bmatrix}$$

sendo  $z = [z_1 \ z_2 \ \cdots \ z_{m+2n-2}]^T$ . Então temos:

$$z(t) = UX(t), \quad (5)$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t)\mathbf{1}_{m+n} \\ w_{m+1}(t)\mathbf{1}_n \end{bmatrix} + Wz(t) \quad (6)$$

na qual  $\mathbf{1}_p$  é um vetor coluna unitário de  $p$  linhas,

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{m+n-1} & -I_{m+n-1} & 0_{(m+n-1) \times n} \\ 0_{(n-1) \times (m+n)} & \mathbf{1}_{n-1} & -I_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$W = \begin{bmatrix} 0_{1 \times (m+n-1)} & 0_{1 \times (n-1)} \\ -I_{m+n-1} & 0_{(m+n-1) \times (n-1)} \\ 0_{1 \times (m+n-1)} & 0_{1 \times (n-1)} \\ 0_{(n-1) \times (m+n-1)} & -I_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Assim, se  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ , o consenso é atingido.

Note que, derivando (5) e usando (4) tem-se

$$\dot{z}(t) = U\dot{X}(t) = UAX(t) - U \sum_{i=1}^{m+n} B_i X(t - \tau_i(t)).$$

Agora, usando (6) e a propriedade (1) temos

$$\dot{z}(t) = UAWz(t) - U \sum_{i=1}^{m+n} B_i Wz(t - \tau_i(t))$$

que pode ser reescrita como

$$\dot{z}(t) = \bar{A}z(t) - \sum_{i=1}^{m+n} \bar{B}_i z(t - \tau_i(t)) \quad (7)$$

com  $\bar{A} = UAW$  e  $\bar{B}_i = UB_iW$ .

Com esta transformação, a seguinte proposição traduz o problema do consenso em um problema de estabilidade.

**Proposição 1** (dos Santos Junior et al., 2014): *O sistema multi-agente heterogêneo (4) atinge consenso assintoticamente se, e somente se, o sistema (7) atingir a origem.*

## 4 Análise do Consenso

O teorema apresentado a seguir é o método proposto por este trabalho como solução para o problema da análise do consenso de sistema multi-agente heterogêneo (4).

**Teorema 1** *Dados  $\tau > 0$  e  $\tau \geq \mu \geq 0$ , o sistema multi-agente heterogêneo (4) com  $\tau_i(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$ , com  $i = 1, 2, \dots, m+n$ , atinge consenso se existirem matrizes  $F, G, P = P^T, Q, R = R^T, S = S^T$  e  $Z = Z^T$  com dimensão  $(m+2n-2) \times (m+2n-2)$  que satisfaçam as seguintes LMIs:*

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ * & \frac{1}{\tau}R \end{bmatrix} > 0, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi & * \\ \mu\Gamma^T & -\mu Z \end{bmatrix} < 0, \quad (9)$$

com  $\Phi$  definido em (11), no topo da página seguinte, e  $\Gamma$  definido abaixo:

$$\Gamma^T = \begin{bmatrix} \bar{B}^T F^T & \bar{B}^T G^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

sendo  $\bar{B} = \sum_{i=1}^{m+n} \bar{B}_i$ .

**Demonstração:** Com base na teoria de análise de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii, esta demonstração mostra que se as LMIs propostas forem satisfeitas, então as desigualdades  $V(z_t) \geq \alpha z^T(t)z(t)$  e  $\dot{V}(z_t) \leq -\alpha z^T(t)z(t)$  também serão, sendo  $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$ ,  $z_t$  corresponde ao valor de  $z(\sigma)$  com  $\sigma \in [t - \tau - \mu, t]$  e  $V(z_t)$  é o seguinte funcional de Lyapunov-Krasovskii:

$$V(z_t) = V_1(z(t)) + V_2(z_t) + V_3(z_t) + V_4(z_t) + V_5(z_t) \quad (12)$$

com

$$V_1(z(t)) = z^T(t)Pz(t),$$

$$V_2(z_t) = 2z(t)^T Q \int_{t-\tau}^t z(\xi) d\xi$$

$$V_3(z_t) = \int_{t-\tau}^t z^T(\xi) R z(\xi) d\xi,$$

$$V_4(z_t) = \int_{-\tau}^0 \int_{t+\zeta}^t \dot{z}^T(\xi) S \dot{z}(\xi) d\xi d\zeta,$$

$$V_5(z_t) = \int_{-\mu}^{\mu} \int_{t+\zeta-\tau}^t \dot{z}^T(\xi) \sum_{i=1}^{m+n} Z_i \dot{z}(\xi) d\xi d\zeta,$$

sendo  $P = P^T, Q, R = R^T, S = S^T$  e  $Z_i = Z_i^T$  matrizes com dimensão apropriada.

A seguir é demonstrado como verificar se a condição  $V(z_t) \geq \alpha z^T(t)z(t)$  é satisfeita. Inicialmente, aplicando a Desigualdade de Jensen (Gu, 2000) em  $V_3(z_t)$  podemos reescrever (12) como:

$$\begin{aligned} V(z_t) &\geq \eta^T \begin{bmatrix} P & Q \\ * & \frac{1}{\tau}R \end{bmatrix} \eta \\ &+ \int_{-\tau}^0 \int_{t+\zeta}^t \dot{z}^T(\xi) S \dot{z}(\xi) d\xi d\zeta \\ &+ \int_{-\mu}^{\mu} \int_{t+\zeta-\tau}^t \dot{z}^T(\xi) \sum_{i=1}^{m+n} Z_i \dot{z}(\xi) d\xi d\zeta, \end{aligned}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} Q + Q^T + R + F\bar{A} + \bar{A}^T F^T & P - F + \bar{A}^T G^T & -Q - F\bar{B} & 0 \\ * & \tau S - G - G^T + 2\mu Z & -G\bar{B} & Q \\ * & * & -R & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{\tau} S \end{bmatrix}. \quad (11)$$

com  $\eta^T = \begin{bmatrix} z^T(t) & \int_{t-\tau}^t z^T(\xi) d\xi \end{bmatrix}$ .

Portanto, uma condição suficiente para garantir  $V(z_t) \geq \alpha z^T(t)z(t)$ , é verificar se o lado direito da desigualdade acima é positivo. Deste modo, se a LMI (8) e as condições  $R > 0$ ,  $S > 0$  e  $Z > 0$ , implícitas na LMI (9), forem satisfeitas, então  $V(z_t) \geq \alpha z^T(t)z(t)$  é verdadeira.

O próximo passo da demonstração mostra que se as LMIs (8) e (9) forem satisfeitas, a condição  $\dot{V}(z_t) \leq -\alpha z^T(t)z(t)$  também será. Assim, derivando o funcional (12) têm-se:

$$\dot{V}(z_t) = \dot{V}_1(z(t)) + \dot{V}_2(z_t) + \dot{V}_3(z_t) + \dot{V}_4(z_t) + \dot{V}_5(z_t) \quad (13)$$

com

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(z(t)) &= \dot{z}^T(t)Pz(t) + z^T(t)P\dot{z}(t), \\ \dot{V}_2(z_t) &= 2\dot{z}^T(t)Q \int_{t-\tau}^t z(\xi) d\xi \\ &\quad + 2z^T(t)Qz(t) - 2z^T(t)Qz(t-\tau), \\ \dot{V}_3(z_t) &= z^T(t)Rz(t) - z(t-\tau)Rz(t-\tau), \\ \dot{V}_4(z_t) &= \dot{z}^T(t)\tau S\dot{z}(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{z}^T(\xi)S\dot{z}(\xi) d\xi, \\ \dot{V}_5(z_t) &= \dot{z}^T(t)2\mu \sum_{i=1}^{m+n} Z_i \dot{z}(t) \\ &\quad - \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} \dot{z}^T(\xi) \sum_{i=1}^{m+n} Z_i \dot{z}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Em seguida, considera-se o seguinte termo nulo auxiliar obtido por meio da equação do sistema (7)

$$\begin{aligned} 0 &= 2[z^T(t)F + \dot{z}^T(t)G] \left[ -\dot{z}(t) + \bar{A}z(t) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^{m+n} \bar{B}_i z(t-\tau_i(t)) \right] \\ &= 2[z^T(t)F + \dot{z}^T(t)G] \left[ -\dot{z}(t) + \bar{A}z(t) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^{m+n} \bar{B}_i \left( z(t-\tau) - \int_{-\tau_i(t)}^{-\tau} \dot{z}(t+\xi) d\xi \right) \right] \\ &= 2\Lambda \left[ -\dot{z}(t) + \bar{A}z(t) - \sum_{i=1}^{m+n} \bar{B}_i z(t-\tau) \right] + v(t), \end{aligned}$$

sendo  $F$  e  $G$  matrizes com dimensões apropriadas,  $\Lambda = [z^T(t)F + \dot{z}^T(t)G]$  e  $v(t) = \int_{-\tau_i(t)}^{-\tau} 2\Lambda \sum_{i=1}^{m+n} \bar{B}_i \dot{z}(t+\xi) d\xi$ . Aplicando em  $v(t)$  a desigualdade

$$2a^T b \leq a^T X^{-1} a + b^T X b$$

sendo  $a$  e  $b$  vetores e a matriz  $X > 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} v(t) &\leq \sum_{i=1}^{m+n} \int_{-\tau_i(t)}^{-\tau} (\Lambda \bar{B}_i) Z_i^{-1} (\Lambda \bar{B}_i)^T d\xi \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m+n} \int_{-\tau_i(t)}^{-\tau} \dot{z}^T(t+\xi) Z_i \dot{z}(t+\xi) d\xi, \\ &\leq \sum_{i=1}^{m+n} \mu (\Lambda \bar{B}_i) Z_i^{-1} (\Lambda \bar{B}_i)^T \\ &\quad + \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} \dot{z}^T(\xi) \sum_{i=1}^{m+n} Z_i \dot{z}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Agora, considerando a nova definição de  $v(t)$ , adicionando o termo nulo a (13), aplicando a Desigualdade de Jensen em  $\dot{V}_4(z_t)$  e colocando este resultado na forma quadrática, obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_t) &\leq \Upsilon^T \Phi \Upsilon + \sum_{i=1}^{m+n} \mu (\Lambda \bar{B}_i) Z_i^{-1} (\Lambda \bar{B}_i)^T, \\ &= \Upsilon^T \Phi \Upsilon + \sum_{i=1}^{m+n} \mu \Upsilon^T \Gamma_i Z_i^{-1} \Gamma_i^T \Upsilon, \\ &= \Upsilon^T \left[ \sum_{i=1}^{m+n} \left( \frac{1}{m+n} \Phi + \Gamma_i \mu Z_i^{-1} \Gamma_i^T \right) \right] \Upsilon. \end{aligned} \quad (14)$$

sendo  $\Upsilon^T = \begin{bmatrix} z^T(t) & \dot{z}^T(t) & z(t-\tau) & \int_{t-\tau}^t z(\xi) d\xi \end{bmatrix}$ ,  $\Phi$  definida em (11) e  $\Gamma$  definida em (10).

Deste modo, uma condição suficiente para garantir  $\dot{V}(z_t) \leq -\alpha z^T(t)z(t)$  para qualquer  $\Upsilon \neq 0$ , é a matriz entre parênteses em (14) ser definida negativa. Então, fazendo  $\sum_{i=1}^{m+n} Z_i = Z$ ,  $\sum_{i=1}^{m+n} \Gamma_i = \Gamma$  e utilizando o complemento de Schur, tal condição é equivalente a

$$\sum_{i=1}^{m+n} \begin{bmatrix} \frac{1}{m+n} \Phi & \mu \Gamma_i \\ * & -\mu Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \mu \Gamma \\ * & -\mu Z \end{bmatrix} < 0.$$

Então se as LMIs (8) e (9) forem satisfeitas a condição  $\dot{V}(z_t) \leq -\alpha z^T(t)z(t)$  também será. Isto completa a demonstração.  $\square$

## 5 Simulações Numéricas

Nesta Seção, para fins de validação é apresentado um exemplo numérico que ilustra a aplicabilidade do método proposto por este trabalho. Com o intuito de mostrar que o método pode proporcionar resultados interessantes em aplicações práticas, considere o seguinte cenário: um sistema multi-robôs composto por dois robôs terrestres e dois robôs aéreos (todos holonômicos) desejam atingir uma determinada formação sobre os

eixos de coordenada  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  para atuarem em um procedimento de mapeamento florestal. A ideia é utilizar o Teorema 1 para verificar se, dadas as condições de comunicação, o sistema atinge uma formação preestabelecida. Será considerado que os robôs aéreos já estão em voo a uma altura segura que não interfere as trajetórias dos robôs terrestres. Tal sistema está sujeito   retardos variantes nas ações de controle. A Figura 1 ilustra como está organizado o esquema de troca de informações entre estes robôs na qual as setas indicam o sentido da comunicação e consequentemente quais agentes se comunicam e  $\tau_i(t)$  é o retardo variante nas ações de controle. Os agentes 1 e 2 representam os robôs terrestres e os agentes 3 e 4 os robôs aéreos.

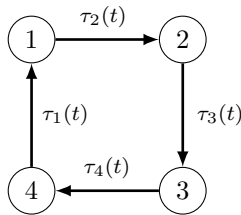


Figura 1: Topologia de comunicação do sistema multi-robôs, na qual  $\tau_i(t)$  representa o retardo variante nas ações de controle.

Assumindo que a dinâmica dos robôs terrestres   integrador simples de primeira ordem e que a dos robôs aéreos   integrador simples de segunda ordem, podemos modelar o sistema como:

$$\dot{x}_i(t) = \begin{cases} u_i^x(t) & i \in \mathcal{I}_m, \\ w_i^x(t), \dot{w}_i^x(t) = u_i^x(t - \tau_i^x(t)) & i \in \mathcal{I}_n, \end{cases} \quad (15)$$

$$\dot{y}_i(t) = \begin{cases} u_i^y(t) & i \in \mathcal{I}_m, \\ w_i^y(t), \dot{w}_i^y(t) = u_i^y(t - \tau_i^y(t)) & i \in \mathcal{I}_n, \end{cases} \quad (16)$$

na qual  $x_i$  e  $y_i$  são as posições do  $i$ -ésimo agente nas coordenadas  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , respectivamente, e  $w_i^x$  e  $w_i^y$  as velocidades do  $i$ -ésimo agente nas direções  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , respectivamente.

Com o intuito de analisar o problema de formação contextualizado por meio do método proposto, escrevemos o problema de formação como um problema de consenso considerando os seguintes protocolos de consenso (lei de controle):

$$u_i^x(t) = \begin{cases} -\sum_{j=1}^m a_{ij} (x_i(t) - \delta_i^x - x_j(t) + \delta_j^x) & i \in \mathcal{I}_m, \\ -\sum_{j=m+1}^{m+n} a_{ij} (x_i(t) - \delta_i^x - x_j(t) + \delta_j^x) - k_i^x w_i^x(t) & i \in \mathcal{I}_n, \end{cases} \quad (17)$$

$$u_i^y(t) = \begin{cases} -\sum_{j=1}^m a_{ij} (y_i(t) - \delta_i^y - y_j(t) + \delta_j^y) & i \in \mathcal{I}_m, \\ -\sum_{j=m+1}^{m+n} a_{ij} (y_i(t) - \delta_i^y - y_j(t) + \delta_j^y) - k_i^y w_i^y(t) & i \in \mathcal{I}_n, \end{cases} \quad (18)$$

nas quais  $\delta_i^x$  e  $\delta_j^x$  são usados para calcular a distância relativa desejada  $(\delta_j^x - \delta_i^x)$  entre o  $j$ -ésimo e o  $i$ -ésimo na coordenada  $\mathbf{x}$  e, analogamente,  $\delta_i^y$  e  $\delta_j^y$  para calcular a distância relativa desejada na coordenada  $\mathbf{y}$ .

Substituindo respectivamente (17) e (18) em (15) e (16) e em seguida colocando este resultado na forma matricial, escrevemos o sistema como:

$$\dot{X}(t) = A \begin{bmatrix} p^x(t) \\ w^x(t) \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^{m+n} B_i \begin{bmatrix} p^x(t - \tau_i^x(t)) \\ w^x(t - \tau_i^x(t)) \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\dot{Y}(t) = A \begin{bmatrix} p^y(t) \\ w^y(t) \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^{m+n} B_i \begin{bmatrix} p^y(t - \tau_i^y(t)) \\ w^y(t - \tau_i^y(t)) \end{bmatrix} \quad (20)$$

nas quais  $p^x(t) = [x_1(t) - \delta_1^x \dots x_n(t) - \delta_n^x]^T$  e  $p^y(t) = [y_1(t) - \delta_1^y \dots y_n(t) - \delta_n^y]^T$ . Deste modo, (19) e (20) estão no mesmo formato de (4) permitindo que o problema de formação dos multi-robôs possa ser analisado pelo Teorema 1.

As matrizes laplacianas associadas aos retardos do sistema multi-robôs com topologia de comunicação dados pela Figura 1 são:

$$L_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L_3^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L_4^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

note que  $L_1^{(1)} + L_2^{(1)} + L_3^{(2)} + L_4^{(2)} = L$  é a matriz laplaciana do sistema geral.

Em todos os testes apresentados a seguir, é considerado que a matriz de ganhos do estado  $w$  é dada por  $K = \text{diag}\{1, 1\}$ .

Inicialmente, é realizado o teste para verificar sob quais valores de retardo o sistema multi-robôs com topologia de comunicação apresentada na Figura 1, atinge a formação. Os resultados estão listados na Tabela 1, na qual  $\mu_{\max}$  corresponde ao máximo valor de  $\mu$  encontrado para os valores de  $\tau$  dados. Note que para  $\mu = 0$  o sistema está sujeito a um retardo constante, por outro lado, quando  $\mu > 0$ , o sistema está sujeito a retardos variantes no tempo, não uniformes e possivelmente, não diferenciáveis.

| $\tau$       | 0,130 | 0,160 | 0,190 | 0,220 | 0,294 |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\mu_{\max}$ | 0,092 | 0,066 | 0,041 | 0,017 | 0,000 |

Tabela 1: Máxima perturbação  $\mu$  para diferentes valores de  $\tau$ , tal que  $\tau_i^x(t), \tau_i^y(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$ .

Finalmente, foram realizadas simulações de trajetória e temporais para ilustrar o efeito dos retardos no comportamento do sistema e verificar a eficiência do método quanto à garantia da formação dos multi-robôs. A ideia é simular o sistema considerando uma formação desejada e um intervalo de retardos entre os estabelecidos pelo método verificando a sua eficácia. A formação desejada dada por  $\delta^x = [1 \ 4 \ 1 \ 4]^T$  e  $\delta^y = [4 \ 4 \ 1 \ 1]^T$  é apresentada pelos triângulos na Figura 2. Esta formação garante que os robôs formem um quadrado de modo que os dois robôs terrestres (1 e 2) fiquem a frente e os dois aéreos (3 e 4) atrás.

Assim, as trajetórias do sistema multi-robôs (19-20), considerando a topologia de comunicação da Figura 1, sob retardos variantes não uniformes e não diferenciáveis pertencentes a um intervalo dado por  $\tau_i^x(t), \tau_i^y(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$  sendo  $\tau = 0,150$  e  $\mu = 0,050$ , com as condições iniciais  $x(0) = [4 \ 1 \ 2 \ 2]^T$ ,  $w^x(0) = [0 \ 0]^T$ ,  $y(0) = [3 \ 2 \ 4 \ 3]^T$  e  $w^y(0) = [0 \ 0]^T$ , são apresentadas na Figura 2 na qual os quadrados representam a posição inicial.

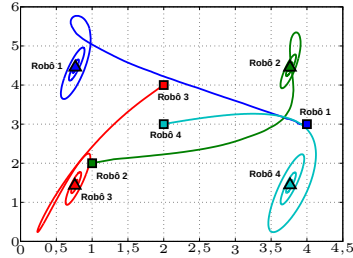


Figura 2: Trajetória dos robôs no plano.  $\square$  representa a posição inicial e  $\triangle$  a posição final/desejada dos Robôs.

As trajetórias dos robôs apresentadas na Figura 2, mostram a eficiência do método proposto ao verificar que para tais condições de retardo o sistema atingiria a formação desejada. Considerando as condições do exemplo anterior, a Figura 3 apresenta a simulação temporal da coordenada  $x$  e as velocidades  $w^x$ .

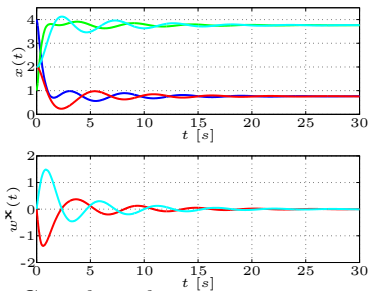


Figura 3: Considerando  $\tau = 0,150$  e  $\mu = 0,050$ , parte superior: trajetória dos estados  $x(t)$  e parte inferior: trajetória dos estados  $w^x$ .

Por fim, a Figura 4 ilustra um trecho do comportamento do retardo variante na ação de controle da coordenada  $x$  do Robô 1 ( $\tau_1^x(t)$ ).

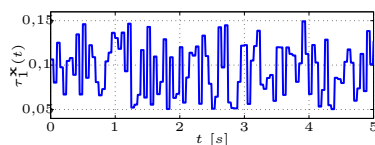


Figura 4: Ilustração de um trecho do comportamento do retardo  $\tau_1^x(t)$  com  $\tau = 0,150$  e  $\mu = 0,050$ .

## 6 Considerações Finais

Este trabalho apresentou um novo método com caráter suficiente baseado em LMIs, para análise do consenso em sistemas multi-agentes heter geneos sujeitos a retardos variantes, não uniformes e não diferenciáveis nas ações de controle em redes direcionadas de topologia fixa. Os resultados apresentados mostram que o método proposto é eficiente no sentido de garantir o consenso para as condições do modelo proposto, apresentando, no melhor conhecimento dos autores, resultados inéditos. Exemplos numéricos ilustraram a aplicabilidade e eficiência do método proposto para o problema da formação de robôs heter geneos. Para trabalhos futuros sugere-se tratar co-

munica  o intermitente entre os agentes e saturação no protocolo de consenso.

## Agradecimentos

Ao Instituto SENAI de Inovação em Microeletrônica, IComp, FAPEAM(PROTI-Mobilidade 015/2013 e PROTI-Pesquisa 016/2013), FAPEMIG e CNPq.

## Referências

- Cao, Y., Yu, W., Ren, W. and Chen, G. (2013). An overview of recent progress in the study of distributed multi-agent coordination, *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, Vol. 9, pp. 427–438.
- Dai, P., Liu, C. and Liu, F. (2014). Consensus problem of heterogeneous multi-agent systems with time delay under fixed and switching topologies, *International Journal of Automation and Computing*, Vol. 11, pp. 340–346.
- dos Santos Junior, C. R. P., Souza, F. O. and Savino, H. J. (2014). Consenso em sistemas multiagentes sujeitos a atrasos na comunicação e topologia variável, *XX Congresso Brasileiro de Autm tica*, pp. 99–106.
- Gu, K. (2000). An integral inequality in the stability problem of time-delay systems, *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 3, pp. 2805–2810.
- Ishii, H. and Tempo, R. (2014). The pagerank problem, multiagent consensus and web aggregation, *IEEE Control Systems*, Vol. 34, pp. 34–54.
- Jadbabaie, A., Lin, J. and Morse, A. S. (2003). Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 48, pp. 988–1001.
- Liu, C. and Liu, F. (2011). Stationary consensus of heterogeneous multi-agent systems with bounded communication delays, *Automatica*, Vol. 47, pp. 2130–2133.
- Mengji, S., Kaiyu, G. and Li, P. (2014). Consensus of multiple mobile robot systems with directed topologies and nonuniform time delays, *International Conference on Mechatronics and Control*, pp. 787–790.
- Olfati-Saber, R. (2006). Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 51, pp. 401–420.
- Sun, Y. G. and Wang, L. (2009). Consensus of multi-agent systems in directed networks with nonuniform time-varying delays, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 54, pp. 1607–1613.
- Wang, B. and Sun, Y. (2015). Consensus analysis of heterogeneous multi-agent systems with time-varying delay, *Entropy*, Vol. 17, pp. 3631–3644.
- Zheng, Y., Zhu, Y. and Wang, L. (2011). Consensus of heterogeneous multi-agent systems, *IET Control Theory and Applications*, Vol. 5, pp. 1881–1888.
- Zhu, Y., Guan, X. and Luo, X. (2014). Finite-time consensus of heterogeneous multi-agent systems with linear and nonlinear dynamics, *Acta Automatica Sinica*, Vol. 40, pp. 2618–2624.