

RECONSTRUÇÃO BAYESIANA DE IMAGEM DE TOMOGRAFIA DE RAIOS-X USANDO *SOFT-THRESHOLD NONLINEAR FILTRATION* COM AJUSTE DO PARÂMETRO DE THRESHOLD

TIAGO T. WIRTTI*, EVANDRO O. T. SALLES*

* Universidade Federal do Espírito Santo
Av. Fernando Ferrari, 514 - Goiabeiras
Vitória, ES -Brasil, CEP 29075-910

Emails: tiago.wirrti@aluno.ufes.br, evandro@ele.ufes.br

Abstract— A widespread technique for X-ray tomography reconstruction is the statistical approach making use of *maximum a posteriori* (MAP) and *total variation* (TV) regularization. The main concern is the trade-off between performance and noise reduction. The objective function is stated with discrepancy modeled by the projection data (sinogram) as a Poisson distribution, and the fidelity with a *discrete gradient transform* (DGT) as TV regularization term. A two steps alternating minimization method is used to optimize the objective function. The first one solves discrepancy using *simultaneous algebraic reconstruction technique* (SART). The other solves DGT pseudo-inverse through *soft-thresholding nonlinear filtration* which depends on a well established threshold parameter. The main contribution on this work is exploring DGT sparsity feature to design consistent solutions for threshold setup. Structural similarity (SSIM) was used to compare the reconstructed image with the original one. Results about SSIM = 96% was achieved using noiseless projection data, SSIM = 91% with a noise of 5%. Although it is not achievable in practice by the high computational cost, an approach with a result of SSIM = 98% has also been proposed.

Keywords— X-ray Tomography, Image Reconstruction, Bayesian Inference.

Resumo— Na reconstrução de imagem de tomografia de raios-X, uma técnica bem difundida é a abordagem estatística de maximização a posteriori (MAP) com regularização por variação total (TV). Mais detalhadamente, trata-se de um problema de otimização em que a função objetivo é representada pela soma de dois termos, a saber: a discrepância (ou fidelidade), com norma l_2 , e a restrição (ou priori, ou termo regularizador), com norma l_p , $1 < p < 2$. A modelagem do termo regularizador utiliza a DGT (*discrete gradient transform*), por ser uma transformação esparsa. A solução de reconstrução consiste em realizar a minimização alternada dos termos da função objetivo. O termo regularizador é resolvido por STNF (*soft-thresholding nonlinear filtration*) sobre a pseudo-inversa da DGT, que depende do parâmetro de threshold, ω , cuja definição é, frequentemente, realizada de forma empírica. Este trabalho explora a esparsidade da DGT para definir o *threshold*, demonstrando que a melhor escolha é o valor esperado da DGT, obtido dinamicamente a cada iteração do algoritmo de reconstrução. Os resultados com diferentes definições do parâmetro ω são comparados com a solução proposta usando o indicador SSIM (*structural similarity*), sendo que a última obteve resultado (SSIM $\approx$ 96% para reconstrução sem ruído e SSIM $\approx$ 91% com ruído gaussiano a 5%) na reconstrução do *phantom* de Shepp-Logan. Foi sugerida também uma abordagem de computação intensiva em que vários valores de *threshold* dentro da faixa possível são testados. Neste caso, obteve-se o resultado SSIM $\approx$ 98%, mas este é dependente do sinal de entrada, ao contrário do método proposto, que funciona de forma independente.

Palavras-chave— Tomografia de raios-X, Reconstrução de Imagem, Inferência Bayesiana.

1 Introdução

Em princípio, o tomógrafo mede a atenuação dos feixes de fótons de raios-X que atravessam um objeto. Através de tais medições (projeções), aplicando técnicas de reconstrução, as imagens são obtidas. Nos parágrafos seguintes serão apresentadas brevemente as principais técnicas de reconstrução de imagens de tomografia de raios-X.

O primeiro método amplamente utilizado para a reconstrução de imagem a partir de projeções, tanto em CT de raios-X como PET (*positron emission tomography*) e SPECT (*single-photon emission computed tomography*), foi o FBP (*filtered backprojection*). FBP se baseia no teorema da fatia central de Fourier, sendo implementado com transformada rápida de Fourier. Portanto, FBP é uma solução de bom desempenho e confiável. Entretanto, FBP requer dosagem elevada de radiação, além de não incorporar bem co-

nhecimento prévio sobre o sistema, tornando sua utilização em novas geometrias (*cone-beam* e *multislice*, por exemplo), bastante desafiante.

O método ART (*algebraic reconstruction technique*) (Gordon et al., 1970) foi apresentado como alternativa ao FBP. ART é uma adaptação do método Kaczmarz (1937) de álgebra linear numérica. ART consiste em resolver iterativamente o sistema linear $y = Ax$, onde A descreve o processo de obtenção da imagem, y representa as projeções e x a imagem que se pretende reconstruir. Dentre as principais vantagens apresentadas pelo ART estão (1) facilidade de introduzir conhecimento prévio sobre a geometria do tomógrafo, (2) capacidade de suprimir artefatos metálicos e (3) melhor desempenho em tomografias de ângulo limitado. Entretanto, conforme aumenta o número de projeções, maior é o seu custo computacional.

Em resposta à limitação de desempenho do ART, foi proposto o método SART (*simultaneous*

algebraic reconstruction technique) (Andersen and Kak, 1984). SART gera uma reconstrução completa da imagem a cada iteração, pois realiza aplicação simultânea dos termos de correção de erros de todas as projeções em cada ciclo. Este método se tornou bastante popular, tendo sua convergência comprovada por Jiang and Wang (2003). Variações do SART foram propostas em combinação com outros métodos. Ge and Ming (2004) implementaram SART com *ordered-subset* (OS-SART) com ganho sobre o método original. Pan et al. (2006) propuseram o método VW-OS-SART (*variable weighted OS-SART*), que mostrou melhor potencial em comparação com OS-SART e SART. Yu and Wang (2010a) utilizaram SART e propriedades de esparsidade para reconstruir imagens com número limitado de projeções. Hengyong et al. (2010) propuseram a reconstrução de imagens de tomografia com SART usando projeções sobrepostas que, em teoria, melhoram o desempenho global do processo de reconstrução. Yu and Wang (2014) propuseram um método SART adaptado para o algoritmo *half-threshold filtering* com grande potencial para melhorar a qualidade da imagem reconstruída a partir de pequena quantidade de projeções em presença de ruído. A abordagem SART, embora bem sucedida, não favorece a incorporação de fenômenos físicos à modelagem para reconstrução da CT. Em contrapartida, os métodos estatísticos, mais notadamente os Bayesianos, permitem a inserção de conhecimento prévio sobre o sistema, restringindo (melhorando) a busca por soluções de reconstrução mais satisfatórias.

Desta forma, os métodos estatísticos, às vezes denominada SIR (*statistical iterative reconstruction*), têm sido extensamente aplicados em reconstrução de CT. Carson and Lange (1984) propuseram o método ML-EM (*maximum likelihood expectation maximization*) no qual se procura maximizar a resposta mais provável usando como fator de correção o valor esperado máximo de cada iteração. Lange et al. (1987) incluíram no modelo EM (*expectation maximization*) uma *prior* Bayesiana e mostraram que esta versão converge mais rapidamente que a não Bayesiana. Man et al. (2001) e Elbakri and Fessler (2002) propuseram, de forma independente, modelos estatísticos ML (*maximum likelihood*) e MAP, respectivamente, para tomografias reconstrução de CT com feixes polienérgicos. Xu et al. (2011) apresentaram uma abordagem denominada SIT (*statistical interior tomography*) que usa métodos estatísticos combinados com SART para reconstruir imagens de tomografias de áreas limitadas (tomografia interior).

O estado da arte (Yu and Wang (2010b), Xu et al. (2011), Daubechies et al. (2004), entre outros) sugerem uma estratégia para reconstrução de CT usando MAP com função de regularização TV obtida por pseudo-inversa da DGT (*discrete gradi-*

ent transform). A função objetivo é otimizada por minimização alternada utilizando SART para o termo de fidelidade (discrepância) e *soft-threshold filtration* para resolver a pseudo-inversa da DGT. O método de filtragem utilizado é bastante sensível ao *threshold*. Portanto, a contribuição deste trabalho consiste em avaliar e sugerir diferentes possibilidades de estimação do parâmetro de *threshold* para a inversão da DGT – desde constantes até os dinâmicos – comparando-os e mostrando vantagens e desvantagens de cada abordagem. Os resultados de reconstrução são comparados com a imagem de referência por SSIM. O restante deste artigo é organizado como segue. Na seção II o método proposto é desenvolvido. Na seção III vários experimentos são realizados, os resultados são apresentados e analisados. Finalmente, na seção IV tem-se as conclusões e considerações finais.

2 Metodologia

Nesta seção é obtida a função objetivo para reconstrução de CT com base no modelo Bayesiano MAP. Em seguida, um algoritmo de otimização por minimização alternada é apresentado. O algoritmo obtém a solução (imagem reconstruída) em duas etapas. Na primeira, é aplicado o método SART para otimizar o termo de fidelidade (discrepância). Na segunda etapa, o resultado anterior é suavizado (filtrado) pela aplicação do método *soft-threshold filtration*. Enfim, a segunda etapa realimenta a primeira e o processo se repete sucessivas vezes, até que um critério de parada seja satisfeito. A convergência é comprovada por Daubechies et al. (2004). O método de filtragem adotado é relativamente sensível ao *threshold* escolhido. Por isso, ao final desta seção, são discutidas algumas técnicas de definição de *threshold*, tanto estáticos como dinâmicos.

2.1 Modelo Estatístico e Função Objetivo

O tomógrafo registra o número de fótons de raios-X (projeção) que atravessam um objeto a diferentes ângulos usando geometria paralela ou divergente. Quanto mais densa a região atravessada pelo feixe de fótons, menor é a intensidade $I_i, i = 1, \dots, N_I$, da projeção medida pelo sensor do tomógrafo, onde N_I é o número máximo de projeções obtidas. Consequentemente, maior é a atenuação sofrida pelo feixe. Esta relação, conhecida como lei de Beer-Lambert, é definida por

$$I_i = I_0 \exp \left(- \int_{L_i} \mu(x, y) dL \right), i = 1, \dots, N_I, \quad (1)$$

onde I_0 representa a intensidade da projeção quando o feixe atravessa o ar (sem obstáculo) e

o termo exponencial é a integral de todos os coeficientes de atenuação linear, $\mu(x, y)$, sobre a linha L_i (trajetória do feixe).

O objetivo da reconstrução é estimar a atenuação discreta, $\mu(x, y)$, para cada um dos N_J pixels retangulares da imagem. Assim, a integral sobre a linha, $p_i = \int_{L_i} \mu(x, y) dL$, pode ser discretizada como

$$p_i \approx \sum_{j=1}^{N_J} a_{ij} \mu_j = [\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}]_i, i = 1, \dots, N_I, \quad (2)$$

onde $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ é a matriz que representa a geometria do sistema, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_{N_J})^T$ é o vetor de coeficientes de atenuação linear com μ_j representando o j -ésimo pixel e, finalmente, o símbolo "T" representa a transposta da matriz. Para efeito de simplificação do modelo, cada posição a_{ij} é definida como o comprimento normalizado da interseção entre o i -ésimo raio de projeção e o j -ésimo pixel retangular centrado em (x, y) . Devido à natureza da emissão de raios-X (evento raro), utiliza-se o modelo probabilístico de Poisson

$$y_i \sim \text{Poisson} \{ \bar{y}_i = I_0 e^{-p_i} \}, i = 1, \dots, N_I \quad (3)$$

onde y_i é a projeção ao longo do i -ésimo feixe de raios-X e $\bar{y}_i$ é o seu valor esperado. Uma vez que os feixes de raios-X são independentes entre si, levando em consideração (3), a probabilidade conjunta de $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_{N_I}\}$ dado $\boldsymbol{\mu}$ pode ser expressa por

$$P(\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu}) = \prod_{i=1}^{N_I} P(y_i|\boldsymbol{\mu}) = \prod_{i=1}^{N_I} \left(\frac{(\bar{y}_i)^{y_i}}{y_i!} e^{-\bar{y}_i} \right). \quad (4)$$

Aplicando o desenvolvimento proposto por Yu and Wang (2009), utilizando a abordagem MAP, tem-se a função objetivo

$$\Phi(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^{N_I} \frac{y_i}{2} ([\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}]_i - \hat{p}_i)^2 + R(\boldsymbol{\mu}), \quad (5)$$

onde $R(\boldsymbol{\mu})$ é o termo de regularização. Esse problema se enquadra na categoria daqueles cuja solução é assumida ter uma expansão esparsa em uma base ortogonal arbitrária, conforme descrito por Daubechies et al. (2004). Assim, usando o termo regularizador esparsa apropriado de norma $l_p, 1 < p < 2$, tem-se uma solução convergente. Dentre as transformações esparsas, a mais utilizada é a DGT (*discrete gradient transform*), definida por

$$D_j \boldsymbol{\mu} = D_{m,n} \boldsymbol{\mu} = \sqrt{(\mu_{m,n} - \mu_{m+1,n})^2 + (\mu_{m,n} - \mu_{m,n+1})^2}, \quad (6)$$

onde $j = (m-1) \times W + n$, com $m = 1, 2, \dots, H$ e $n = 1, 2, \dots, W$, e com W e H sendo, respectivamente, a largura e a altura da matriz que representa a imagem com $N_J = W \times H$ pixels. Por

definição, TV é a soma da DGT para todos os pixels da imagem. Assim, se a TV, definida por

$$TV(\boldsymbol{\mu}) = \|D\boldsymbol{\mu}\|_1, \quad (7)$$

com $D\boldsymbol{\mu} = (D_1\boldsymbol{\mu}, \dots, D_{N_J}\boldsymbol{\mu})^T$, é o termo regularizador de (5), então, introduzindo a variável auxiliar $\boldsymbol{\nu} = D\boldsymbol{\mu}$, o problema de reconstrução se resume em minimizar a função objetivo a seguir

$$\Phi(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^{N_I} \frac{y_i}{2} ([\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}]_i - \hat{p}_i)^2 + \alpha \|\boldsymbol{\nu}\|_1, \quad (8)$$

onde α é um parâmetro de ajuste positivo para balancear os termos de fidelidade e TV.

2.2 Otimização por Minimização Alternada

A minimização alternada consiste em otimizar simultaneamente, de forma alternada, dois ou mais termos da uma função objetivo. Desta forma, a abordagem proposta por Yu and Wang (2010b), adotada neste trabalho, consiste em otimizar o termo de fidelidade (ou discrepância) $\sum_{i=1}^{N_I} \frac{y_i}{2} ([\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}]_i - \hat{p}_i)^2$ por SART e, em seguida, otimizar o termo $\alpha TV(\boldsymbol{\mu})$ por *soft-threshold filtering*. O resultado obtido na segunda etapa realimenta o algoritmo SART até que um critério de parada seja atingido, e/ou o resultado da reconstrução seja satisfatório. A primeira etapa (SART) consiste em resolver, conforme Ge and Ming (2004), a equação iterativa

$$\tilde{\mu}_j^k = \tilde{\mu}_j^{k-1} + \lambda^k \frac{1}{a_{+j}} \sum_{i=1}^{N_I} \frac{a_{ij}}{a_{i+}} (\hat{p}_i - \mathbf{A}_i \boldsymbol{\mu}^{k-1}) \quad (9)$$

onde $a_{+j} = \sum_{i=1}^{N_I} a_{ij} > 0$, $a_{i+} = \sum_{j=1}^{N_J} a_{ij} > 0$, $\mathbf{A}_i$ é a i -ésima linha de $\mathbf{A}$, k é o índice de iteração e $0 < \lambda^k < 2$ é um parâmetro de relaxação arbitrário. Para simplificar a notação, pode-se estabelecer que $\Lambda^{+N_J} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ seja uma matriz diagonal com $\Lambda_{jj}^{+N_J} = \frac{1}{a_{+j}}$ e $\Lambda^{+N_I} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ seja uma matriz diagonal com $\Lambda_{ii}^{+N_I} = \frac{1}{a_{i+}}$. Então (9) pode ser reescrita como

$$\boldsymbol{\mu}^k = \boldsymbol{\mu}^{k-1} + \Lambda^{+N_J} \mathbf{A}^T \Lambda^{+N_I} (\mathbf{p} - \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}^{k-1}), \quad (10)$$

onde o termo λ^k foi omitido, pois será considerado constante e igual a 1.

A segunda etapa (otimização da priori) consiste em resolver o problema $\boldsymbol{\nu} = D\boldsymbol{\mu}$, apresentado em (7), sendo que D não é inversível. Yu and Wang (2010b) propuseram a solução apresentada a seguir

$$\mu_{m,n}^k = \frac{1}{4} (2\mu_{m,n}^{k,a} + \mu_{m,n}^{k,b} + \mu_{m,n}^{k,c}), \quad (11)$$

onde

$$\mu_{m,n}^{k,a} = \begin{cases} \frac{2\bar{\mu}_{m,n}^k + \bar{\mu}_{m+1,n}^k + \bar{\mu}_{m,n+1}^k}{4} & \text{se } D_{m,n} \bar{\mu}^k < \omega \\ \bar{\mu}_{m,n}^k - \frac{\omega (2\bar{\mu}_{m,n}^k - \bar{\mu}_{m+1,n}^k - \bar{\mu}_{m,n+1}^k)}{4D_{m,n} \bar{\mu}^k} & \text{se } D_{m,n} \bar{\mu}^k \geq \omega. \end{cases}$$

$$\mu_{m,n}^{k,b} = \begin{cases} \frac{\tilde{\mu}_{m,n}^k + \tilde{\mu}_{m-1,n}^k}{2} & \text{se } D_{m-1,n} \tilde{\mu}^k < \omega \\ \tilde{\mu}_{m,n}^k - \frac{\omega (\tilde{\mu}_{m,n}^k - \tilde{\mu}_{m-1,n}^k)}{2D_{m-1,n} \tilde{\mu}^k} & \text{se } D_{m-1,n} \tilde{\mu}^k \geq \omega \end{cases}$$

$$\mu_{m,n}^{k,c} = \begin{cases} \frac{\tilde{\mu}_{m,n}^k + \tilde{\mu}_{m,n-1}^k}{2} & \text{se } D_{m,n-1} \tilde{\mu}^k < \omega \\ \tilde{\mu}_{m,n}^k - \frac{\omega (\tilde{\mu}_{m,n}^k - \tilde{\mu}_{m,n-1}^k)}{2D_{m,n-1} \tilde{\mu}^k} & \text{se } D_{m,n-1} \tilde{\mu}^k \geq \omega \end{cases}$$

e ω   um *threshold* preestabelecido. A contribuição deste trabalho   discutir alternativas e propor uma solução com bom compromisso entre desempenho computacional e qualidade da reconstrução para o ajuste do parâmetro ω .

2.3 Parâmetro de Threshold ω

Intuitivamente, o valor do *threshold* ω deve ser tal que

$$D_{mn}\mu_{min} < \omega < D_{mn}\mu_{max}, \quad (12)$$

onde $D_{mn}\mu_{min}$ e $D_{mn}\mu_{max}$ são, respectivamente, os valores mínimo e máximo de cada versão de $D_{mn}\mu$. A DGT, em (6), expressa o quanto cada *pixel* da imagem em construção varia em relação aos seus vizinhos, ou seja,

$$d_{m,n}^k = \sqrt{(\tilde{\mu}_{m,n}^k - \tilde{\mu}_{m+1,n}^k)^2 + (\tilde{\mu}_{m,n}^k - \tilde{\mu}_{m,n+1}^k)^2}. \quad (13)$$

Conforme observando em (11), quando $d_{m,n}^k < \omega$, deve-se ajustar os valores de $\tilde{\mu}_{m,n}^k$, $\tilde{\mu}_{m+1,n}^k$ e $\tilde{\mu}_{m,n+1}^k$ de forma que $d_{m,n}^k = 0$. Assim, temos um filtro que ajusta as “frequências mais baixas” da DGT para zero. Quando $d_{m,n}^k \geq \omega$, o objetivo é diminuir as diferenças $(\tilde{\mu}_{m,n}^k - \tilde{\mu}_{m+1,n}^k)^2$ e $(\tilde{\mu}_{m,n}^k - \tilde{\mu}_{m,n+1}^k)^2$. O resultado dessa operação pode ser interpretado como um filtro que preserva as “frequências mais altas” da DGT. Assim, pode-se afirmar que o método de *soft-threshold filtering* funciona como um filtro passa-altas com “frequência de corte” em ω . Além disso, as “altas frequências” são suavizadas.

Considerando o exposto até o momento, o parâmetro de *threshold* ω desempenha um papel importante na qualidade da reconstrução da imagem, pois, se ajustado adequadamente, estabelece uma relação ideal entre sinal e ruído. Então, surgem algumas questões importantes: (1) qual é a melhor maneira de se ajustar o parâmetro ω ? (2)   melhor um ω fixo, ou um ω dinâmico? (3) o método *soft-threshold filtering* converge para qualquer ω ? A primeira questão é o objetivo desta subseção e será tratada em breve. Com relação ao tipo de *threshold* (fixo ou dinâmico), a utilização de um *threshold* dinâmico pode acelerar a convergência, pois aumenta o “tamanho dos passos” do algoritmo. Entretanto, a complexidade computacional aumenta consideravelmente. Segundo Daubechies et al. (2004), o algoritmo tem convergência garantida, desde que a norma l_p da restrição seja

tal que $1 < p < 2$ e que seja satisfeita a condição em (12).

Voltando à questão (1), uma boa inspiração seria pensar na esparsidade da DGT. Sua pdf possui característica laplaciana, apresentando valor alto em zero (indicador de esparsidade) e uma calda longa. Os componentes de baixa frequência da DGT (próximos de zero) representam o ruído que se pretende eliminar, enquanto os componentes de alta frequência representam as transições (bordas) que devem ser preservadas. Pela sua natureza esparsa, tanto a m dia como a mediana da DGT são relativamente próximas de zero. Por essa razão, intuitivamente, a média pode funcionar como “frequência de corte” deste “filtro”. Assim,   razoável pensar que os valores da DGT que estão abaixo do valor esperado (ω) devam ser “suprimidos” e os valores acima “preservados (e suavizados)”. Em (6) temos $D_{mn}\mu$ reescrito lexicograficamente como $D_j\mu$ que, por conveniência, será expresso aqui como $D_j(\mu)$. Então, o valor esperado é dado por

$$E[D_j(\mu)] = \sum_{j=1}^{N_J} D_j(\mu) f_M(\mu) \quad (14)$$

onde $E[\cdot]$ é a função valor esperado, $f_M(\mu)$ é a pdf da DGT e μ   uma variável aleatória. Sabe-se que, conforme (11), se $d_{m,n}^k < \omega$, então os valores de $\tilde{\mu}_{m,n}^k$, $\tilde{\mu}_{m+1,n}^k$ e $\tilde{\mu}_{m,n+1}^k$ devem ser ajustados para que $d_{m,n}^k = 0$. Desta forma,

$$VAR[D_j(\mu)] = E[(D_j(\mu) - \omega)^2] = 0, \quad (15)$$

pois, se $d_{m,n}^k = 0$, então $VAR[D_j(\mu)] = 0$. Consequentemente, tem-se

$$E[D_j(\mu)] = \omega. \quad (16)$$

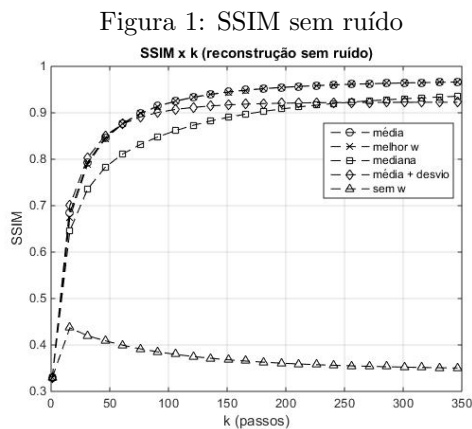
Como será mostrado na próxima seção, o valor de *threshold* definido em (16) apresenta resultados muito interessantes, tanto na presença quanto na ausência de ruído (situação ideal).

3 Experimentos e Resultados

Os testes realizados neste trabalho utilizam uma imagem *phantom* Shepp-Logan. O sinal (projeção)   obtido por $y = Ax + e$, onde A ($N_I \times N_J$)   a matriz que descreve o sistema de captura, x ($N_J \times 1$)   o (*phantom*) representado lexicograficamente e e ($N_J \times 1$)   ruído gaussiano branco com média 0 e variância unitária. $N_I = n_l n_\theta$ é o número de projeções, onde n_l é o número de linhas de projeção para cada ângulo de varredura e n_θ é o número total de ângulos de varredura. A imagem tem dimensões $d \times d$, onde $d = \sqrt{N_J} = 2^R$, $R \in \mathbb{N}_+$ (naturais positivos). Detalhando os testes, utilizou-se $n_l = 300$, $n_\theta = 0, \dots, 179^\circ$, $d = 512$ ($R = 9$) desvio padrão $e = 0$ ou $e = 0,05$.

Desta forma, A tem dimensões 54000×262144 , que é compatível com as dimensões de y e x . A foi obtido para arquitetura de tomógrafo paralela.

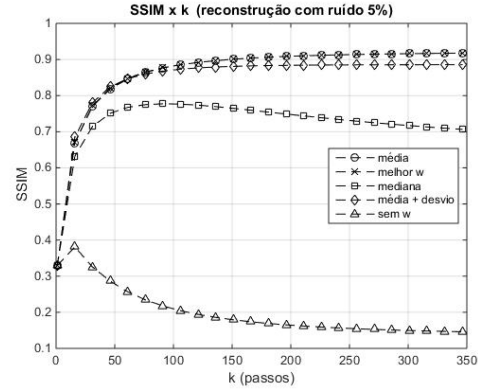
O experimento consiste em realizar os procedimentos descritos na seção 2, obtendo assim uma imagem reconstruída, $\tilde{\mu}$, o mais próxima possível da imagem original, μ , de acordo com o critério SSIM. Em todos os testes foram realizadas $K = 350$ iterações. A Figura 1 ilustra os testes de reconstrução do *phantom* a partir do sinal sem ruído. Foram testadas cinco estratégias para a definição do *threshold* ω . O melhor resultado foi obtido quando ω foi estimado a cada passo k , conforme (16), obtendo $SSIM \approx 96\%$. A solução pelo “melhor ω ” (último ω obtido pela estimativa (16)) se equiparou à primeira, mas para saber o “melhor ω ” foi necessário recalculer a média a cada passo (utilizando a primeira solução). Portanto, embora a utilização do “melhor ω ” resulte em um desempenho superior (pois não é necessário recalculer a média a cada iteração), esta não é viável na prática, pois o “melhor ω ” depende da imagem, além de variar de acordo com as condições de ruído (para a mesma imagem). As estratégias de cálculo de ω pela “mediana” e pela “média mais desvio padrão” se mostraram inferiores à primeira abordagem. Foi realizada a reconstrução apenas com SART, sem levar em conta a priori (modelada na seção 2). Neste caso, como se pode observar na Figura 1 (“sem ω ”), o resultado é muito inferior ao obtido pelas outras abordagens.



O segundo teste (Figura 2) foi realizado adicionando-se ruído gaussiano com desvio padrão de 5%. O cálculo do *threshold* ω “pela média” (16) e “melhor ω ” continuam apresentando os melhores resultados, com $SSIM \approx 91\%$. A solução “pela mediana” perde para a solução “pela média mais desvio padrão”. A deterioração da solução “pela mediana” ocorre porque a mediana se desvia da média da DGT na presença de ruído, ou seja, a pdf da DGT passa a ser assimétrica. A solução “sem ω ” (SART puro) continua tendo o pior resultado.

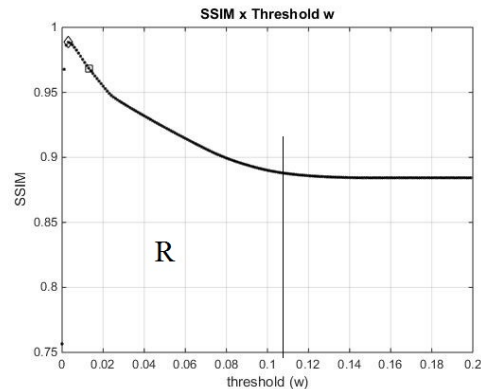
A Figura 3 mostra a relação entre o parâmetro

Figura 2: SSIM com ruído branco gaussiano com desvio $e = 5\%$



tro de *threshold* ω e o indicador SSIM para valores de ω iniciais da faixa definida por (12). Optou-se por exibir apenas os valores de ω próximos da origem, pois, acima de um certo ω , o valor do SSIM se estabiliza. Esse fenômeno de saturação ocorre devido à natureza esparsa da DGT, que concentra muitos valores próximos de zero e poucos mais distantes (pdf com cauda longa). Observa-se que o valor SSIM resultante da reconstrução realizada aplicando-se (16) (estimativa pela média) é $SSIM = 0.9686$ com $\omega = 0.0130$ (quadrado na Figura 3). Entretanto, o valor obtido tentando-se vários *thresholds* é de $SSIM = 0.9885$ com $\omega = 0.0030$ (losango na Figura 3). Embora este último resultado seja superior à estimativa pela média, o mesmo apresenta a desvantagem de só obter o resultado prometido após várias tentativas de reconstrução, enquanto a estimativa pela média requer apenas uma. Isso implica que o custo computacional desta técnica de “força bruta” (inúmeras tentativas para obter êxito) é elevado em relação à estimativa pela média. Embora o custo computacional desta solução seja proibitivo, este pode ser bastante atenuado através da escolha de um intervalo bem próximo da origem, que provavelmente conterá o maior SSIM, conforme sugere a Figura 3 (região “R”).

Figura 3: SSIM por parâmetro ω



4 Conclusões

A metodologia proposta na seção 2 é robusta e tem sua convergência garantida. Entretanto, uma escolha inadequada do parâmetro de *threshold* ω pode inviabilizar o potencial da solução. A escolha do parâmetro ω pode ser realizada por “força bruta”, com excelente resultado, conforme exposto na seção 3, Figura 3. Entretanto, seu custo computacional é proibitivo e, via de regra, a busca da melhor solução é inviável no que se refere às necessidades de desempenho de uma tomografia. Por isso, o presente trabalho apresentou uma solução para a escolha do parâmetro ω que com base no valor esperado da DGT, obtendo resultado próximo do “ideal”. A solução apresentada é robusta na presença de ruído, enquanto os outros critérios utilizados para o cálculo do ω não o foram. Esta se baseia na ideia de que a DGT contém os componentes de alta frequência da imagem em reconstrução, que podem ser ruído ou borda. Como o ruído se apresenta na banda inferior da DGT (em frequências mais baixas), a aplicação do filtro “passa altas suavizado” por *soft-threshold filtration* preserva as bordas e, simultaneamente, elimina as componentes de ruído, igualando os *pixels* vizinhos.

Como perspectiva para novos trabalhos, pode-se explorar outros tipos de função de penalização e outros tipos de função esparsa, inclusive funções de penalização adaptativas.

Referências

- Andersen, A. and Kak, A. (1984). Simultaneous algebraic reconstruction technique (sart): A superior implementation of the art algorithm, *Ultrasonic Imaging* **6**(1): 81 – 94.
- Carson, R. E. and Lange, K. (1984). E-m reconstruction algorithms for emission and transmission tomography, *Journal of Computer Assisted Tomography*.
- Daubechies, I., Defrise, M. and Mol, C. D. (2004). An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint, *Communications on Pure and Applied Mathematics* **57**(11): 1413–1457.
- Elbakri, I. A. and Fessler, J. A. (2002). Statistical image reconstruction for polyenergetic x-ray computed tomography, *IEEE Transactions on Medical Imaging* **21**, 2.
- Ge, W. and Ming, J. (2004). Ordered-subset simultaneous algebraic reconstruction techniques (os-sart), *Journal of X-Ray Science and Technology* **12**(3): 169 – 177.
- Gordon, R., Bender, R. and Herman, G. T. (1970). Algebraic reconstruction techniques (art) for three-dimensional electron microscopy and x-ray photography, *Journal of Theoretical Biology* **29**(3): 471 – 481.
- Hengyong, Y., Ji, C. and Wang, G. (2010). Sart-type image reconstruction from overlapped projections, *International Journal of Biomedical Imaging Annual* **2011**.
- Jiang, M. and Wang, G. (2003). Convergence of the simultaneous algebraic reconstruction technique (sart), *Image Processing, IEEE Transactions on* **12**(8): 957–961.
- Kaczmarz, S. (1937). Angenäherte auflösung von systemen linearer gleichungen, *Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres. Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles. Série A, Sciences Mathématiques* **35**: 355–357.
- Lange, K., Bahn, M. and Little, R. (1987). A theoretical study of some maximum likelihood algorithms for emission and transmission tomography, *IEEE Transactions on Medical Imaging*.
- Man, B. D., Nuyts, J., Dupont, P., Marchal, G. and Suetens, P. (2001). An iterative maximum-likelihood polychromatic algorithm for ct, *IEEE Transactions on Medical Imaging* **20**(10): 999–1008.
- Pan, J., Zhou, T., Han, Y. and Jiang, M. (2006). Variable weighted ordered subset image reconstruction algorithm, *International Journal of Biomedical Imaging* **2006**: 7 pages.
- Xu, Q., Mou, X., Wang, G., Sieren, J., Hoffman, E. A. and Yu, H. (2011). Statistical interior tomography, *IEEE Transactions on Medical Imaging* **30**, 5.
- Yu, H. and Wang, G. (2009). Compressed sensing based interior tomography, *Physics in Medicine and Biology*.
- Yu, H. and Wang, G. (2010a). Sart-type image reconstruction from a limited number of projections with the sparsity constraint, *International Journal of Biomedical Imaging* **2010**: 9 pages.
- Yu, H. and Wang, G. (2010b). A soft-threshold filtering approach for reconstruction from a limited number of projections, *PHYSICS IN MEDICINE AND BIOLOGY* (55): 3905–3916.
- Yu, H. and Wang, G. (2014). Sart-type half-threshold filtering approach for ct reconstruction, *Access, IEEE* **2**: 602–613.