

DISCRETIZAÇÃO DE MODELO AFIM EM ESPAÇO DE ESTADO DE SISTEMAS LINEARES COM PARÂMETROS VARIANTES VIA LFT

J. A. PUERTO ACOSTA* CELSO P. BOTTURA*

*DSIF-FEEC-UNICAMP

Av. Albert Einstein - 400, Cidade Universitária Zeferino Vaz
Distrito Barão Geraldo
Campinas, SP, 13083-852, Brasil

Email: japa1@dsif.fee.unicamp.br, bottura@fee.unicamp.br

Abstract— Continuous linear parameter varying systems (LPV) are usually represented using the Linear Fractional Transformation (LFT). Discrete models are required for the discrete treatment of LPV systems. Thus there are needs for obtaining models for discrete LPV systems and for discretization of continuous LPV models. The discretization of this type of systems is not trivial and may require special considerations on the model parameter characteristic variations. In this work we present a procedure for the approximate discretization of continuous LPV systems using the LFT and exploring the characteristics of this discretization procedure via LFT around multiple operation points. The representation of the discretized affine LPV model is obtained from the LTI models at each operation point.

Keywords— Discretization, LPV-LFT, LPV-Affine state space model.

Resumo— Sistemas contínuos Lineares com Parâmetros Variantes (LPV) são comumente representados usando a Transformada Fracionária Linear (LFT). Abordagens discretas dos sistemas LPV, requerem modelos discretos. Portanto é de interesse a obtenção de modelos LPV discretos e a discretização de modelos LPV contínuos. A discretização destes sistemas não é um processo convencional e pode demandar considerações especiais nas características das variações paramétricas do modelo. Neste trabalho apresentamos um procedimento de discretização aproximada de sistemas contínuos LPV, usando a LFT e explorando as características deste procedimento de discretização via LFT em torno de múltiplos pontos de operação. A representação do modelo discretizado LPV afim, é dada a partir dos modelos LTI em cada ponto de operação.

Palavras-chave— Discretização, LPV-LFT, Modelo de Estado LPV-Afim.

1 INTRODUÇÃO

Os Sistemas Lineares com Parâmetros Variantes (LPV) tem ganho uma importante atenção nas ultimas décadas no contexto de aplicação em controle de processos entre outros. Quase todas as pesquisa em controle e identificação requerem procedimentos de simulação para conferir a confiabilidade e a eficiência dos métodos propostos. Estes procedimentos de simulação são desenvolvidos tanto para processos contínuos quanto para discretos e em geral utilizam sistemas de teste ou “benchmarks”.

A transformação de processos contínuos para discretos é amplamente estudada e desenvolvida quando trata-se de sistemas Lineares Invariantes no Tempo¹ (LTI). No caso de sistemas LPV os métodos e procedimentos de transformação de sistemas contínuos para discretos têm sido menos desenvolvidos, porque os sistemas LPV envolvem múltiplas características que tornam mais difícil a discretização. Algumas dessas características advém da possibilidade de representar sistemas lineares e não lineares em diversos pontos de operação ou de representar sistemas variantes no tempo ou da própria variação dos parâmetros.

A Transformada Fracionária linear² (LFT) é uma ferramenta amplamente usada em sistemas

de controle robusto para descrição de modelos com incertezas entre outras aplicações. A LFT também tem sido usada para a transformação do domínio da frequência complexa s para o domínio da frequência discreta z ; também é usada para gerar uma ponte entre representações de estado e as representações no domínio da frequência, gerando as matrizes de transferência de sistemas lineares multivariáveis invariantes no tempo.

A representação de estado via LFT de sistemas LPV discretizados é composta de duas LFT's. A primeira LFT é inferior ($\mathcal{F}_l(M, \Delta)$) e contem as matrizes de estado contínuas independentes da matriz de parâmetros (Δ). E a segunda LFT é superior ($\mathcal{F}_u(N, z^{-1}I)$) onde $N = \mathcal{F}_l(M, \Delta)$ e contem as matrizes de estado discretas dependentes dos parâmetros.

Objetivando a geração de sistemas LPV discretos de teste, a principal contribuição deste artigo é a de propor um procedimento que permita uma discretização aproximada de sistemas multivariáveis contínuos LPV, estendendo o uso tradicional da LFT na discretização de sistemas contínuos LTI. E portanto ajudando na geração de sistemas discretos multivariáveis de teste “benchmarks” para simulação e/ou identificação deste tipo de sistema.

Em consequência com o anteriormente exposto, neste trabalho propõe-se um procedimento de discretização de sistemas Lineares com Parâ-

¹“LTI” do inglês “Linear Time Invariant”

²“LFT” do inglês “Linear Fractional Transformation”

metros Variantes (LPV) contínuos via transformada fracionária linear (LFT). Para dito propósito o artigo tem a seguinte organização: Na Seção 2 é feita uma breve revisão da Transformada Fracionária linear (Doyle et al., 1991), (Packard, 1994), (Zhou et al., 1996). Na Seção 3 é apresentada a definição de sistemas LPV. Na Seção 4 o modelo afim em espaço de estado (LPV-A) (Casella and Lovera, 2008) e a representação de estado de sistemas lineares invariantes com o tempo, contínuos e discretos via LFT são apresentados. Na Seção 5 apresenta-se o procedimento proposto que é exemplificado na Seção 6 com a modelagem e posterior discretização de um modelo LPV contínuo.

2 Transformação Fracionária Linear

A Transformação Fracionária Linear (LFT) é conhecida na teoria de variáveis complexas³ como um operador que mapeia a função $F: \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, na forma

$$F(s) = \frac{a + bs}{c + ds} \quad (1)$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. A forma em (1) é chamada de LFT escalar. Se $c \neq 0$ então $F(s)$ pode ser rescrita como

$$F(s) = \alpha + \beta s(1 - \gamma s)^{-1} \quad (2)$$

Supondo

$$\alpha + \beta s(1 - \gamma s)^{-1} = (\alpha - \alpha\gamma s + \beta s)(1 - \gamma s)^{-1}$$

pode ser estabelecida a relação entre (1) e (2) a partir de: $a = \alpha$, $b = \beta - \alpha\gamma$, $c = 1$, $d = -\gamma$, para alguns $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

A Transformação Fracionária Linear em (1) pode ser generalizada para o caso matricial, com as matrizes complexas:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(p_1+p_2) \times (q_1+q_2)}, \quad (3)$$

$$\Delta_l \in \mathbb{C}^{(q_2 \times p_2)} \text{ e } \Delta \in \mathbb{C}^{(q_1 \times p_1)}.$$

A Transformação Fracionária Linear, $\mathcal{F}(M, \bullet)$ é dividida em dois tipos: inferior e superior. A LFT inferior das matrizes M e Δ_l ,

$$\mathcal{F}_l(M, \Delta_l): \mathbb{C}^{q_2 \times p_2} \mapsto \mathbb{C}^{q_1 \times p_1}$$

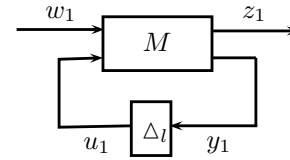
pode ser definida como:

$$\mathcal{F}_l(M, \Delta_l) \triangleq M_{11} + M_{12} \Delta_l (I - M_{22} \Delta_l)^{-1} M_{21} \quad (4)$$

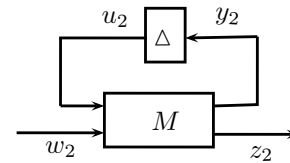
supondo que $(I - M_{22} \Delta_l)^{-1}$ existe. E de forma semelhante com a LFT inferior, é definida a LFT superior (Doyle et al., 1991).

A matriz M nas LFT inferior e superior mostradas anteriormente, é chamada de matriz de coeficientes. Na Figura 1, são apresentadas graficamente a LFT inferior (Figura: a) e LFT superior (Figura: b).

³O conjunto das variáveis complexas é denotado por: $\mathbb{C}$



(a) LFT Inferior.



(b) LFT Superior.

Figura 1: Diagramas LFT.

A LFT inferior na Figura 1(a), representa o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} w_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ u_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$u_1 = \Delta_l y_1$$

Pode-se obter a relação entre as entradas e as saídas da Figura 1(a), como é apresentado a seguir:

A partir de (5), tem-se a saída z_1 e a entrada y_1

$$\begin{aligned} z_1 &= M_{11}w_1 + M_{12} \Delta_l y_1 \\ y_1 &= M_{21}w_1 + M_{22} \Delta_l y_1 \end{aligned}$$

isolando y_1

$$y_1 = (I - M_{22} \Delta_l)^{-1} M_{21} w_1$$

substituindo y_1 na equação de z_1 tem-se

$$z_1 = [M_{11} + M_{12} \Delta_l (I - M_{22} \Delta_l)^{-1} M_{21}] w_1$$

Analogamente pode-se tratar $\mathcal{F}_l(M, \Delta_l) \triangleq z_1/w_1$.

3 Sistemas Lineares com Parâmetros Variantes

A seguir é feita uma breve descrição de um sistema LPV (Shamma and Athans, 1991)

Define-se um sistema LPV como um sistema linear com parâmetros variantes no qual as matrizes são funções fixas de algum vetor de parâmetros dado como:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A(\delta_k)x_k + B(\delta_k)u_k \\ y_k &= C(\delta_k)x_k + D(\delta_k)u_k \end{aligned} \quad (6)$$

com $k = 1, 2, \dots$

onde $\delta_k \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de parâmetros, $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ a entrada, $y \in \mathbb{R}^l$ a saída⁴. Algumas das suposições mais comuns sobre a forma na qual entra δ_k no sistema de matrizes, são:

⁴O conjunto das variáveis reais é denotado por: $\mathbb{R}$

1. Dependência afim ao parâmetro (LPV-A)⁵: Considere a matriz A em (6) como:

$$A = [A_0 \quad A_1 \quad \dots \quad A_p]$$

e δ_k em (6), sendo:

$$\delta_k = \delta_{i,k} = [1 \quad \delta_{1,k} \quad \dots \quad \delta_{p,k}]'$$

com $i = 1, 2, \dots, p$, que corresponde à i -ésima componente do vetor de parâmetros no instante k .

Então, $A(\delta_{i,k})$ pode ser expresso como:

$$A(\delta_{i,k}) = A_0 + A_1\delta_{1,k} + \dots + A_p\delta_{p,k} \quad (7)$$

e similarmente para as matrizes B C D . A forma em (7), é geralmente conhecida como dependência de parâmetro polinomial generalizada.

2. Dependência afim ao parâmetro na entrada (LPV-IA)⁶: Esta é uma classe particular de LPV-A na qual apenas as matrizes B e D são consideradas como dependentes dos parâmetros variantes. E as matrizes A e C são supostas como constantes. Ou seja: $A = A_0$, $C = C_0$ e $B(\delta_k)$, $C(\delta_k)$.
3. Dependência de parâmetro LFT (LPV-LFT)⁷: Neste caso a planta é suposta como sendo constituída como uma interligação por realimentação da forma:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_0w_k + B_1u_k \\ z_k &= C_0x_k + D_{00}w_k + D_{01}u_k \\ y_k &= C_1x_k + D_{10}w_k + D_{11}u_k \end{aligned} \quad (8)$$

com vetor de parâmetros :

$$w_k = \Delta_k z_k \quad (9)$$

onde w e $z \in \mathbb{R}^r$, $r = r_1 + \dots + r_p$, e

$$\Delta_k = \text{diagonal}(\delta_{1,k}I_{r_1}, \dots, \delta_{p,k}I_{r_p}) \quad (10)$$

O modelo LPV-LFT é detalhado na Seção 4.3.

4 Modelo Afim em Espaço de Estado com Parâmetros Variantes via LFT

4.1 Realização Contínua LTI

A LFT é usada para estabelecer a relação entre as matrizes de transferência e a equação de estado contínua apresentada como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (11)$$

⁵“LPV-A” do inglês “Affine parameter dependence”
⁶“LPV-IA” do inglês “Input-affine parameter dependence”
⁷“LPV-LFT” do inglês “LFT Parameter Dependence”

Usando a definição da LFT superior e tomando M como

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad e \quad \frac{1}{s}I = \Delta$$

fazendo o produto $s^{-1}I$ com $(I - As^{-1})^{-1}$ e reduzindo os termos semelhantes, tem-se a matriz de transferência associada com (11) dada como

$$G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B = \mathcal{F}_u \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \frac{1}{s}I \right). \quad (12)$$

A equação em (12) é uma LFT superior. Na Figura 2, é apresentada uma equivalência entre a LFT superior que descreve as matrizes de transferência a partir da realização em espaço de estado LTI da Figura 1b.

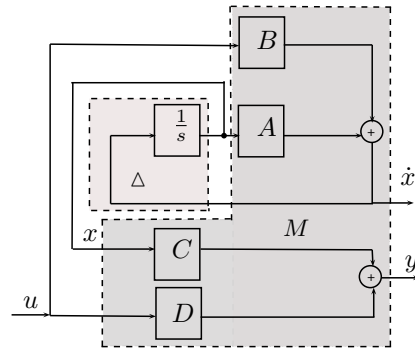


Figura 2: Diagrama de um sistema LTI via LFT.

4.2 Realização Discreta LTI

A equação em espaço de estado discreta apresentada a seguir

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k \end{aligned} \quad (13)$$

pode ser representada como uma LFT fazendo $\Delta = z^{-1}I$,

$$G(z) = D + C(zI - A)^{-1}B =: \mathcal{F}_u \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \Delta \right). \quad (14)$$

4.3 Realização Contínua LPV

Nesta seção é considerado um caso especial dos modelos em espaço de estado e a respectiva representação destes modelos via LFT em relação à matriz de parâmetros variantes, de forma que estas variações entrem no sistema em malha fechada. A construção básica destes modelos é realizada inserindo nos componentes variações paramétricas como apresenta-se a seguir:

Considere o sistema linear com δ_i variações paramétricas e realização

$$G_\delta(s) = \left[\frac{A_0 + \sum_{i=1}^j \delta_i \hat{A}_i}{C_0 + \sum_{i=1}^j \delta_i \hat{C}_i} \middle| \frac{B_0 + \sum_{i=1}^j \delta_i \hat{B}_i}{D_0 + \sum_{i=1}^j \delta_i \hat{D}_i} \right] \quad (15)$$

onde $A, \hat{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B, \hat{B}_i \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $C, \hat{C}_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$, $D, \hat{D}_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$.

Os termos A_0, B_0, C_0, D_0 em (15), são interpretados como o sistema nominal $G(s)$. As matrizes $\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{D}_i$ são o conjunto consequência da i ésima variação paramétrica δ_i na equação de estado. Dita variação, pode ser especificada dentro de um intervalo de $[-1 \ 1]$.

A seguir   apresentada a realização do sistema LPV via LFT. Nesta abordagem as variações dos parâmetros podem ser representadas como um ganho de realimentação, como se mostra na Figura 3.

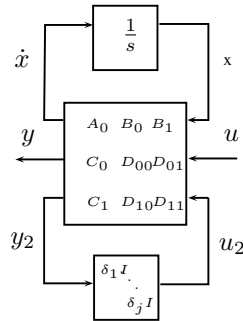


Figura 3: Diagrama LFT de Sistema LPV.

Para a realização da Figura 3, considere a matriz de transferência $G_\delta(s) = \mathcal{F}_u(M_\delta, \frac{1}{s}I)$ onde

$$M_\delta \triangleq \begin{bmatrix} A_0 + \sum_{i=1}^j \delta_i \hat{A}_i & B_0 + \sum_{i=1}^j \delta_i \hat{B}_i \\ C_0 + \sum_{i=1}^j \delta_i \hat{C}_i & D_0 + \sum_{i=1}^j \delta_i \hat{D}_i \end{bmatrix}$$

e a matriz⁸

$$\Delta = \text{diag}\{\delta_1 I \dots \delta_j I\}.$$

sendo que M_δ pode-se escrever também como:

$$M_\delta = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^j \delta_i \begin{bmatrix} \hat{A}_i & \hat{B}_i \\ \hat{C}_i & \hat{D}_i \end{bmatrix}$$

Agora suponha a matriz P_i com posto q_i

$$P_i \triangleq \begin{bmatrix} \hat{A}_i & \hat{B}_i \\ \hat{C}_i & \hat{D}_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+n_y) \times (n+n_u)}$$

assim, pode-se reescrever:

$$\delta_i P_i = \begin{bmatrix} L_i \\ W_i \end{bmatrix} [\delta_i I_{q_i}] \begin{bmatrix} R_i \\ Z_i \end{bmatrix}',$$

e M_δ como

$$M_\delta = \overbrace{\begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix}}^{M_{11}} + \overbrace{\begin{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} L_1 \dots L_j \\ W_1 \dots W_j \end{bmatrix}}^{M_{12}} \begin{bmatrix} \delta_1 I_{q_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_j I_{q_j} \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} R_1 \dots R_j \\ Z_1 \dots Z_j \end{bmatrix}'}^{M_{21}} \end{bmatrix}}^{\Delta} \quad (16)$$

⁸Com I de tamanho apropriado

Com Δ e M_δ , é parametrizado o sistema em função dos parâmetros variantes como uma LFT, ou seja

$$M_\delta = \mathcal{F}_l \left(\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & 0 \end{bmatrix}, \Delta \right)$$

As matrizes M_{12} e M_{21} em (16), podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} [L_1 \dots L_j] &= B_1 \\ [W_1 \dots W_j] &= D_{01} \\ [R_1 \dots R_j]' &= C_1 \\ [Z_1 \dots Z_j]' &= D_{10} \\ 0 &= D_{11} \end{aligned}$$

e a LFT do sistema contínuo como:

$$G(\Delta) = \mathcal{F}_u \left(\mathcal{F}_l \left(\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & 0 \end{bmatrix}, \Delta \right), \frac{1}{s}I \right).$$

5 Discretização de Sistemas LPV via LFT

Suponha que um sistema contínuo LPV resulte da operação em diversos pontos de sistemas LTI. Sua discretização via LFT pode ser realizada com o seguinte procedimento.

A relação entre a frequência complexa s e a frequência discreta z é dada por:

$$s = \frac{z+1}{z-1} \quad (17)$$

A representação de um sistema contínuo em espaço de estado é dada pela LFT $\mathcal{F}_u(M, \frac{1}{s}I)$. $1/s$ pode ser expresso em função da inversa da Equação (17), isto é obtendo a LFT $\mathcal{F}_l(N, z^{-1}I)$ com:

$$N = \begin{bmatrix} I & \sqrt{2}I \\ -\sqrt{2}I & -I \end{bmatrix}$$

e $\Delta = z^{-1}I$. Portanto

$$\mathcal{F}_l(N, z^{-1}I) = \frac{1}{s} = I - \sqrt{2}I z^{-1} (I + z^{-1}I)^{-1} \sqrt{2}I.$$

Agora considere o sistema contínuo:

$$G(s) = \mathcal{F}_u \left(M, \frac{1}{s}I \right) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Fazendo $\mathcal{F}_u(M, \mathcal{F}_l(N, z^{-1}I))$ tem-se o correspondente sistema de matrizes discreto dado como:

$$\tilde{G} = \mathcal{F}_l(M, \frac{z-1}{z+1}I) = \mathcal{F}_l(\tilde{M}, z^{-1}I)$$

sendo que $\tilde{M}$ pode ser obtido usando a produto estrela (Zhou et al., 1996) como:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z \end{bmatrix} = \tilde{M} \begin{bmatrix} w_1 \\ w \end{bmatrix} \quad (18)$$

temos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,9770 & -0,0107 \\ 1,9770 & 0,9893 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1,4014 \\ 1,4014 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0,0163 & 0,0075 \\ -1,3979 & 0,0075 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} -0,9909 \\ -0,9909 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

e para $\delta_m = -0,0086$ temos:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0,9770 & -0,0106 \\ 1,9770 & 0,9894 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1,3956 \\ 1,3956 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0,0163 & 0,0075 \\ -1,3980 & 0,0075 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} -0,9868 \\ -0,9868 \end{bmatrix}$$

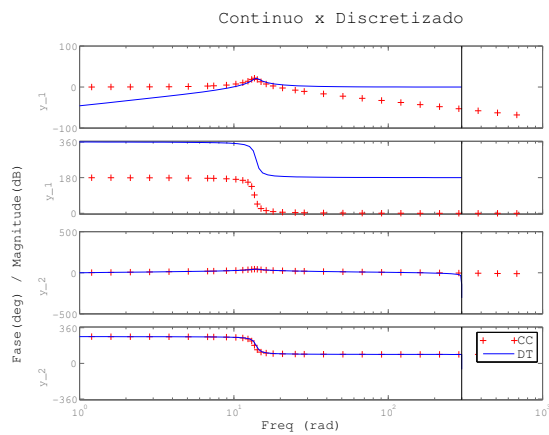


Figura 5: Diagrama de Bode Modelo Local Discretizado para $\delta_m = -0,0086$.

Para múltiplos modelos locais discretizados em torno a cada δ_m , é apresentado o diagrama de Bode da Figura 6. Aspectos relacionados ao tempo de amostragem e   discretização exata podem ser vistos em (Tóth et al., 2012), (Apkarian, 1997)

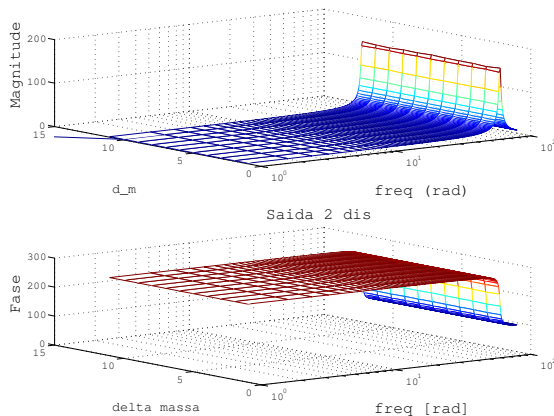


Figura 6: Diagrama de Bode Modelo Local Discretizado.

7 Conclusões

Neste trabalho é apresentado um procedimento para discretizar sistemas LPV supondo estes sistemas como um conjunto de sistemas LTI ao redor de um ponto de operação, o qual permite o uso da relação entre as frequências continua s e discreta z .

A abordagem aqui apresentada tem uma interessante característica devido à forma LPV-LFT em espaço de estado. Isto é que as matrizes de estado (A, B, C, D) e (A_i, B_i, C_i, D_i) no modelo LPV-LFT contínuo são inicialmente independentes dos parâmetros; já que a estrutura da LFT inclui os parâmetros como um ganho de realimentação. Dita característica do modelo, permite discretizar as realizações de forma aproximada, tendo por suposto de que os parâmetros ao redor de um ponto de operação não mudam as condições de estabilidade dos modelos locais.

Outra vantagem do procedimento é que a discretização aproximada pode ser aplicada a modelos com múltiplas entradas e múltiplas saídas.

Referências

- Apkarian, P. (1997). On the discretization of lmi-synthesized linear parameter-varying controllers, *Automatica* **33**(4): 655 – 661.
- Casella, F. and Lovera, M. (2008). Lpv lft modeling and identification: overview, synergies and a case study, *2008 IEEE International Conference on Computer-Aided Control Systems*, pp. 852–857.
- Doyle, J., Packard, A. and Zhou, K. (1991). Review of lfts, lmis, and mu; *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control, 1991.*, pp. 1227–1232 vol.2.
- Packard, A. (1994). Gain scheduling via linear fractional transformations, *Systems & Control Letters* **22**(2): 79 – 92.
- Shamma, J. S. and Athans, M. (1991). Guaranteed properties of gain scheduled control for linear parameter-varying plants, *Automatica* **27**(3): 559 – 564.
- Tóth, R., Lovera, M., Heuberger, P. S. C., Corno, M. and den Hof, P. M. J. V. (2012). On the discretization of linear fractional representations of lpv systems, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **20**(6): 1473–1489.
- Zhou, K., Doyle, J. and Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control*, Feher/Prentice Hall Digital and, Prentice Hall.