

IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMA DINÂMICO MULTIVARIÁVEL NO ESPAÇO DE ESTADO POR DECOMPOSIÇÃO ORTOGONAL: ANÁLISE E APLICAÇÃO

MARLENY A. CHARAGUA JAVIER*, CELSO PASCOLI BOTTURA†

**Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - FEEC
Universidade estadual de Campinas - UNICAMP
Av. Albert Einstein - 400, Cidade Universitária Zeferino Vaz, CEP 13083-852
Barão Geraldo
Campinas, SP, Brasil*

Emails: maralichaja@gmail.com, cpbottura@fee.unicamp.br

Abstract— This work deals with the problem of computational modeling in state space of stochastic data of multivariable system through the theory of stochastic realization with exogenous inputs. For this identification problem we use the orthogonal decomposition technique developed by Picci and Katayama, wherein the data are decomposed into their deterministic and stochastic components by orthogonal projection data in Hilbert space generated by exogenous inputs and the use of supplementary projection, respectively. An application to multivariable stochastic data is presented and the results are analyzed.

Keywords— State space identification, Orthogonal decomposition, Multivariate system, Stochastic realization.

Resumo— Este trabalho trata o problema de modelagem computacional no espaço de estado de dados estocásticos de sistema multivariável através da teoria da realização estocástica com entradas exógenas. Para este problema de identificação utilizamos a técnica de decomposição ortogonal desenvolvida por Picci e Katayama, em que os dados são decompostos em suas componentes determinística e estocástica através da projeção ortogonal dos dados no espaço de Hilbert gerado pelas entradas exógenas e da utilização da projeção complementar, respectivamente. Uma aplicação a dados estocásticos multivariáveis é apresentada e seus resultados são analisados.

Palavras-chave— Identificação no espaço de estado, Decomposição ortogonal, Sistema multivariável, Realização estocástica.

1 Introdução

A identificação de sistemas ou modelagem computacional de dados experimentais de sistemas dinâmicos constitui uma problema central em análise e projeto de sistemas de controle e tem aplicações nas mais variadas áreas da engenharia e das ciências onde métodos quantitativos são aplicados. Ela permite obter modelos matemáticos de sistemas multivariáveis diretamente dos dados de entrada e saída em ambientes ruidosos. Neste trabalho tratamos da obtenção de modelos lineares de sistemas multivariáveis ruidosos no espaço de estado (Ho and Kalman, 1966). Os parâmetros desconhecidos de um modelo podem ser determinados de dados experimentais por vários métodos, um deles é o método baseado em subespaços, ver (Barreto, 2002), (Cáceres, 2005).

A teoria de realização estocástica de Akaike trata este problema com uma abordagem geométrica, onde a partir dos dados da série temporal são gerados os espaços preditores do futuro e do passado. Aplicando a análise de correlação canônica aos espaços preditores são obtidos os vetores base ortonormais, os quais são usados como vetores de estado na representação markoviana, ver (Akaike, 1974), (Akaike, 1975), (Akaike, 1976), (Charagua J., 2015a), (Charagua J. et al., 2015b).

O método da decomposição ortogonal ORT é usado para obter um modelo do espaço de estado na forma inovativa de sistemas multivariáveis e se fundamenta na teoria de Akaike. A técnica desenvolvida neste método é baseada na decomposição do processo de saída nas componentes determinística e estocástica. A pri-

meira é obtida pela projeção ortogonal do processo de saída no espaço de Hilbert gerado pelas entradas exógenas e a segunda é obtida pela projeção complementar, ver (Katayama, 2005). Alguns trabalhos anteriores sobre sistemas estocásticos com entradas exógenas podem ser vistos em (Tamariz and Bottura, 2007), (Chiuso and Picci, 2001), (Katayama and Picci, 1999), (Lindquist and Picci, 1996a), (Lindquist and Picci, 1996b), (Van Overschee and De Moor, 1996), (Picci and Katayama, 1996), (Verhaegen, 1994).

Neste artigo apresentamos de forma breve, o problema da realização estocástica no modelo no espaço de estado na forma inovativa com entradas exógenas, depois mostra-se o método de identificação ORT segundo (Picci and Katayama, 1996) na abordagem das partes determinística e estocástica. Para tanto, fazemos a construção das matrizes de Hankel e de forma especial usamos a decomposição LQ nas matrizes de Hankel e a decomposição em valores singulares SVD. Em seguida são calculadas a quadrupla (A_d, B_d, C_d, D_d) da parte determinística e a tripla (A_s, C_s, K) da forma inovativa na parte estocástica. Finalmente o algoritmo apresentado é aplicado a um sistema multivariável com entradas exógenas na forma inovativa.

2 O problema da realização estocástica de sistema com entradas exógenas

O problema da realização estocástica de um sistema com entradas exógenas consiste em encontrar um modelo de espaço de estado na forma inovativa para um sistema estocástico multivariável linear invariante no

tempo, descrito pela equação (1):

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + Ke(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + e(t) \end{aligned} \quad (1)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é um vetor de estado, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{h \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{h \times m}$ são matrizes do sistema, $K \in \mathbb{R}^{n \times h}$   o ganho de Kalman e $e(t) \in \mathbb{R}^h$ um processo estocástico de inovação, a partir dos dados de entrada $u(t) \in \mathbb{R}^m$ e de saída $y(t) \in \mathbb{R}^h$, $\{u(t), y(t), t = 0, \pm 1, \dots\}$.

3 Realização estocástica com entradas exógenas

A realização estocástica com entradas exógenas descrita na equação (1), pode ser abordada pela decomposição ortogonal, ver (Picci and Katayama, 1996), onde a saída y é decomposta nas componentes estocástica y_s e determinística y_d . As respectivas realizações para as componentes determinística e estocástica são: A realização mínima da componente estocástica y_s em termos do vetor base $x_s(t)$ é dada por:

$$\begin{aligned} x_s(t+1) &= A_s x_s(t) + Ke(t) \\ y_s(t) &= C_s x_s(t) + e(t) \end{aligned} \quad (2)$$

onde e   o processo de inovação.

A realização mínima da componente determinística y_d em termos do vetor base $x_d(t)$ é dada por:

$$\begin{aligned} x_d(t+1) &= A_d x_d(t) + B_d u(t) \\ y_d(t) &= C_d x_d(t) + D_d u(t) \end{aligned} \quad (3)$$

• Modelo conjunto

Para obter a realização no espaço de estado com entradas exógenas para $y(t)$, combinamos as realizações determinística (3) e estocástica(2):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_d(t+1) \\ x_s(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ 0 & A_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d(t) \\ x_s(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} e(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C_d & C_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d(t) \\ x_s(t) \end{bmatrix} + D_d u(t) + e(t) \end{aligned} \quad (4)$$

A realização (4)   uma forma particular do modelo de espaço de estado de (1) onde as matrizes A e B têm estruturas de blocos, tal que o vetor x_d do subsistema determinístico não   controlável a partir do processo de inovação $e(t)$, enquanto que o vetor de estado x_s do subsistema estocástico não   controlável a partir do vetor de entrada $u(t)$. Além disso, se os subsistemas determinístico e estocástico têm algumas dinâmicas comuns, isto é, se A_d e A_s têm alguns autovalores comuns, então o sistema (4) não   observável, donde não   mínimo.

4 Identificação pelo método da decomposição ortogonal

Consideremos números finitos de dados de entrada $u(t)$ e de saída $y(t)$ de um sistema para $t = 0, 1, \dots, N + 2k - 2$, que modelaremos linearmente no espaço de estado.

Com estes dados de entrada e saída calculam-se as matrizes bloco de Hankel de entrada $U_{0|2k-1} \in \mathbb{R}^{2km \times N}$, conformada pelas entradas passadas $U_{0|k-1} \in \mathbb{R}^{km \times N}$ e futuras $U_{k|2k-1} \in \mathbb{R}^{km \times N}$ e de saída $Y_{0|2k-1} \in \mathbb{R}^{2kp \times N}$, conformada pelas saídas passadas $Y_{0|k-1} \in \mathbb{R}^{kp \times N}$ e futuras $Y_{k|2k-1} \in \mathbb{R}^{kp \times N}$:

$$U_{0|2k-1} := \begin{bmatrix} U_{0|k-1} \\ U_{k|2k-1} \end{bmatrix}, Y_{0|2k-1} := \begin{bmatrix} Y_{0|k-1} \\ Y_{k|2k-1} \end{bmatrix} \quad (5)$$

onde:

$$U_{0|k-1} = \begin{bmatrix} u(0) & (1) & \dots & u(N-1) \\ u(1) & u(2) & \dots & u(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(k-1) & u(k) & \dots & u(N+k-2) \end{bmatrix},$$

$$U_{k|2k-1} = \begin{bmatrix} u(k) & u(k+1) & \dots & u(k+N-1) \\ u(k+1) & u(k+2) & \dots & u(k+N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(2k-1) & u(2k) & \dots & u(N+2k-2) \end{bmatrix}$$

$$Y_{0|k-1} = \begin{bmatrix} y(0) & (1) & \dots & y(N-1) \\ y(1) & y(2) & \dots & y(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(k-1) & y(k) & \dots & y(N+k-2) \end{bmatrix},$$

$$Y_{k|2k-1} = \begin{bmatrix} y(k) & y(k+1) & \dots & y(k+N-1) \\ y(k+1) & y(k+2) & \dots & y(k+N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(2k-1) & y(2k) & \dots & y(N+2k-2) \end{bmatrix}$$

Fazendo a decomposi  o LQ, das matrizes de Hankel de entrada e de saída temos:

$$\begin{bmatrix} U_{0|2k-1} \\ Y_{0|2k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Q}_1^T \\ \bar{Q}_2^T \end{bmatrix} \quad (6)$$

onde supomos que R_{11}   não singular; a saída $Y_{0|2k-1}$ é expressa por:

$$\begin{aligned} Y_{0|2k-1} &= R_{21} \bar{Q}_1^T + R_{22} \bar{Q}_2^T \\ &= R_{21} R_{11}^{-1} U_{0|2k-1} + R_{22} \bar{Q}_2^T \end{aligned} \quad (7)$$

Como $\bar{Q}_1 \in \mathbb{R}^{N \times 2km}$ e $\bar{Q}_2 \in \mathbb{R}^{N \times 2kp}$ são matrizes ortogonais, fazendo a projeção ortogonal de $Y_{0|2k-1}$ sobre o espaço linha $U_{0|2k-1}$, obtemos a componente determinística:

$$\hat{Y}_{0|2k-1}^d = R_{21} \bar{Q}_1^T = R_{21} R_{11}^{-1} U_{0|2k-1} \quad (8)$$

e a componente estocástica:

$$\hat{Y}_{0|2k-1}^s := Y_{0|2k-1} - \hat{Y}_{0|2k-1}^d = R_{22} \bar{Q}_2^T \quad (9)$$

de $Y_{0|2k-1}$.

4.1 Modelagem do Subsistema Determinístico

A partir da equação (3) do subsistema determinístico no espaço de estado, iterativamente obtemos a equação de entrada - saída (10) da componente determinística para $t = k, k+1, \dots, (N+k-1)$:

$$\hat{Y}_{k|2k-1}^d = \mathcal{O}_k \hat{X}_k^d + \Psi_k U_{k|2k-1} \quad (10)$$

onde $\hat{X}_k^d \in \mathbb{R}^{n \times N}$ é a matriz sequência de estados, $\mathcal{O}_k \in \mathbb{R}^{kh \times n}$, $k > n$, é a matriz de observabilidade e $\Psi_k \in \mathbb{R}^{kh \times km}$ a matriz triangular inferior bloco de Toeplitz respectivamente denotados por:

$$\hat{X}_k^d = [\hat{x}_d(k) \quad \hat{x}_d(k+1) \quad \dots \quad \hat{x}_d(k+N-1)] \quad (11)$$

$$\mathcal{O}_k = \begin{bmatrix} C_d & C_d A_d & \dots & C_d A_d^{k-1} \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

$$\Psi_k(D_d, B_d) = \begin{bmatrix} D_d & & & \\ C_d B_d & D_d & & \\ C_d A_d B_d & C_d B_d & D_d & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ C_d A_d^{k-2} B_d & \dots & \dots & C_d B_d D_d \end{bmatrix} \quad (13)$$

Aplicando a decomposição LQ às entradas e às saídas passadas e futuras, obtemos a equação (14):

$$\begin{bmatrix} U_{k|2k-1} \\ U_{0|k-1} \\ Y_{0|k-1} \\ Y_{k|2k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \\ Q_4^T \end{bmatrix} \quad (14)$$

Considerando a equação (8), temos que da equação (14) a saída determinística futura $\hat{Y}_{k|2k-1}^d$ é dada pela equação (15):

$$\hat{Y}_{k|2k-1}^d = L_{41} Q_1^T + L_{42} Q_2^T \quad (15)$$

Igualando as equações (10) e (15), substituindo $U_{k|2k-1}$ de (14) e pós-multiplicando por Q_2 a igualdade, tem-se $\mathcal{O}_k \hat{X}_k^d Q_2 = L_{42}$. Já que $\hat{X}_k^d Q_2$ tem posto linha completo, temos:

$$\text{Im}(\mathcal{O}_k) = \text{Im}(L_{42}) \quad (16)$$

Analogamente, pré-multiplicando a igualdade das equações (10) e (15) pela matriz $(\mathcal{O}_k^\perp)^T$ satisfazendo $(\mathcal{O}_k^\perp)^T \mathcal{O}_k = 0$, e pós-multiplicando por Q_1 temos:

$$(\mathcal{O}_k^\perp)^T L_{41} = (\mathcal{O}_k^\perp)^T \Psi_k(B_d, D_d) L_{11} \quad (17)$$

A partir das equações (16) e (17) pode-se obter um método de identificação do subsistema determinístico com os passos seguintes:

- 1) Calcular a decomposição em valores singulares (SVD) e a dimensão do vetor de estado, que é igual a $\dim(\hat{S})$ de:

$$L_{42} = \begin{bmatrix} \hat{U} & \bar{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{S} & 0 \\ 0 & \bar{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V}^T \\ \bar{V}^T \end{bmatrix} \simeq \hat{U} \hat{S} \hat{V}^T$$

- 2) Calcular a matriz de observabilidade estendida e as estimativas de $\hat{C}_d$ e $\hat{A}_d$:

$$\mathcal{O}_k = \hat{U} \hat{S}^{1/2} \text{ de } \hat{U} \hat{S} \hat{V}^T = (\hat{U} \hat{S}^{1/2})(\hat{S}^{1/2} \hat{V}^T)$$

$$\hat{C}_d = \mathcal{O}_k(1:p, 1:n),$$

$$\hat{A}_d = \mathcal{O}_{k-1}^\dagger(1:p*(k-1), 1:n) * \mathcal{O}_k(p+1:k*p, 1:n)$$

- 3) Calcular as estimativas de $\hat{B}_d$ e $\hat{D}_d$, por mínimos quadrados de:

$$\bar{U}^T \Psi_k(\hat{B}_d, \hat{D}_d) = \bar{U}^T L_{41} L_{11}^{-1}$$

- 4) Com as matrizes $(\hat{A}_d, \hat{B}_d, \hat{C}_d, \hat{D}_d)$ se constroem o modelo de espaço de estado do subsistema determinístico (3).

4.2 Modelagem do Subsistema Estocástico

Para o subsistema estocástico no espaço de estado dado pela equação (2), definimos uma matriz de observabilidade e uma matriz de controlabilidade estendidas, dadas respectivamente, por:

$$\mathcal{O}_s = \begin{bmatrix} C_s^T & A_s^T C_s^T & (A_s^T)^2 C_s^T & \dots \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_s = \begin{bmatrix} \bar{C}^T & A_s \bar{C}^T & A_s^2 \bar{C}^T & \dots \end{bmatrix}$$

onde: $\bar{C}^T = E\{x_s(t+1)y_s(t)^T\}$ e as matrizes de observabilidade e controlabilidade estendidas são obtidas pela fatoração da matriz de Hankel $H = \mathcal{O}_s \mathcal{E}_s$.

Da equação (9) calculamos a componente estocástica $y_s(t)$, construímos as matrizes do passado $Y_{ps} \in \mathbb{R}^{kh \times N}$ e do futuro $Y_{fs} \in \mathbb{R}^{kh \times N}$, da forma:

$$Y_{ps} := \begin{bmatrix} y_s(k-1) & y_s(k) & \dots & y_s(N+k-2) \\ y_s(k-2) & y_s(k-1) & \dots & y_s(N+k-3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_s(0) & y_s(1) & \dots & y_s(N-1) \end{bmatrix},$$

$$Y_{fs} := \begin{bmatrix} y_s(k) & y_s(k+1) & \dots & y_s(k+N-1) \\ y_s(k+1) & y_s(k+2) & \dots & y_s(k+N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_s(2k-1) & y_s(2k) & \dots & y_s(N+2k-2) \end{bmatrix}$$

Com as matrizes do passado e do futuro obtemos as matrizes de covariâncias Σ_{ffs} , Σ_{pps} e a matrizes de covariância cruzada Σ_{fps} das amostras:

$$\frac{1}{N} \begin{bmatrix} Y_{ps} \\ Y_{fs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{ps}^T & Y_{fs}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{pps} & \Sigma_{pfs} \\ \Sigma_{fps} & \Sigma_{ffs} \end{bmatrix}$$

Para calcular as matrizes de covariâncias aplicamos a fatoração LQ da forma:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} Y_{ps} \\ Y_{fs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} \quad (18)$$

Assim, elas podem ser calculadas em função das componentes da matriz L em (18):

$$\Sigma_{fps} = L_{21} L_{11}^T, \quad \Sigma_{ffs} = L_{21} L_{21}^T + L_{22} L_{22}^T, \quad \Sigma_{pps} = L_{11} L_{11}^T$$

Aplicando a decomposição em valores singulares SVD, obtem-se as correlações canônicas do futuro e

do passado da componente estocástica, como se mostra a seguir:

$$\Sigma_{ffs}^{-1/2} \Sigma_{ffs} \Sigma_{pps}^{T/2} = U \Sigma V^T \simeq \hat{U} \hat{\Sigma} \hat{V}^T \quad (19)$$

onde a dimensão do vetor de estado é dada pela dimensão de $\hat{\Sigma}$.

A partir da decomposição em valores singulares, obtemos a observabilidade e a controlabilidade como:

$$\mathcal{O}_{sk} = \Sigma_{ffs}^{-1/2} \hat{U} \hat{\Sigma}^{1/2}, \quad \mathcal{C}_{sk} = \hat{\Sigma}^{1/2} V^T \Sigma_{pps}^{T/2} \quad (20)$$

As matrizes A_s , C_s e $\bar{C}^T$ são calculadas a partir das matrizes de observabilidade e controlabilidade, da forma:

$$A_s = \mathcal{O}_{sk}^+ \bar{\mathcal{O}}_{sk}, \quad C_s = \mathcal{O}_{sk} k(1:p,:), \quad \bar{C} = \mathcal{C}_{sk}(:, 1:p) \quad (21)$$

onde: $\mathcal{O}_{sk} = \mathcal{O}_{sk}(1:(k-1)p,:)$ e $\bar{\mathcal{O}}_{sk} = \mathcal{O}_{sk}(p+1:kp,:)$.

O ganho de Kalman é:

$$K = (\bar{C}^T - A_s \hat{\Sigma} C_s^T)(\Lambda(0) - C_s \hat{\Sigma} C_s^T)^{-1} \quad (22)$$

onde $\Lambda(0) = \Sigma_{ffs}(1:p, 1:p)$.

O método de identificação do subsistema estocástico se realiza passo a passo da seguinte forma:

1. Calcular a decomposição LQ de (18) e a SVD segundo (19)
2. Calcular as matrizes de observabilidade e de controlabilidade dadas por (20), as matrizes A_s , C_s e $\bar{C}^T$ com (21) e o ganho de Kalman K como na equação (22).
3. Finalmente com as matrizes (A_s, K, C_s) construir o modelo de espaço de estado do subsistema estocástico (2) na forma inovativa.

5 Síntese do método de decomposição ortogonal

O algoritmo de decomposição ortogonal pode ser organizado nos seguintes passos:

1. Calcular as matrizes $U_{0|k-1}$, $U_{k|2k-1}$, $Y_{0|k-1}$ e $Y_{k|2k-1}$ a partir dos dados de entrada $u(t)$ e de saída $y(t)$.
2. Obter a componente determinística identificada $\hat{y}_d(t)$ através da quadrupla de matrizes $(\hat{A}_d, \hat{B}_d, \hat{C}_d, \hat{D}_d)$.
3. A partir da componente determinística identificada $\hat{Y}_{0|2k-1}^d$, calcular a componente estocástica $\hat{Y}_{0|2k-1}^s$ e aplicar o algoritmo de Akaike para obter a tripla $(\hat{A}_s, \hat{K}, \hat{C}_s)$.
4. Obter a componente estocástica identificada $\hat{y}_s(t)$ através da tripla de matrizes $(\hat{A}_s, \hat{K}, \hat{C}_s)$.
5. Finalmente, obter a saída identificada $\hat{y}(t)$, somando a componente determinística estimada $\hat{y}_d(t)$ e a componente estocástica estimada $\hat{y}_s(t)$.

6 Aplicação

O algoritmo da decomposição ortogonal é aplicado na modelagem computacional de dados de um sistema dinâmico multivariável estocástico. Nesta aplicação consideramos um modelo *benchmark* no espaço de estado na forma inovativa, dado pela equação (4), onde:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.4815 & 0.2535 & -0.0183 & -0.5331 \\ -0.1405 & -0.6357 & -0.7920 & -0.0680 \\ -0.0095 & 0.5059 & -0.1281 & 0.0126 \\ 0.0703 & -0.1882 & 0.1893 & 0.7128 \end{bmatrix},$$

$$B_d = \begin{bmatrix} -0.4048 & 0.1314 & 1.0634 \\ 0.3241 & 0.1683 & -0.0379 \\ 0.4276 & -0.0154 & 0.3634 \\ 0.0866 & -0.1299 & 0.0139 \end{bmatrix},$$

$$C_d = \begin{bmatrix} -0.5104 & 0.5799 & -0.3539 & 0.0682 \\ -0.6820 & -0.1096 & 0.3748 & -0.3241 \end{bmatrix},$$

$$D_d = \begin{bmatrix} -0.2248 & 0.0633 & -1.1547 \\ -1.7369 & 0.2979 & 1.2561 \end{bmatrix},$$

$$A_s = \begin{bmatrix} 0.7607 & -0.0674 & -0.0396 & -0.0645 \\ 0.1096 & 0.6169 & 0.6044 & 0.3316 \\ 0.0280 & -0.7476 & 0.4905 & 0.1422 \\ 0.0671 & 0.2146 & -0.1350 & -0.6292 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} -0.5318 & -0.4350 \\ 0.2187 & 0.1866 \\ 0.2310 & 0.0443 \\ 0.3592 & -0.0562 \end{bmatrix},$$

$$C_s = \begin{bmatrix} -0.9127 & -0.0720 & -0.3361 & 0.1175 \\ -0.9496 & -0.1526 & 0.1805 & -0.3248 \end{bmatrix}$$

e $e(t)$ é um ruído branco. Com as sequências de entradas $u_1(t)$, $u_2(t)$ e $u_3(t)$ aplicadas ao sistema acima geramos as sequências de saídas $y_1(t)$ e $y_2(t)$, com período de amostragem $T = 1s$.

Os resultados obtidos na identificação determinística, tomando o número de colunas das matrizes de dados fixado com $N = 1000$ e o número de bloco linhas $k = 10$, são:

$$\hat{A}_d = \begin{bmatrix} 0.406 & 0.4537 & 0.1442 & 0.2262 \\ -0.08276 & -0.5253 & 0.5687 & 0.1031 \\ 0.255 & -0.5561 & 0.005026 & 0.3289 \\ -0.2191 & 0.2648 & 0.3485 & 0.5941 \end{bmatrix},$$

$$\hat{B}_d = \begin{bmatrix} 0.03708 & -0.009746 & -0.09068 \\ -0.04431 & -0.02128 & -0.03599 \\ 0.04762 & -0.01731 & 0.01706 \\ 0.01358 & -0.01908 & 0.01324 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_d = \begin{bmatrix} 8.247 & -2.607 & -3.673 & 1.192 \\ 6.745 & 0.4986 & 4.302 & -3.307 \end{bmatrix},$$

$$\hat{D}_d = \begin{bmatrix} -0.2203 & 0.03842 & -1.153 \\ -1.729 & 0.278 & 1.26 \end{bmatrix}$$

e os resultados obtidos na identificação estocástica são:

$$\hat{A}_s = \begin{bmatrix} 0.7937 & 0.513 & 0.2299 & 0.04862 \\ -0.6049 & 0.6535 & 0.2396 & 0.09919 \\ 0.02057 & -0.5476 & 0.5222 & 0.3149 \\ 0.02461 & -0.09312 & -0.3127 & -0.7321 \end{bmatrix},$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 25.05 & -25.54 \\ -14.86 & 14.71 \\ -22.01 & 21.78 \\ -11.8 & 11.42 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_s = \begin{bmatrix} -1.415 & -0.07797 & -0.7169 & -0.2559 \\ -1.096 & 0.009407 & -1.082 & -0.09802 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}^T = \begin{bmatrix} -1.6007 & -1.3835 \\ 0.1717 & -0.0262 \\ -1.1060 & -1.2741 \\ -0.3107 & -0.3008 \end{bmatrix}$$

Nas Figuras 1.A) e 2.B) apresentam-se as saídas y_{d1} , $\hat{y}_{d1}$ e y_{d2} , $\hat{y}_{d2}$ do modelo determinístico multivariável; nas Figuras 1.C) e 2.D) apresentam-se as saídas y_{s1} , $\hat{y}_{s1}$ e y_{s2} , $\hat{y}_{s2}$ do modelo estocástico multivariável; nas Figuras 1.E) e 2.F) apresentam-se as saídas $y_1 = y_{d1} + y_{s1}$, $\hat{y}_1 = \hat{y}_{d1} + \hat{y}_{s1}$ e $y_2 = y_{d2} + y_{s2}$, $\hat{y}_2 = \hat{y}_{d2} + \hat{y}_{s2}$ do sistema din mico; nas Figuras 1.G) e 2.H) s o dados os erros de identificação para as saídas y_1 e y_2 . Estas figuras s o dadas no intervalo de 500 a 600 segundos para uma melhor visualiza  o. Para validar os resultados compara-

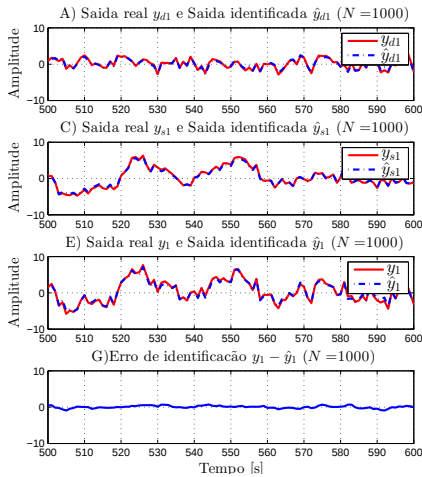


Figura 1: Saída y_1 do sistema para $N = 1000$.

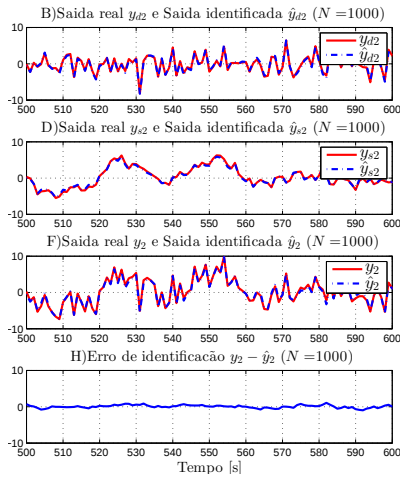


Figura 2: Saída y_2 do sistema para $N = 1000$.

mos os parâmetros de Markov. Denotamos como PMD aos par metros de Markov do subsistema determinístico do *benchmark* o e aos par metros de Markov do subsistema determinístico identificado denotados por $\widehat{PMD} = [\hat{C}_d \hat{B}_d \quad \hat{C}_d \hat{A}_d \hat{B}_d \quad \hat{C}_d \hat{A}_d^2 \hat{B}_d]$, ver tabela 1(a). Da mesma forma os par metros de Markov do subsistema estocástico *benchmark* s o denotados por PME e os parâmetros de Markov do subsistema estocástico identificado são denotado por

$$\widehat{PME} = [\hat{C}_s \bar{C}^T \quad \hat{C}_s \hat{A}_s \bar{C}^T \quad \hat{C}_s \hat{A}_s^2 \bar{C}^T], \text{ ver tabela 1(b).}$$

Tabela 1: Parâmetros de Markov

(a) Componente Determinística				(b) Componente Estocástica			
PMD^T		$\widehat{PMD}^T$		PME^T		$\widehat{PME}^T$	
0.25	0.37	0.26	0.39	3.12	2.98	3.12	2.98
0.03	-0.07	0.01	-0.09	2.94	2.92	2.95	2.92
-0.69	-0.59	-0.70	-0.60	2.43	2.41	2.43	2.41
-0.24	0.19	-0.22	0.21	2.37	2.33	2.37	2.34
-0.19	-0.04	-0.20	-0.05	1.75	1.79	1.76	1.80
-0.45	-0.37	-0.47	-0.38	1.80	1.70	1.80	1.72
0.36	-0.01	0.38	0.01				
-0.05	-0.09	-0.07	-0.11				
0.20	-0.20	0.19	-0.21				

Analogamente para $N = 10000$, obtemos para o subsistema determinístico:

$$\hat{A}_d = \begin{bmatrix} 0.3998 & 0.4627 & -0.1482 & -0.2189 \\ -0.1312 & -0.5254 & -0.533 & -0.1133 \\ -0.2746 & 0.6025 & -0.07097 & 0.2939 \\ 0.2505 & -0.1567 & 0.2044 & 0.7259 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}_d = \begin{bmatrix} 0.03048 & -0.006093 & -0.09525 \\ -0.04797 & -0.01962 & -0.0363 \\ -0.04292 & 0.01234 & -0.007488 \\ -0.01611 & 0.0138 & -0.00719 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_d = \begin{bmatrix} 8.141 & -2.463 & 3.633 & -0.8956 \\ 6.444 & 0.1519 & -4.75 & 2.437 \end{bmatrix}$$

$$\hat{D}_d = \begin{bmatrix} -0.2428 & 0.07698 & -1.18 \\ -1.754 & 0.3046 & 1.237 \end{bmatrix}$$

e para o subsistema estocástico:

$$\hat{A}_s = \begin{bmatrix} 0.8052 & -0.5243 & -0.06198 & -0.08393 \\ 0.5581 & 0.5231 & 0.2539 & 0.2429 \\ -0.1937 & -0.6048 & 0.6297 & 0.1778 \\ 0.002449 & -0.1567 & -0.3651 & -0.6757 \end{bmatrix}$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 4.07 & -3.89 \\ 16.41 & -17.08 \\ 7.175 & -7.621 \\ 34.99 & -35.95 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}^T = \begin{bmatrix} 1.7184 & 1.5231 \\ -0.1073 & -0.3690 \\ -1.0743 & -1.1762 \\ -0.2657 & -0.2480 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_s = \begin{bmatrix} 1.536 & -0.2355 & -0.6412 & -0.2545 \\ 1.24 & -0.3122 & -1.019 & -0.07903 \end{bmatrix}$$

Nas Figuras 3 e 4 apresentam-se os resultados para $N = 10000$ no intervalo de 500 a 600 segundos. Como no caso anterior validamos os resultados com os parâmetros de Markov; para a componente determinística ver tabela 2(a) e para a componente estocástica ver tabela 2(b):

7 Conclusões

Neste trabalho apresentamos de forma breve a teoria do algoritmo ORT para identificação de um sistema estocástico multivariável com entradas exógenas, sem realimentação, no espaço de estado, por decomposição ortogonal. Fizemos uma aplicação do método ORT   modelagem computacional de dados estoc s-

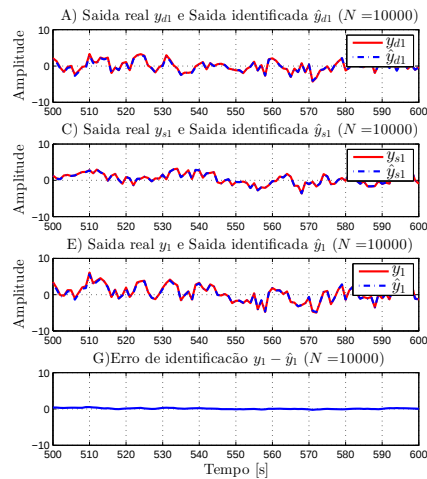


Figura 3: Saída do sistema y_1 para $N = 10000$.

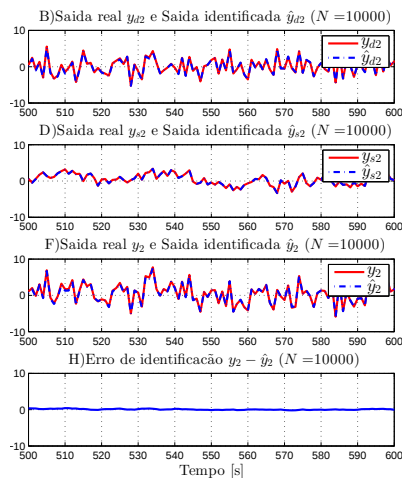


Figura 4: Saída do sistema y_2 para $N = 10000$.

tivos multivariáveis gerados por um sistema benchmark. Obtivemos os modelos no espaço de estado dos subsistemas determinístico (A_d, B_d, C_d, D_d) e estocástico (A_s, K, C_s) na forma inovativa para 1000 e 10000 amostras. Os resultados obtidos foram muito bons, porém os melhores deram-se na identificação para 10000 amostras já que os parâmetros de Markov do sistema identificado neste caso são mais próximos dos parâmetros de Markov do sistema benchmark.

Referências

- Akaike, H. (1974). Stochastic theory of minimal realization., *IEEE Trans. Automatic Control* **AC-19**: 667–674.
- Akaike, H. (1975). Markovian representation of stochastic processes by canonical variables, *SIAM J. Control* **13**: 162–173.
- Akaike, H. (1976). Canonical correlation analysis of time series and the use of an information criterion., *System identification: Advances and case studies* (R. Mehra and D. Lainiotis, eds) pp. 27–96.
- Barreto, G. (2002). *Modelagem Computacional Distribuída e Paralela de Sistemas e de Séries Temporais Multivariáveis no Espaço de Estado*, PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas.

Tabela 2: Parâmetros de Markov

(a) Componente Determinística				(b) Componente estocástica			
PMD^T		$\widehat{PMD}^T$		PME^T		$\widehat{PME}^T$	
0.25	0.37	0.22	0.35	3.42	3.2802	3.42	3.28
0.03	-0.07	0.03	-0.07	3.24	3.2221	3.24	3.22
-0.69	-0.59	-0.71	-0.60	2.71	2.6951	2.70	2.68
-0.24	0.19	-0.25	0.18	2.64	2.6127	2.64	2.60
-0.19	-0.04	-0.18	-0.04	2.00	2.0591	1.98	2.04
-0.45	-0.37	-0.48	-0.40	2.03	1.9563	2.02	1.95
0.36	-0.01	0.36	-0.00				
-0.05	-0.09	-0.03	-0.09				
0.20	-0.20	0.17	-0.22				

Cáceres, A. F. T. (2005). *Identificação e Controle Estocásticos Descentralizados de Sistemas Interconectados Multivariáveis no Espaço de Estado*, PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas.

Charagua J., M. A. (2015a). *Modelagem computacional de dados estocásticos multivariáveis no espaço de estado de séries temporais e de sistemas dinâmicos por decomposição ortogonal*, Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas UNICAMP.

Charagua J., M. A., Forero, A. J. and Bottura, C. P. (2015b). Modelagem computacional de dados estocásticos de série temporal multivariável no espaço de estado pelo método de akaike: Análise e aplicação, *XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI)* pp. 1830–1835.

Chiuso, A. and Picci, G. (2001). Some algorithmic aspects of subspace identification with inputs, *Int. J. Applied Math and Computer Science* **11**(1): 55–75.

Ho, B. and Kalman, R. (1966). Effective construction of linear, state-variable models from input/output functions, *Regelungstechnik* **14**: 545–548.

Katayama, T. (2005). *Subspace Methods for System Identification*, Springer.

Katayama, T. and Picci, G. (1999). Realization of stochastic systems with exogenous inputs and subspace identification methods, *Automatica* **35**(10): 1635–1652.

Lindquist, A. and Picci, G. (1996a). Canonical correlation analysis, approximate covariance extension, and identification of stationary time series, *Automatica* **32**(5): 709–733.

Lindquist, A. and Picci, G. (1996b). Geometric methods for state space identification, *The Science of Learning Models from Data* **50**: 1–69.

Picci, G. and Katayama, T. (1996). Stochastic realization with exogenous inputs and subspace methods identification, *Signal Processing* **52**: 145–160.

Tamariz, A. D. R. and Bottura, C. P. (2007). Proposta para identificação de sistemas ruidosos multivariáveis no espaço de estado, *6th Brazilian Conference on Dynamics, Control and their Applications - DINCON' 2007*.

Van Overschee, P. and De Moor, B. (1996). *Subspace Identification for Linear Systems*, Kluwer Academic.

Verhaegen, M. (1994). Identification of the deterministic part of mimo state space models given in innovations from input-output data, *Automatica* **30**(1): 61–74.