

REDUÇÃO DE ORDEM $\mathcal{H}_\infty$ DE SISTEMAS INCERTOS A TEMPO CONTÍNUO USANDO RELAXAÇÕES LMIS

GUSTAVO S. MAZZOCCANTE*, RICARDO C. L. F. OLIVEIRA*

*Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação,
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, 13083-852, Campinas, SP, Brasil

Emails: {gsmazzo, ricfow}@dt.fee.unicamp.br

Abstract— This article presents a new approach for model reduction of continuous-time polytopic robustly stable linear systems using the $\mathcal{H}_\infty$ norm as performance criterion. The proposed synthesis conditions are expressed in terms of linear matrix inequalities involving optimization variables with polynomial dependence of generic degree, providing flexibility when choosing the degree of the matrices associated to the reduced model to be obtained, allowing the reduced model to be precisely known (degree zero), polytopic (degree one) or even of higher degrees, which is a novelty for the model reduction problem. Scalar searches and an iterative procedure inspired on the two stage technique are proposed to reduce the conservatism of the method. Numerical examples from the literature are used to illustrate the potentialities of the proposed approach when compared to existing methods.

Keywords— Uncertain linear systems, Polytopic uncertainty, Model reduction, Linear Matrix Inequalities, $\mathcal{H}_\infty$ norm

Resumo— Este artigo apresenta uma nova técnica de redução de ordem de sistemas lineares politópicos robustamente estáveis a tempo contínuo utilizando a norma $\mathcal{H}_\infty$ como critério de desempenho. As condições de síntese propostas são expressas em termos de desigualdades matriciais lineares envolvendo variáveis de otimização com dependência polinomial de grau genérico, fornecendo flexibilidade na escolha do grau das matrizes do modelo reduzido a serem determinadas, permitindo que o sistema reduzido seja precisamente conhecido (grau zero), politópico (grau um) ou até mesmo de graus maiores, o que é uma novidade na literatura de redução de modelos. Buscas em escalares e um procedimento iterativo inspirado na técnica de dois estágios são propostos para reduzir o conservadorismo do método. Exemplos numéricos da literatura ilustram as vantagens da técnica quando comparada com os métodos existentes.

Palavras-chave— Sistemas lineares incertos, Incerteza politópica, Redução de modelo, Desigualdades matriciais Lineares, Norma $\mathcal{H}_\infty$

1 Introdução

O problema de redução de modelos de sistemas dinâmicos tem sido intensamente investigado durante as últimas quatro décadas. Esse esforço de pesquisa justifica-se principalmente por exigências cada vez maiores de desempenho, implementabilidade e baixo custo como requisitos básicos dos projetos, que devem levar em conta modelos matemáticos cada vez mais precisos, considerando, por exemplo, a presença de incertezas paramétricas e restrições estruturais. Nesse contexto, torna-se prioritária a síntese de controladores dinâmicos de baixa ordem que assegurem um bom desempenho do sistema em malha fechada. É natural considerar que modelos de baixa ordem são mais fáceis para analisar, simular e implementar se comparados com modelos de ordem superiores. Sob essa ótica, a obtenção de modelos de baixa ordem que se comportem, segundo algum critério, de maneira próxima aos modelos originais é um tópico de relevância destacada em teoria de controle.

Na literatura existem inúmeros métodos para tratar a redução de modelos. Para sistemas sem incertezas, os métodos clássicos mais conhecidos são: redução balanceada (Moore, 1981) e aproximação da norma de Hankel ótima (Glover, 1984), aplicados sobre modelos balanceados. Uma década depois, como solução alternativa para o problema de redução de modelos via programação convexa, foi apresentada a possibilidade do uso de desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix inequalities* - LMIs) para determinar um limitante superior para a

norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro de aproximação, estendendo resultados conhecidos na área de síntese de controladores (Helmersson, 1994). Em (Helmersson, 1994), foi exposto um método iterativo de dois passos para minimização da norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro de aproximação comparado com a redução da norma de Hankel. Logo após, foram sugeridas técnicas para o cômputo de modelos reduzidos com incertezas politópicas baseadas no método de projeção alternado e no algoritmo do cone complementar, (Wu, 1996) e (Wu e Jaramillo, 2002) respectivamente. Em (Ebihara e Hagiwara, 2004; Geromel et al., 2005), são fornecidas formulações convexas baseadas em condições LMIs suficientes para redução de modelo usando a minimização da norma $\mathcal{H}_\infty$. (Trofino e Coutinho, 2004) propõem uma nova abordagem LMI para redução em $\mathcal{H}_\infty$, aplicada a sistemas politópicos incertos utilizando a estabilidade quadrática. Uma estratégia para encontrar um modelo reduzido para sistemas discretos com incertezas politópicas utilizando um algoritmo iterativo baseado em LMIs é apresentado em (Assunção e Peres, 1999). A convergência de tal algoritmo não é garantida, e a utilização do método *Branch and Bound* é investigada em (Assunção et al., 2007). Uma abordagem similar também é apresentada em (Gonçalves et al., 2006; Gonçalves et al., 2009) para redução de modelos $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para sistemas incertos baseada em um algoritmo de otimização multiobjetivo aplicado diretamente no espaço de parâmetros do modelo reduzido. Mais recentemente, (Adegas e Stoustrup, 2012) apresentaram condições LMIs suficientes para a redução $\mathcal{H}_\infty$. Para isso, foi necessário uma estrutura auxiliar de variáveis

que permitiu o modelo original de ordem n ser reduzido para ordem $r = n/s$ sendo que n, s e $r \in \mathbb{N}$.

O presente trabalho propõe uma contribui o para o caso de redu o de modelos incertos robustamente estáveis utilizando a norma $\mathcal{H}_\infty$ como critério de desempenho. Embora não exista uma soluço exata nem mesmo para sistemas sem incerteza, o caso de sistemas incertos merece aten o, por contemplar modelos mais realistas, e portanto de maior interesse prático. Tendo como inspira o as técnicas mais recentes de projeto de filtros (Lacerda et al., 2011; Borges et al., 2011) e controladores de ordem reduzida (Aguilhari et al., 2012a), neste trabalho   proposto um método de redu o de modelos baseado na estratégia de dois estágios, que fornece bons resultados no contexto de projeto de controladores. As condi es de síntese são expressas em termos de relaxa es LMIs e minimizam um limitante superior para a norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro de aproxima o. Como novidade, a técnica permite o emprego de matrizes de Lyapunov e variáveis de folga polinomiais, aumentando a flexibilidade na determina o das matrizes do modelo reduzido. Buscas em escalares, introduzidas no processo de lineariza o de desigualdades não convexas, e um procedimento iterativo t mbem são propostos como meios de reduzir o conservadorismo do método. Compara es numéricas com métodos da literatura ilustram as vantagens da técnica.

Nota o: Matrizes são grafadas em letras maiúsculas, e vetores e escalares em letras minúsculas; $X > 0$ ($X < 0$) indica que a matriz X   definida positiva (negativa); X' denota a transposta da matriz X ; I (0) denota a matriz identidade (nula) de dimensão apropriada; $*$ denota blocos simétricos em matrizes.

2 Preliminares

Seja o sistema linear invariante e contínuo no tempo descrito pelas equa es:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(\alpha)x + B(\alpha)u \\ y &= C(\alpha)x + D(\alpha)u\end{aligned}\quad (1)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^p$ são o vetor de estados, o vetor de entradas do sistema e o vetor de saídas, respectivamente, e $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ são as matrizes incertas da representa o de estados do sistema. A matriz de transferência da entrada u para a saída y   dada por:

$$H(s, \alpha) = C(\alpha)(sI - A(\alpha))^{-1}B(\alpha) + D(\alpha) \quad (2)$$

As matrizes do sistema não são precisamente conhecidas mas pertencem a um politopo, isto  , cada uma das matrizes   escrita como uma combina o convexa de N v rtices conhecidos, e são dadas na forma:

$$M(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i M_i, \quad \alpha \in \Lambda$$

sendo que α   um vetor de parâmetros invariantes no tempo que pertence ao simplex unitário

$$\Lambda \triangleq \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}$$

e $M(\alpha)$ representa qualquer uma das matrizes incertas.

O problema de redu o de ordem de modelos lineares incertos utilizando a norma $\mathcal{H}_\infty$ como critério de desempenho consiste em, dado um sistema robustamente estável na forma (1) de ordem n com matriz de transferência dada em (2), obter um modelo $H_r(s, \alpha)$ de ordem r , $r < n$, tal que a norma do erro de aproxima o $\|H(s, \alpha) - H_r(s, \alpha)\|_\infty$ seja minimizada para todo $\alpha \in \Lambda$. O modelo a ser sintetizado pode ser representado na forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_r &= A_r(\alpha)x_r + B_r(\alpha)u \\ y_r &= C_r(\alpha)x_r + D_r(\alpha)u\end{aligned}\quad (3)$$

em que $x_r \in \mathbb{R}^r$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $y_r \in \mathbb{R}^p$ são o vetor de estados, o vetor de entradas do sistema e o vetor de saídas, respectivamente, e $A_r(\alpha) \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $B_r(\alpha) \in \mathbb{R}^{r \times m}$, $C_r(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times r}$ e $D_r(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ são as matrizes incertas do sistema reduzido a serem determinadas. A matriz de transferência do sistema reduzido   dada por:

$$H_r(s, \alpha) = C_r(\alpha)(sI - A_r(\alpha))^{-1}B_r(\alpha) + D_r(\alpha)$$

Combinando os estados de (1) e (3), e criando um sinal de erro $e = y - y_r$, tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \bar{A}(\alpha)z + \bar{B}(\alpha)u \\ e &= \bar{C}(\alpha)z + \bar{D}(\alpha)u\end{aligned}\quad (4)$$

em que $\bar{D}(\alpha) = D(\alpha) - D_r(\alpha)$,

$$z = \begin{bmatrix} x \\ x_r \end{bmatrix}, \quad \bar{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0_{n \times r} \\ 0_{r \times n} & A_r(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} B(\alpha) \\ B_r(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \bar{C}(\alpha) = [C(\alpha) \quad -C_r(\alpha)]$$

Utilizando essa modelagem, o problema de redu o $\mathcal{H}_\infty$ consiste basicamente em aplicar o *Bounded Real Lemma* no sistema (4), que resulta em um conjunto de desigualdades não convexas em termos das variáveis de interesse (matrizes que comp es o sistema reduzido). O desafio   propor um procedimento de lineariza o e relaxa es (para a obten o de um conjunto finito de LMIs programáveis) que resultem no menor grau de conservadorismo possível. Este artigo apresenta duas condi es de projeto, que utilizadas conjuntamente fornecem bons resultados quando comparadas com os métodos da literatura.

3 Resultados

A seguir   fornecida uma condi o de projeto baseada no *Bounded Real Lemma* estendido, isto  , que utiliza variáveis de folga (Lacerda et al., 2011).

Lema 1 $\bar{A}(\alpha)$ é Hurwitz estável e a desigualdade $\|H(s, \alpha) - H_r(s, \alpha)\|_\infty < \gamma$ é válida para todo $\alpha \in \Lambda$ se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva $W(\alpha) \in \mathbb{R}^{n+r \times n+r}$ e matrizes $E(\alpha) \in \mathbb{R}^{n+r \times n+r}$, $K(\alpha) \in \mathbb{R}^{n+r \times n+r}$, $Q(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n+r}$ e $F(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times n+r}$ tais que

$$\begin{bmatrix} K(\alpha)\bar{A}(\alpha) + \bar{A}(\alpha)'K(\alpha)' & \star & \star & \star & \star & \star \\ W(\alpha) - K(\alpha)' + E(\alpha)\bar{A}(\alpha) & -E(\alpha) - E(\alpha)' & \star & \star & \star & \star \\ \bar{B}(\alpha)'K(\alpha)' + Q(\alpha)\bar{A}(\alpha) & \bar{B}(\alpha)'E(\alpha)' - Q(\alpha) & \star & \star & \star & \star \\ F(\alpha)\bar{A}(\alpha) + \bar{C}(\alpha) & -F(\alpha) & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \bar{B}(\alpha)'Q(\alpha)' + Q(\alpha)\bar{B}(\alpha) - I_r & \star & \star & \star & \star & \star \\ F(\alpha)\bar{B}(\alpha) + \bar{D}(\alpha) & -\gamma^2 I_p & \star & \star & \star & \star \end{bmatrix} < 0, \forall \alpha \in \Lambda$$

Para prova, vide (Lacerda et al., 2011).

As condições do Lema 1 são expressas em termos de desigualdades dependentes de parâmetros bilineares, pois existem produtos entre as variáveis de otimização e as matrizes do sistema reduzido. Desigualdades lineares podem ser obtidas impondo restrições de estrutura nas variáveis de folga como mostrado a seguir:

$$K(\alpha) = \begin{bmatrix} K_{11}(\alpha) & \beta_k J_\sigma(\hat{K}) \\ K_{21}(\alpha) & \hat{K} \end{bmatrix}, Q(\alpha) = \begin{bmatrix} Q_1(\alpha)' \\ 0_{r \times m} \end{bmatrix}'$$

$$E(\alpha) = \begin{bmatrix} E_{11}(\alpha) & \beta_e J_\sigma(\hat{K}) \\ E_{21}(\alpha) & \hat{K} \end{bmatrix}, F(\alpha) = \begin{bmatrix} F_1(\alpha)' \\ 0_{r \times p} \end{bmatrix}' \quad (5)$$

Com o operador $J_\sigma(\hat{K})$ dado por:

$$J_\sigma(\hat{K}_{r \times r}) = \begin{bmatrix} 0_{r \times \sigma} & \hat{K}_{r \times r} & 0_{r \times n-r-\sigma} \end{bmatrix}'$$

conforme um parâmetro de entrada σ , que pode variar de 0 a $n-r$. Adicionalmente, as seguintes mudanças de variáveis são adotadas: $Z(\alpha) = \hat{K}A_r(\alpha)$ e $L(\alpha) = \hat{K}B_r(\alpha)$.

Os parâmetros escalares β_k e β_e podem ser utilizados para reduzir o conservadorismo dos resultados, ao preço de um esforço computacional maior necessário para realizar, por exemplo, uma busca em um conjunto pré-definido de valores.

O próximo teorema fornece uma condição de síntese em termos de LMIs dependentes de parâmetros, e tem como uma novidade técnica o parâmetro σ , que fornece um grau de liberdade extra introduzido na linearização que pode ajudar na redução do conservadorismo.

Teorema 1 Se existirem uma matriz simétrica definida positiva $W(\alpha) \in \mathbb{R}^{n+r \times n+r}$, matrizes $K_{11}(\alpha)$ e $E_{11}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $K_{21}(\alpha)$ e $E_{21}(\alpha) \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $\hat{K} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $F_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $Q_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, como em (5), $Z(\alpha) \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $L(\alpha) \in \mathbb{R}^{r \times m}$, $C_r(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times r}$ e $D_r(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ e escalares $\sigma \in \{0, 1, \dots, n-r\}$, β_k e $\beta_e \in \mathbb{R}$ tais que (6) seja verificada, como mostrado no final da próxima página, então $A_r(\alpha) = \hat{K}^{-1}Z(\alpha)$, $B_r(\alpha) = \hat{K}^{-1}L(\alpha)$, $C_r(\alpha)$ e $D_r(\alpha)$ são matrizes do sistema reduzido que asseguram $\|H(s, \alpha) - H_r(s, \alpha)\|_\infty < \gamma$.

As desigualdades do Teorema 1 são de dimensão infinita e podem ser resolvidas por meio de relaxações impondo-se estruturas polinomiais homogêneas de graus arbitrários para as variáveis de otimização (Oliveira e Peres, 2007). Note que o grau escolhido para as variáveis $Z(\alpha)$, $L(\alpha)$, $C_r(\alpha)$ e $D_r(\alpha)$ define o grau das matrizes polinomiais do sistema reduzido determinado. Por outro lado o aumento do grau das outras matrizes não interfere na estrutura do modelo, ajudando apenas na redução do conservadorismo. Note que a estratégia proposta é flexível, permitindo que o sistema reduzido seja precisamente conhecido (grau zero) e até mesmo de graus maiores do que um, o que é uma novidade na literatura de redução de modelos. A segunda novidade é o parâmetro σ , que fornece $n-r$ graus de liberdade extras na linearização adotada. Dentro do conhecimento dos autores, essa possibilidade está sendo explorada pela primeira vez no contexto de síntese de ordem reduzida.

Também é importante ressaltar que o Teorema 1 pode ser aplicado à função de transferência transposta dada em (2), isto é, à representação de estados dual de (1). O teorema apresentado a seguir explora essa situação, em que algumas variáveis de decisão podem ter dimensões diferentes (sistemas com número de entradas e saídas diferentes), potencialmente fornecendo resultados diferentes do Teorema 1.

Teorema 2 Se existirem uma matriz simétrica definida positiva $W(\alpha) \in \mathbb{R}^{n+r \times n+r}$, matrizes $K_{11}(\alpha)$ e $E_{11}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $K_{21}(\alpha)$ e $E_{21}(\alpha) \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $\hat{K} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $F_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $Q_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, como em (5), $Z(\alpha) \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $L(\alpha) \in \mathbb{R}^{r \times m}$, $C_r(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times r}$ e $D_r(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ e escalares $\sigma \in \{0, 1, \dots, n-r\}$, β_k e $\beta_e \in \mathbb{R}$ tais que (6) seja verificada substituindo $B(\alpha)$ por $C(\alpha)'$, $C(\alpha)$ por $B(\alpha)'$, $A(\alpha)$ por $A(\alpha)'$, $D(\alpha)$ por $D(\alpha)'$, $-C_r(\alpha)$ por $B_r(\alpha)'$, $D_r(\alpha)$ por $D_r(\alpha)'$ e $F_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $Q_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ então $A_r(\alpha) = (\hat{K}^{-1}Z(\alpha))'$, $B_r(\alpha)$, $C_r(\alpha) = (\hat{K}^{-1}L(\alpha))'$ e $D_r(\alpha)$ são matrizes do sistema reduzido que asseguram $\|H(s, \alpha) - H_r(s, \alpha)\|_\infty < \gamma$.

A partir de um modelo reduzido calculado pelo Teorema 1, um procedimento iterativo pode ser aplicado, num primeiro passo entrando com as matrizes do sistema reduzido e determinando $E(\alpha)$, $K(\alpha)$, $F(\alpha)$ e $Q(\alpha)$, e em outro passo fixando estas últimas variáveis e determinando as matrizes do modelo. Esse tipo de procedimento é comum na literatura de controle e filtragem de ordem reduzida. Contudo, na sequência é proposto um outro tipo de procedimento iterativo, inspirado na técnica de dois estágios (Agulhari et al., 2012a), que tem fornecido interessantes condições de projeto de controladores de ordem reduzida. O próximo teorema fornece uma condição de projeto que precisa ser inicializada com as matrizes $A_r(\alpha)$ e $B_r(\alpha)$ determinadas, por exemplo, pelo Teorema 1, ou por outro método.

Teorema 3 Para $\hat{A}_r(\alpha)$ e $\hat{B}_r(\alpha)$ obtidas pelo Teorema 1, se existirem uma matriz simétrica definida positiva $W(\alpha) \in \mathbb{R}^{n+r \times n+r}$ e matrizes $G \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $R_1(\alpha) \in$

$\mathbb{R}^{r \times r}$, $Z(\alpha) \in \mathbb{R}^{r \times m}$, $C_r(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times r}$ e $D_r(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ tais que:

$$\mathcal{Q}(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)'\mathcal{X}(\alpha)' < 0, \forall \alpha \in \Lambda \quad (7)$$

em que

$$\mathcal{Q}(\alpha) = \begin{bmatrix} \tilde{A}(\alpha)'W(\alpha) + W(\alpha)\tilde{A}(\alpha) & \star & \star \\ [B(\alpha)' \quad 0_{m \times r}]W(\alpha) & -I_m & \star \\ \bar{C}(\alpha) & \bar{D}(\alpha) & \star \\ [0_{r \times n} \quad I_r]W(\alpha) & 0_{r \times m} & \star \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ -\gamma^2 I_p & \star & \star \\ 0_{r \times p} & 0_{r \times r} & \star \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{X}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0_{r \times n} & \hat{A}_r(\alpha) & \hat{B}_r(\alpha) & 0_{r \times p} & -I_r \end{bmatrix}',$$

$$\mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0_{r \times n} & R_1(\alpha) & Z(\alpha) & 0_{r \times p} & -G \end{bmatrix} \quad (8)$$

com

$$\tilde{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0_{n \times r} \\ 0_{r \times n} & 0_{r \times r} \end{bmatrix}$$

então $A_r(\alpha) = G^{-1}R_1(\alpha)$, $B_r(\alpha) = G^{-1}Z(\alpha)$, $C_r(\alpha)$ e $D_r(\alpha)$ são as matrizes do sistema reduzido que asseguram $\|H(s, \alpha) - H_r(s, \alpha)\|_\infty < \gamma$.

Prova Para as mudanças de variáveis utilizadas, tem-se que $\mathcal{B}(\alpha)$ pode ser reescrita na forma:

$$\mathcal{B}(\alpha) = G \begin{bmatrix} 0_{r \times n} & A_r(\alpha) & B_r(\alpha) & 0_{r \times p} & -I_r \end{bmatrix}$$

Seja $\mathcal{B}(\alpha)^\perp$ uma base para o espaço nulo de $\mathcal{B}(\alpha)$ (isto é, $\mathcal{B}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)^\perp = 0$), dada por

$$\mathcal{B}(\alpha)^\perp = \begin{bmatrix} I_{n+r} & 0_{n+r \times r} & 0_{n+r \times r} \\ 0_{r \times n+r} & I_r & 0_r \\ 0_{r \times n+r} & 0_r & I_r \\ [0_{r \times n} & \hat{A}_r(\alpha) & \hat{B}_r(\alpha) & 0_r \end{bmatrix}$$

Aplicando uma transformação de congruência em (7) com $\mathcal{B}(\alpha)^\perp$, tem-se:

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}(\alpha)^\perp'(\mathcal{Q}(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha) \\ &+ \mathcal{B}(\alpha)'\mathcal{X}(\alpha)')\mathcal{B}(\alpha)^\perp < 0 \Rightarrow \\ &\mathcal{B}(\alpha)^\perp' \mathcal{Q}(\alpha) \mathcal{B}(\alpha)^\perp < 0, \forall \alpha \in \Lambda \end{aligned}$$

que resulta no *Bounded Real Lemma* (Boyd et al., 1994):

$$\begin{bmatrix} \bar{A}(\alpha)'W(\alpha) + W(\alpha)\bar{A}(\alpha) & \star & \star \\ \bar{B}(\alpha)'W(\alpha) & -I_m & \star \\ \bar{C}(\alpha) & \bar{D}(\alpha) & -\gamma^2 I_p \end{bmatrix} < 0$$

As condições do Teorema 3 podem ser adaptadas para tratar o sistema dual, como mostra o próximo teorema.

Teorema 4 Para $\hat{A}_r(\alpha)$ e $\hat{C}_r(\alpha)$ obtidas pelo Teorema 1, se existirem uma matriz simétrica definida positiva $W(\alpha) \in \mathbb{R}^{n+r \times n+r}$ e matrizes $G \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $R_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $Z(\alpha) \in \mathbb{R}^{r \times p}$, $B_r(\alpha) \in \mathbb{R}^{r \times m}$ e $D_r(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ tais que (7), em que

$$\mathcal{Q}(\alpha) = \begin{bmatrix} \tilde{A}(\alpha)W(\alpha) + W(\alpha)\tilde{A}(\alpha)' & \star & \star \\ [C(\alpha) \quad 0_{p \times r}]W(\alpha) & -I_p & \star \\ \bar{B}(\alpha)' & \bar{D}(\alpha)' & \star \\ [0_{r \times n} \quad I_r]W(\alpha) & 0_{r \times p} & \star \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ -\gamma^2 I_m & \star & \star \\ 0_{r \times m} & 0_{r \times r} & \star \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{X}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0_{r \times n} & \hat{A}_r(\alpha)' & -\hat{C}_r(\alpha)' & 0_{r \times m} & -I_r \end{bmatrix}',$$

$$\mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0_{r \times n} & R_1(\alpha) & -Z(\alpha) & 0_{r \times m} & -G \end{bmatrix}$$

com

$$\tilde{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0_{n \times r} \\ 0_{r \times n} & 0_{r \times r} \end{bmatrix}$$

então $A_r(\alpha) = (G^{-1}R_1(\alpha))'$, $B_r(\alpha)$, $C_r(\alpha) = (G^{-1}Z(\alpha))'$ e $D_r(\alpha)$ são as matrizes do sistema reduzido que asseguram $\|H(s, \alpha) - H_r(s, \alpha)\|_\infty < \gamma$.

É importante observar que as matrizes do sistema reduzido fornecidas pelos Teoremas 3 e 4 dependem apenas das variáveis de otimização, e portanto o grau polinomial associado a essas variáveis define o grau das matrizes do sistema reduzido que, por exemplo, pode ser diferente do grau das matrizes entradas como parâmetros de inicialização.

$$\begin{bmatrix} K_{11}(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)'K_{11}(\alpha)' & \beta_k J_\sigma(Z(\alpha)) + A(\alpha)'K_{21}(\alpha)' & \star \\ K_{21}(\alpha)A(\alpha) + \beta_k J_\sigma(Z(\alpha))' & Z(\alpha) + Z(\alpha)' & \star \\ W_{11}(\alpha) - K_{11}(\alpha)' + E_{11}(\alpha)A(\alpha) & W_{12}(\alpha) - K_{21}(\alpha)' + \beta_e J_\sigma(Z(\alpha)) & -E_{11}(\alpha) - E_{11}(\alpha)' \\ W_{12}(\alpha)' - \beta_k J_\sigma(\hat{K}') + E_{21}(\alpha)A(\alpha) & W_{22}(\alpha) - \hat{K}' + Z(\alpha) & -E_{21}(\alpha) - \beta_e J_\sigma(\hat{K}') \\ B(\alpha)'K_{11}(\alpha)' + \beta_k J_\sigma(L(\alpha)') + Q_1(\alpha)A(\alpha) & B(\alpha)'K_{21}(\alpha)' + L(\alpha)' & B(\alpha)'E_{11}(\alpha)' + \beta_e J_\sigma(L(\alpha)') \\ F_1(\alpha)A(\alpha) + C(\alpha) & -C_r(\alpha) & -Q_1(\alpha) \\ \star & \star & -F_1(\alpha) \\ \star & \star & \star \\ -\beta_e J_\sigma(\hat{K}) - E_{21}(\alpha)' & \star & \star \\ -\hat{K} - \hat{K}' & \star & \star \\ B(\alpha)'E_{21}(\alpha)' + L(\alpha)' & B(\alpha)'Q_1(\alpha)' + Q_1(\alpha)B(\alpha) - I_r & \star \\ 0_{p \times r} & F_1(\alpha)B(\alpha) + D(\alpha) - D_r(\alpha) & -\gamma^2 I_p \end{bmatrix} < 0, \forall \alpha \in \Lambda \quad (6)$$

Como observação final, note também que as soluções dos Teoremas 3 e 4 podem ser utilizadas para testar os mesmos novamente, caracterizando a possibilidade de implementação de um procedimento iterativo, que   explorado nos exemplos numéricos.

4 Experimentos Numéricos

Os resultados apresentado nos exemplos numéricos foram computados no software MATLAB, versão 8.6.0.267246 (R2015b) 32bits, em um computador com processador Intel  Core  i7-3610QM 2.3GHz, 12Gb de memória RAM e Windows 10 Home 64bits.

As condições de projeto propostas neste trabalho foram fornecidas em termos de LMIs dependentes de parâmetros. A obtenção de LMIs programáveis foi realizada por meio da imposição de uma estrutura polinomial de grau g para as variáveis de otimização e a utilização do parser ROLMIP (Agulhari et al., 2012b) para a determinação do conjunto de LMIs. Também foi utilizado o parser Yalmip (L fberg, 2004) e o resolvidor de LMIs SeDuMi (Sturm, 1999). Os parâmetros β_e e β_k foram buscados no conjunto $\{0,01; 0,1; 1; 10; 100\}$ e σ no conjunto $\{0; 1; 2\}$. Como última observação, quando os Teoremas 3 e 4 são utilizados, na primeira iteração o valor de γ não   minimizado, sendo fixo no valor de γ fornecido pelos Teoremas 1 e 2. A minimização ocorre apenas a partir da segunda iteração (heurística).

Exemplo 1 Considere o sistema incerto, a tempo contínuo, linear e invariante no tempo apresentado em (Wu, 1996; Wu e Jaramillo, 2002):

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2,5 & b_{12} & -1,2 \\ 1,3 & -1 & 1 \\ 1,6 & 2 & 0 \\ -3,4 & 0,1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2,5 & 1,3 & 1,6 & -3,4 \\ 0 & -1 & 2 & 0,1 \\ -1,2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

para $a_{33} \in [-3,5; -2,5]$ e $b_{12} \in [-0,5; 0,5]$. Combinando os valores extremos de a_{33} e b_{12} ,   possível obter um modelo politópico de 4 v rtices. O problema   determinar o modelo reduzido politópico (polinomial de grau um) de segunda ordem com o menor γ possível, tal que $\|H(s, \alpha) - H_2(s, \alpha)\|_\infty < \gamma$.

Inicialmente, aplicando o Teorema 2, com escalares $\sigma = 1$, $\beta_k = 0,1$ e $\beta_e = 0,01$, obt m-se $\gamma = 4,0175$, valor mediano se comparado aos apresentados em (Trofino e Coutinho, 2004; Wu, 1996; Wu e Jaramillo, 2002; Adegas e Stoustrup, 2012): $\gamma = 5,54$, $\gamma = 3,79$, $\gamma = 3,67$ e $\gamma = 3,506$, respectivamente. Com $A_r(\alpha)$ e $C_r(\alpha)$ obtidas com o Teorema 2, inicia-se o procedimento iterativo com o Teorema 4, em que a cada iteração,   realimentado pelas matrizes $A_r(\alpha)$ e $C_r(\alpha)$ encontradas. Em três iterações, o valor $\gamma = 3,1561$   obtido. Tal valor se compara apenas a (Gonçalves et al., 2009), $\gamma = 3,1657$, mas obtido com menos iterações.

Quanto ao custo computacional, foi observado no exemplo que, para valores fixos dos parâmetros β_e , β_k e σ , as condições dos Teoremas 1 e 2 exigem em média cerca de 2,6 s para serem testadas. Os Teoremas 3 e 4 levam cerca de 1,3 s em cada execução. Assim, o tempo total demandado por essas condições   proporcional a esses valores vezes o número de buscas e iterações realizadas. O método de (Adegas e Stoustrup, 2012) demanda em média cerca de 0,7 s na primeira execução e depois 0,65 s em cada iteração. O método de (Trofino e Coutinho, 2004) gasta em média cerca de 0,6 s para cada execução.

Exemplo 2 Considere o sistema de massas-molas acopladas composto de 9 massas apresentado em (Li e Paganini, 2005; Gonçalves et al., 2009) e ilustrado na Figura 1.

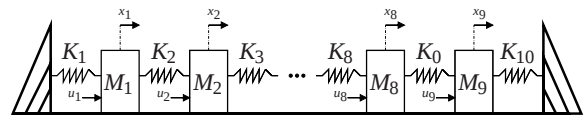


Figura 1: Sistema de 9 massas-molas acopladas.

O vetor de estado do sistema   composto pelas posi es e velocidades de cada massa (total de 18 estados). Da mesma forma que em (Gonçalves et al., 2009), os vetores de entrada e saída do sistema são a fôrça aplicada na primeira massa, M_1 , e a posição da última massa, M_9 , respectivamente, de forma que a dinâmica do sistema pode ser representada na forma:

$$\dot{x}_i = v_i, \quad x_0 = x_{10} = 0,$$

$$M_i v_i = K_i(x_{i-1} - x_i) + K_{i+1}(x_{i+1} - x_i) - d v_i + u_i;$$

com $i = 1, \dots, 9$. Todas as massas têm valor unitário $M_i = 1$ Kg e as constantes elástica das molas são dadas na forma $K_i = \{k_s; 0,8k_s; 0,06k_s; 0,04k_s; 0,02k_s; 0,04k_s; 0,06k_s; 0,08k_s; 0,1k_s; 0,12k_s\}$, com $k_s \in [25; 75]$. O coeficiente de atrito   incerto e pertence   faixa $d \in [0,02; 1,98]$. O propósito   determinar o modelo reduzido de segunda ordem com menor norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro de aproximação possível.

Inicialmente, aplicando o Teorema 1, com escalares $\sigma = 1$, $\beta_k = 100$ e $\beta_e = 0,1$, obt m-se $\gamma = 0,3912$, valor similar ao apresentado em (Gonçalves et al., 2009) para $r = 2$: $\gamma = 0,39$. Com $A_r(\alpha)$ e $B_r(\alpha)$ obtidas com o Teorema 1, inicia-se o procedimento iterativo com o Teorema 3, em que a cada iteração,   realimentado pelas matrizes $A_r(\alpha)$ e $B_r(\alpha)$ encontradas. Em quinze iterações, o valor $\gamma = 0,3430$   obtido (12,05% menor do que o resultado de (Gonçalves et al., 2009)).

5 Conclusões

Neste artigo foi apresentada uma nova estratégia para calcular modelos de ordem reduzida de sistemas

incertos, robustamente estáveis, lineares e invariantes no tempo. Uma importante vantagem do método é a escolha da dependência paramétrica das matrizes do sistema reduzido determinado por meio do grau escolhido para as variáveis de otimização, podendo gerar modelos reduzidos precisamente conhecidos (grau zero), politópicos (grau um) ou de graus maiores. Uma segunda novidade técnica foi proposta no procedimento de linearização, que fornece graus extras de liberdade na busca por soluções menos conservadoras. Exemplos numéricos ilustraram o potencial da técnica, que pode fornecer resultados menos conservadores ao preço de um aumento no esforço computacional.

Agradecimentos

Às agências CNPq e FAPESP (Processo 2015/16600-2).

Referências

- Adegas, F. D. e Stoustrup, J. (2012). $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ model reduction through dilated linear matrix inequalities, *Proc. 7th IFAC Symp. Robust Control Design*, Aalborg, Denmark, pp. 728–733.
- Agulhari, C. M., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2012a). LMI relaxations for reduced-order robust $\mathcal{H}_\infty$ control of continuous-time uncertain linear systems, *IEEE Trans. Autom. Control* **57**(6): 1532–1537.
- Agulhari, C. M., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2012b). Robust LMI parser: A computational package to construct LMI conditions for uncertain systems, *XIX CBA*, Campina Grande, PB, Brasil, pp. 2298–2305.
- Assunção, E., Marchesi, H. F., Teixeira, M. C. M. e Peres, P. L. D. (2007). Global optimization for the $\mathcal{H}_\infty$ -norm model reduction problem, *Int. J. Syst. Sci.* **38**(2): 125–138.
- Assunção, E. e Peres, P. L. D. (1999). $\mathcal{H}_2$ and/or $\mathcal{H}_\infty$ -norm model reduction of uncertain discrete-time systems, *Proc. 1999 Amer. Control Conf.*, Vol. 6, San Diego, CA, USA, pp. 4466–4470.
- Borges, R. A., Calliero, T. R., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2011). Improved conditions for reduced-order $\mathcal{H}_\infty$ filter design as a static output feedback problem, *Proc. 2011 Amer. Control Conf.*, San Francisco, CA, USA, pp. 1305–1310.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- Ebihara, Y. e Hagiwara, T. (2004). On H_∞ model reduction using LMIs, *IEEE Trans. Autom. Control* **49**(7): 1187–1191.
- Geromel, J. C., Egas, R. G. e Kawaoka, F. R. R. (2005). $\mathcal{H}_\infty$ model reduction with application to flexible systems, *IEEE Trans. Autom. Control* **50**(3): 402–406.
- Glover, K. (1984). All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L^∞ -error bounds, *Int. J. Control* **39**(6): 1115–1193.
- Gonçalves, E. N., Chasin, A. N. V., Palhares, R. M. e Takahashi, R. H. C. (2006). Redução $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de modelos de sistemas incertos: Aproximação por modelos incertos, *XVI CBA*, Salvador, BA, Brasil, pp. 181–185.
- Gonçalves, E. N., Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. e Chasin, A. N. V. (2009). Robust model reduction of uncertain systems maintaining uncertainty structure, *Int. J. Control* **82**(11): 2158–2168.
- Helmersson, A. (1994). Model reduction using LMIs, *Proc. 33rd IEEE Conf. Decision Control*, Vol. 4, Lake Buena Vista, FL, USA, pp. 3217–3222.
- Lacerda, M. J., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2011). Robust $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ filter design for uncertain linear systems via LMIs and polynomial matrices, *Signal Process.* **91**(5): 1115–1122.
- Li, L. e Paganini, F. (2005). Structured coprime factor model reduction based on LMIs, *Automatica* **41**(1): 145–151.
- Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *Proc. 2004 IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des.*, Taipei, Taiwan, pp. 284–289.
- Moore, B. (1981). Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction, *IEEE Trans. Autom. Control* **26**(1): 17–32.
- Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2007). Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations, *IEEE Trans. Autom. Control* **52**(7): 1334–1340.
- Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optim. Method Softw.* **11**(1–4): 625–653. <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>.
- Trofino, A. e Coutinho, D. F. (2004). Robust order reduction, *Proc. 2004 Amer. Control Conf.*, Vol. 4, Boston, MA, USA, pp. 3363–3368.
- Wu, F. (1996). Induced $\mathcal{L}_2$ norm model reduction of polytopic uncertain linear systems, *Automatica* **32**(10): 1417–1426.
- Wu, F. e Jaramillo, J. (2002). Numerical algorithm for model reduction of polytopic uncertain linear systems, *Proc. 2002 Amer. Control Conf.*, Vol. 3, Anchorage, AK, USA, pp. 1748–1752.