

MÉTODO RELAXADO PARA IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS COM DADOS NO DOMÍNIO DO TEMPO E BASES DE FUNÇÕES RACIONAIS

RICARDO SCHUMACHER*, GUSTAVO H. C. OLIVEIRA*

**Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade Federal do Paraná (UFPR)
Curitiba, Paraná, Brasil*

Emails: schumacher.ric@gmail.com, gustavo@eletrica.ufpr.br

Abstract— System identification using linear models formed by rational basis functions (RBFs) plays an important role in system macromodeling. Within such context, this paper proposes a relaxed iterative method for system identification based on time-domain data. Such relaxation allows the unit value constant of the previously proposed (time-domain) approaches to become a free variable. When compared with the classical Time-Domain Vector Fitting (TD-VF) technique, the results contained in this paper show that the proposed relaxed method can present advantages in terms of model accuracy, convergence and condition number of the iterative algorithm. Such results are based on the identification of a power system and consider models formed by two different RBFs: pole-residue type functions as well as Takenaka-Malmquist orthonormal functions.

Keywords— System Macromodeling, Modeling and Transient Analysis of Power Systems, Models Formed by Rational Basis Functions, Relaxed Approaches.

Resumo— A identificação de sistemas usando modelos lineares formados por bases de funções racionais (BFRs) desempenha um papel fundamental na macromodelagem de sistemas. Neste contexto, este trabalho propõe um método iterativo relaxado que visa a identificação de sistemas com dados no domínio do tempo. Tal relaxamento permite que a constante de valor unitário presente nas formulações propostas anteriormente (no domínio do tempo) torne-se uma variável livre para assumir diferentes valores. Quando comparada com a tradicional técnica *Time-Domain Vector Fitting* (TD-VF), os resultados contidos neste trabalho mostram que o método relaxado aqui proposto pode apresentar vantagens em termos de precisão dos modelos, convergência e condicionamento numérico do processo iterativo. Tais resultados estão baseados na identificação de um sistema elétrico de potência e levam em conta modelos formados por duas diferentes BFRs: funções do tipo polo-resíduo e também as funções ortonormais de Takenaka-Malmquist.

Palavras-chave— Macromodelagem de Sistemas, Modelagem e Análise Transitória de Sistemas Elétricos de Potência, Modelos Formados por Bases de Funções Racionais, Abordagens Relaxadas.

1 Introdução

Na macromodelagem de sistemas, o problema de se modelar um sistema (excessivamente) complexo é resolvido, dividindo-se e modelando-se de forma independente, sub-blocos e/ou dispositivos internos a este sistema. Neste contexto, a identificação de sistemas usando modelos lineares formados por bases de funções racionais (BFRs) tem desempenhado, especialmente na última década, um papel fundamental para a construção de algoritmos capazes de estimar modelos que atendem requisitos como passividade, estabilidade, causalidade e reciprocidade (Grivet-Talocia and Gustavsen, 2016).

Todavia, a estimação de modelos BFRs envolve, a princípio, a minimização de uma função objetivo não-linear em relação às suas variáveis. Visando tratar desta questão, abordagens baseadas nas iterações de Sanathanan-Koerner/Steiglitz-McBride (SK/SM) (Sanathanan and Koerner, 1963; Steiglitz and McBride, 1965) aproximam a função objetivo não-linear inicial por uma sequência de funções objetivo lineares, que são então facilmente minimizadas pelo método dos mínimos quadrados.

A primeira técnica baseada nas iterações SK/SM para estimação de modelos BFRs, denominada de *Vector Fitting* (VF), foi proposta no

domínio da frequência por Gustavsen and Semlyen (1999) para modelos formados por funções do tipo polo-resíduo. Com o objetivo de melhorar a estabilidade numérica e a convergência do processo iterativo, Deschrijver, Haegeman and Dhaene (2007) propuseram então a técnica *Orthonormal Vector Fitting* (OVF) que, por sua vez, baseia-se na substituição das funções do tipo polo-resíduo pelas chamadas funções ortonormais de Takenaka-Malmquist. Também com o objetivo de melhorar a convergência do método, Gustavsen (2006) propôs ainda uma redefinição da função auxiliar presente nas iterações. Tal redefinição deu origem aos métodos VF e OVF relaxados (ou VFR e OVFR, respectivamente) (Deschrijver, Gustavsen and Dhaene, 2007).

Apesar do evidente sucesso na aplicação de abordagens SK/SM para estimação de modelos BFRs no domínio da frequência, abordagens similares para identificação com dados no domínio do tempo permanecem ainda pouco exploradas. Recentemente, Schumacher and Oliveira (2015) propuseram um método descrito em tempo discreto que permite estimar modelos formados tanto por funções do tipo polo-resíduo quanto pelas funções ortonormais de Takenaka-Malmquist. Conforme mostram os autores deste trabalho, tal

método pode apresentar vantagens (em termos de precisão dos modelos e convergência do processo iterativo) em relação   tradicional técnica *Time-Domain Vector Fitting* (TD-VF) proposta por Grivet-Talocia (2003), cuja formulação permite o uso apenas de funções do tipo polo-resíduo.

Ressalta-se ainda que ambos os métodos citados no parágrafo anterior tratam-se de abordagens não-relaxadas.

Com base nestas considerações, o presente trabalho tem por objetivo relaxar, a partir de uma redefinição da função auxiliar presente no processo iterativo, a formulação proposta por Schumacher and Oliveira (2015). Conforme será visto, tal relaxamento permite que a constante de valor unitário inicialmente presente na função auxiliar em (Schumacher and Oliveira, 2015) torne-se uma variável livre para assumir diferentes valores. Vale ressaltar que o relaxamento proposto neste trabalho difere-se do relaxamento realizado no domínio da frequência, uma vez que aqui uma descrição em tempo discreto é utilizada.

Este trabalho está organizado conforme segue. Na Seção 2, a formulação padrão proposta em (Schumacher and Oliveira, 2015)   detalhadamente revista. Na Seção 3, é proposto então o relaxamento desta formulação padrão, dando-se assim origem   formulação relaxada. Na Seção 4, a identificação de um sistema elétrico de potência é utilizada para se comparar a formulação agora relaxada com a tradicional técnica TD-VF proposta por Grivet-Talocia (2003). Por fim, a Seção 5 ressalta as conclusões deste trabalho.

2 Formulação iterativa padrão

No domínio do tempo discreto, a relação entre a entrada escalar $u_0(k)$ e a saída escalar $y_0(k)$ de um sistema linear invariante no tempo pode ser descrita de acordo com a seguinte expressão:

$$y_0(k) = G_0(q)u_0(k) + v(k), \quad (1)$$

onde $v(k)$ representa o ruído aditivo presente na saída $y_0(k)$ e q denota o operador avanço, $q^j u_0(k) = u_0(k+j)$, $j \in \mathbb{Z}$.

O desafio de identificação tratado neste trabalho consiste em encontrar um modelo BFR cujo comportamento dinâmico seja suficientemente próximo do comportamento dinâmico apresentado por $G_0(q)$. Tal modelo deve ter ainda uma estrutura do tipo

$$G(q, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i \Phi_i(q, \mathbf{a}), \quad (2)$$

onde c_0 e $\{c_i\}$ são coeficientes a serem estimados e $\mathbf{a}$ representa um conjunto de n polos que parametriza as funções racionais $\{\Phi_i(q, \mathbf{a})\}$. Tais polos têm de ser estimados. Destaca-se ainda que $\{\Phi_i(q, \mathbf{a})\}$ pode ser um conjunto formado tanto por funções do tipo polo-resíduo quanto pelas funções ortonormais de Takenaka-Malmquist (Schumacher and Oliveira, 2015).

O problema de otimização associado   estimação dos parâmetros da estrutura em (2)  , em princípio, não-linear em relação às suas variáveis, uma vez que os polos encontram-se presentes nos denominadores das funções racionais.

Neste contexto, abordagens baseadas nas iterações de SK/SM estimam $\mathbf{a}$ (iterativamente) por meio de uma estrutura de modelo genérica do tipo

$$\bar{G}(q, \theta, \bar{\mathbf{a}}) = \frac{B(q, \theta, \bar{\mathbf{a}})}{F(q, \theta, \bar{\mathbf{a}})} = \frac{B(q, \theta, \bar{\mathbf{a}})/\hat{F}(q, \bar{\mathbf{a}})}{F(q, \theta, \bar{\mathbf{a}})/\hat{F}(q, \bar{\mathbf{a}})}, \quad (3)$$

onde $\bar{\mathbf{a}}$ é um conjunto pré-especificado de n polos,¹

$$\frac{B(q, \theta, \bar{\mathbf{a}})}{\hat{F}(q, \bar{\mathbf{a}})} = r_0 + \sum_{i=1}^n r_i \Phi_i(q, \bar{\mathbf{a}}), \quad (4)$$

$$\frac{F(q, \theta, \bar{\mathbf{a}})}{\hat{F}(q, \bar{\mathbf{a}})} = 1 + \sum_{i=1}^n d_i \Phi_i(q, \bar{\mathbf{a}}). \quad (5)$$

A partir de um conjunto de amostras discretizadas no domínio do tempo $\{y_0(k), u_0(k)\}$, $k = 1, \dots, N$, os coeficientes

$$\theta = [r_0 \quad \dots \quad r_n \quad d_1 \quad \dots \quad d_n]^T$$

da estrutura em (3) são então estimados baseando-se na minimização do erro quadrático médio (EQM) entre a saída do sistema $y_0(k)$ e a saída da estrutura definida por $y(k, \theta, \bar{\mathbf{a}}) = \bar{G}(q, \theta, \bar{\mathbf{a}})u_0(k)$, ou seja, baseando-se na minimização da função objetivo não-linear:

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_0(k) - \bar{G}(q, \theta, \bar{\mathbf{a}})u_0(k))^2, \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{F(q, \theta, \bar{\mathbf{a}})}{\hat{F}(q, \bar{\mathbf{a}})} y_0(k) - \frac{B(q, \theta, \bar{\mathbf{a}})}{\hat{F}(q, \bar{\mathbf{a}})} u_0(k) \right)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

O valor de θ que minimiza $V(\theta)$ será denotado por

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} V(\theta). \quad (7)$$

Note-se que o problema de otimização que busca estimar θ^*  , inicialmente, não-linear em relação às variáveis em θ , uma vez que θ está presente no denominador de $V(\theta)$. Para resolver esta questão, o seguinte procedimento baseado nas iterações SK/SM é utilizado:

$$\hat{\theta}^{(t)} = \arg \min_{\theta} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{F(q, \theta, \mathbf{a}^{(t)})}{\hat{F}(q, \mathbf{a}^{(t)})} y_0(k) - \frac{B(q, \theta, \mathbf{a}^{(t)})}{\hat{F}(q, \mathbf{a}^{(t)})} u_0(k) \right)^2, \quad (8)$$

ou, de forma equivalente,

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^{(t)} &= \arg \min_{\theta} \sum_{k=1}^N \left(\left(1 + \sum_{i=1}^n d_i \Phi_i(q, \mathbf{a}^{(t)}) \right) y_0(k) - \left(r_0 + \sum_{i=1}^n r_i \Phi_i(q, \mathbf{a}^{(t)}) \right) u_0(k) \right)^2. \end{aligned} \quad (9)$$

¹Salienta-se aqui que a Equação (5) define a função auxiliar presente nesta formulação padrão.

Em (8) e (9), $\hat{\theta}^{(t)}$ é a estimativa para θ^* obtida na iteração t e $\mathbf{a}^{(t)}$ representa o conjunto pré-especificado de polos para o qual $\hat{\theta}^{(t)}$ é calculado.

Note-se que a Equação (9) descreve uma sequência iterativa de problemas de otimização que são agora lineares na variável θ . Tal equação pode ser ainda reescrita na forma compacta

$$\hat{\theta}^{(t)} = \arg \min_{\theta} \sum_{k=1}^N \left(y_0(k) - \mathbf{m}^T(k, \mathbf{a}^{(t)}) \theta \right)^2, \quad (10)$$

cujas solução analítica é então dada por:

$$\hat{\theta}^{(t)} = \left[\mathbf{M}^T(\mathbf{a}^{(t)}) \mathbf{M}(\mathbf{a}^{(t)}) \right]^{-1} \mathbf{M}^T(\mathbf{a}^{(t)}) \mathbf{y}, \quad (11)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^T(\mathbf{a}^{(t)}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{m}(1, \mathbf{a}^{(t)}) & \cdots & \mathbf{m}(N, \mathbf{a}^{(t)}) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{y}^T &= \begin{bmatrix} y_0(1) & \cdots & y_0(N) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{m}^T(k, \mathbf{a}^{(t)}) &= \begin{bmatrix} u_0(k) & \tilde{\mathbf{u}}^T(k) & -\tilde{\mathbf{y}}^T(k) \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{u}}^T(k) &= \begin{bmatrix} \Phi_1(q, \mathbf{a}^{(t)}) & \cdots & \Phi_n(q, \mathbf{a}^{(t)}) \end{bmatrix} u_0(k), \\ \tilde{\mathbf{y}}^T(k) &= \begin{bmatrix} \Phi_1(q, \mathbf{a}^{(t)}) & \cdots & \Phi_n(q, \mathbf{a}^{(t)}) \end{bmatrix} y_0(k). \end{aligned}$$

A formulação iterativa padrão se resume assim em resolver a Equação (11) iterativamente.

Os termos $\{\mathbf{m}^T(k, \mathbf{a}^{(t)})\}$ presentes na matriz $\mathbf{M}(\mathbf{a}^{(t)})$ podem ser facilmente obtidos usando-se recursivamente as seguintes equações de estado:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}(k) &= \mathbf{A} \tilde{\mathbf{u}}(k-1) + \mathbf{B} u_0(k-1), \\ \tilde{\mathbf{y}}(k) &= \mathbf{A} \tilde{\mathbf{y}}(k-1) + \mathbf{B} y_0(k-1), \end{cases} \quad (12)$$

onde $\mathbf{A}(\mathbf{a}^{(t)}) \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$ e $\mathbf{B}(\mathbf{a}^{(t)}) \in \mathbb{R}^{(n \times 1)}$ são matrizes definidas de tal forma que as funções de transferência da entrada (ou saída) para os estados são dadas pelas próprias funções racionais que compõem o modelo, ou seja,

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}(k)}{u_0(k)} = \frac{\tilde{\mathbf{y}}(k)}{y_0(k)} = (\mathbf{qI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \Phi_1(q, \mathbf{a}^{(t)}) \\ \vdots \\ \Phi_n(q, \mathbf{a}^{(t)}) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Note-se que a dependência de $\mathbf{A}(\mathbf{a}^{(t)})$, $\mathbf{B}(\mathbf{a}^{(t)})$, $\tilde{\mathbf{u}}(k, \mathbf{a}^{(t)})$ e $\tilde{\mathbf{y}}(k, \mathbf{a}^{(t)})$ nos polos em $\mathbf{a}^{(t)}$ foi omitida nas equações anteriores para facilitar a notação. Note-se também a partir da Equação (13) que $\mathbf{A}(\mathbf{a}^{(t)})$ e $\mathbf{B}(\mathbf{a}^{(t)})$ definem a BFR utilizada no modelo, ou seja, o conjunto $\{\Phi_i(q, \mathbf{a}^{(t)})\}$. Schumacher and Oliveira (2015) apresentam uma explicação detalhada sobre como essas duas matrizes devem ser construídas para que o conjunto $\{\Phi_i(q, \mathbf{a}^{(t)})\}$ seja dado por funções do tipo polo-resíduo, ou ainda, pelas funções ortonormais de Takenaka-Malmquist.

A definição do conjunto de polos $\mathbf{a}^{(t)}$, por sua vez, tem por objetivo tornar a sequência de problemas lineares de otimização em (8) próxima ao problema inicialmente não-linear definido em (7). Para tanto, define-se $\mathbf{a}^{(t)}$ de forma a se satisfazer:

$$\hat{F}(q, \mathbf{a}^{(t)}) = F(q, \hat{\theta}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t-1)}). \quad (14)$$

A condição acima é satisfeita fazendo-se com que as raízes dos dois polinômios sejam iguais. Em

outras palavras, os polos em $\mathbf{a}^{(t)}$ devem ser iguais às raízes de $F(q, \hat{\theta}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t-1)})$, ou seja,

$$\mathbf{a}^{(t)} = \text{autovalores} \left(\mathbf{A}(\mathbf{a}^{(t-1)}) - \mathbf{B}(\mathbf{a}^{(t-1)}) \mathbf{d}(\hat{\theta}^{(t-1)}) \right), \quad (15)$$

onde² $\mathbf{d}(\hat{\theta}^{(t-1)}) = \begin{bmatrix} d_1^{(t-1)} & \cdots & d_n^{(t-1)} \end{bmatrix}$. O lado direito da Equação (15) representa um meio para se calcular as raízes de $F(q, \hat{\theta}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t-1)})$ a partir da realização em espaço de estados para a expressão $F(q, \hat{\theta}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t-1)}) / \hat{F}(q, \mathbf{a}^{(t-1)})$, obtida quando $\mathbf{A}(\mathbf{a}^{(t-1)})$ e $\mathbf{B}(\mathbf{a}^{(t-1)})$ são usadas na definição da sua equação de estado. Para mais detalhes, ver (Grivet-Talocia and Gustavsen, 2016).

Para finalizar esta seção, discute-se agora a convergência desta formulação padrão.

Assumindo-se que $\hat{\theta}^{(t)}$ e $\mathbf{a}^{(t)}$ convergem para $\hat{\theta}$ e $\hat{\mathbf{a}}$ na iteração $t = c$, então $\hat{\theta}^{(c)} = \hat{\theta}^{(c+1)} = \hat{\theta}$ e $\mathbf{a}^{(c)} = \mathbf{a}^{(c+1)} = \hat{\mathbf{a}}$. Portanto, pela Equação (14),

$$\begin{aligned} \hat{F}(q, \mathbf{a}^{(c+1)}) &= F(q, \hat{\theta}^{(c)}, \mathbf{a}^{(c)}) = \\ F(q, \hat{\theta}^{(c+1)}, \mathbf{a}^{(c+1)}) &= F(q, \hat{\theta}, \hat{\mathbf{a}}) = \hat{F}(q, \hat{\mathbf{a}}). \end{aligned} \quad (16)$$

Tendo como base estas equivalências, é fundamental observar a partir das Equações (3), (4) e (5), que o modelo obtido após a convergência das iterações tem a forma desejada em (2),

$$\bar{G}(q, \hat{\theta}, \hat{\mathbf{a}}) = \hat{r}_0 + \sum_{i=1}^n \hat{r}_i \Phi_i(q, \hat{\mathbf{a}}), \quad (17)$$

uma vez que

$$1 + \sum_{i=1}^n \hat{d}_i \Phi_i(q, \hat{\mathbf{a}}) = \frac{F(q, \hat{\theta}, \hat{\mathbf{a}})}{\hat{F}(q, \hat{\mathbf{a}})} = 1. \quad (18)$$

3 Formulação iterativa relaxada

Esta seção tem por objetivo relaxar a formulação padrão proposta na seção anterior. Tal relaxamento é obtido redefinindo-se a função auxiliar em (5) conforme segue

$$\frac{F(q, \theta_R, \bar{\mathbf{a}})}{\hat{F}(q, \bar{\mathbf{a}})} = d_0 + \sum_{i=1}^n d_i \Phi_i(q, \bar{\mathbf{a}}) = \sigma(q, \theta_R, \bar{\mathbf{a}}). \quad (19)$$

Dessa forma, a constante de valor unitário presente na função inicialmente definida em (5) torna-se uma variável livre para assumir diferentes valores. Os coeficientes da estrutura agora são:

$$\theta_R = \begin{bmatrix} r_0 & \cdots & r_n & d_0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}^T.$$

Com a definição de $\sigma(q, \theta_R, \bar{\mathbf{a}})$, as iterações dadas pela Equação (9) tornam-se

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_R^{(t)} &= \arg \min_{\theta} \sum_{k=1}^N \left(\left(d_0 + \sum_{i=1}^n d_i \Phi_i(q, \mathbf{a}^{(t)}) \right) y_0(k) \right. \\ &\quad \left. - \left(r_0 + \sum_{i=1}^n r_i \Phi_i(q, \mathbf{a}^{(t)}) \right) u_0(k) \right)^2. \end{aligned} \quad (20)$$

²Caso não exista nenhum conhecimento prévio aproximado acerca dos polos de $G_0(q)$ na primeira iteração, pode-se fazer $\mathbf{a}^{(0)} = \mathbf{0}$.

Entretanto, o problema associado a esta solução (em relação à solução descrita na formulação padrão da seção anterior) é que a expressão (20) permite que a solução trivial não desejada $\hat{\theta}_R^{(t)} = \mathbf{0}$ seja obtida.

Para tornar a solução trivial $\hat{\theta}_R^{(t)} = \mathbf{0}$ inviável, é possível restringir a função auxiliar $\sigma(q, \theta_R, \mathbf{a}^{(t)})$ de tal forma com que esta não seja anulada em (20). Analogamente ao realizado no tempo contínuo em (Deschrijver, Gustavsen and Dhaene, 2007), isto pode ser feito impondo-se que a soma dos valores reais $\Re\{\sigma(z_k = e^{j\omega_k}, \theta_R, \mathbf{a}^{(t)})\}$ calculada para um conjunto de frequências $\{\omega_k\}$ resulte em um valor não nulo³. Em particular, pode-se impor

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Re \left\{ d_0 + \sum_{i=1}^n d_i \Phi_i(e^{j\omega_k}, \mathbf{a}^{(t)}) \right\} = 1. \quad (21)$$

Uma vez que $\sigma(z_k = e^{j\omega_k}, \theta_R, \mathbf{a}^{(t)})$ é uma função em tempo discreto, então o intervalo de frequências $[0, \pi]$ carrega toda a informação presente na função. Assim, pode-se definir o conjunto de frequências $\{\omega_k\}$ a ser utilizado em (21) da seguinte maneira:

$$\omega_k = \frac{k\pi}{N}, \quad k = 1 \dots, N. \quad (22)$$

Note-se ainda que a restrição imposta em (21) não afeta a convergência do processo iterativo, uma vez que $\sigma(z_k = e^{j\omega_k}, \theta_R, \mathbf{a}^{(t)})$ torna-se igual a 1 (para todas as frequências) quando o algoritmo converge.

Levando-se em conta a presença do novo parâmetro d_0 no conjunto de equações, assim como da restrição imposta em (21), é possível verificar que a solução analítica para a formulação relaxada proposta é dada por:

$$\hat{\theta}_R^{(t)} = [\mathbf{M}_R^T(\mathbf{a}^{(t)}) \mathbf{M}_R(\mathbf{a}^{(t)})]^{-1} \mathbf{M}_R^T(\mathbf{a}^{(t)}) \mathbf{b}_R, \quad (23)$$

onde

$$\mathbf{M}_R(\mathbf{a}^{(t)}) = \begin{bmatrix} u(1) & \tilde{\mathbf{u}}^T(1) & -y(1) & -\tilde{\mathbf{y}}^T(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u(N) & \tilde{\mathbf{u}}^T(N) & -y(N) & -\tilde{\mathbf{y}}^T(N) \\ 0 & \mathbf{0}^T & 1 & \mathbf{v}^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_R = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix}^T,$$

$$v_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Re \{ \Phi_i(e^{j\omega_k}) \}. \quad (24)$$

Dessa forma, conclui-se que o relaxamento da formulação padrão é facilmente obtido substituindo-se a solução padrão em (11) pela solução em (23). Adicionalmente, as raízes de $F(q, \hat{\theta}_R^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t-1)})$ (conjunto de polos a ser utilizado na iteração t) são agora calculados a partir da expressão:

³ z denota a variável complexa da transformada Z

$$\mathbf{a}^{(t)} = \text{autovalores} \left(\mathbf{A}(\mathbf{a}^{(t-1)}) - \mathbf{B}(\mathbf{a}^{(t-1)}) \left[d_0^{(t-1)} \right]^{-1} \mathbf{d}(\hat{\theta}_R^{(t-1)}) \right). \quad (25)$$

Por fim, ressalta-se que os termos v_i presentes no vetor $\mathbf{v}$ podem ser facilmente obtidos com o auxílio da Equação (13), uma vez que

$$(e^{j\omega_k} \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \Phi_1(e^{j\omega_k}, \mathbf{a}^{(t)}) \\ \vdots \\ \Phi_n(e^{j\omega_k}, \mathbf{a}^{(t)}) \end{bmatrix}. \quad (26)$$

4 Resultados

O estudo de caso apresentado nesta seção tem como base o sistema de potência monofásico da Figura 1, composto por um cabo subterrâneo de 5km (comprimento) e três linhas de transmissão idênticas de 10km (comprimento). A geometria e os demais dados referentes às linhas de transmissão e ao cabo subterrâneo podem ser encontrados em (Ramirez, 2009).

A identificação desse sistema é avaliada considerando que o mesmo é alimentado por um degrau unitário de tensão, ou seja, considerando

$$u(t) = \begin{cases} 1V, & t \geq 0 \\ 0V, & t < 0 \end{cases} \quad (27)$$

A Figura 2 mostra a resposta da corrente de entrada $i(t)$ para este caso. Tal resposta foi obtida modelando-se a rede elétrica da Figura 1 por um “sistema equivalente dependente de frequência” no *software* EMTP-RV. Na simulação, usou-se um período de amostragem de $1\mu s$.

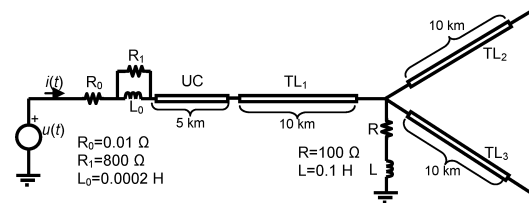


Figura 1: Sistema de Potência Monofásico.

Fonte: Ubolli and Gustavsen (2011).

No processo de estimação dos modelos, são consideradas apenas as primeiras 1000 amostras da simulação, tal que $\{y_0(k) = i(k), u_0(k) = u(k)\}$, $k = 1, \dots, 1000$, $k = 1 + t/T_s$. São utilizadas ainda 15 iterações e modelos de décima ordem ($n = 10$).

Para a formulação relaxada proposta neste trabalho, considera-se modelos formados tanto por funções do tipo polo-resíduo quanto pelas funções ortonormais de Takenaka-Malmquist. Por outro lado, a técnica TD-VF tradicional proposta por Grivet-Talocia (2003) permite o uso apenas de funções do tipo polo-resíduo. Dessa forma, no total, três técnicas são aqui comparadas:

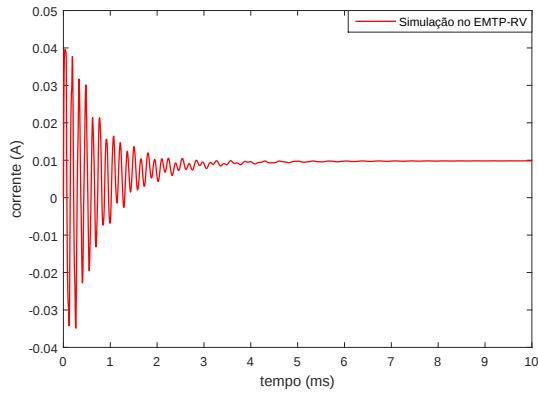


Figura 2: Resposta de corrente completa obtida no software EMTP-RV.

- técnica **tradicional** TD-VF. Utiliza exclusivamente em funções do tipo **polo-resíduo** (TRAD-FPR);
- formulação **relaxada** usando funções do tipo **polo-resíduo** (RELAX-FPR);
- formulação **relaxada** usando funções ortonormais de Takenaka-Malmquist (RELAX-FOTM).

Salienta-se ainda que, para as técnicas RELAX-FPR e RELAX-FOTM (descritas em tempo discreto), consideram-se modelos com polos iniciais em 0. Já para a técnica TRAD-FPR (descrita em tempo contínuo), considera-se um modelo com polos iniciais em -5 .

Para fins de comparação entre as técnicas, utiliza-se aqui o índice REQM (raiz quadrada do erro quadrático médio). Tais valores de REQMs foram calculados, a cada iteração, atribuindo-se à estrutura desejada em (2) a estimativa atual $\mathbf{a}^{(t)}$ para o conjunto de polos $\mathbf{a}$ e, em seguida, estimando-se os seus coeficientes. Tal estimativa pode ser facilmente obtida a partir da solução (11) considerando-se $\hat{\theta}^{(t)} = \hat{\mathbf{c}}^{(t)} = \begin{bmatrix} c_0^{(t)} & \dots & c_n^{(t)} \end{bmatrix}^T$ e fazendo-se $\mathbf{m}^T(k, \mathbf{a}^{(t)}) = \begin{bmatrix} u_0(k) & \tilde{\mathbf{u}}^T(k) \end{bmatrix}$ na construção da matriz $\mathbf{M}(\mathbf{a}^{(t)})$. Pela Equação (17) pode-se observar que, quando as estimativas convergem, $c_0^{(t)}$ e $\{c_i^{(t)}\}$ tendem à $\hat{r}_0$ e $\{\hat{r}_i\}$, respectivamente.

A Figura 3 mostra o índice REQM obtido para cada técnica durante o processo iterativo. É possível observar a partir desta figura que a técnica RELAX-FOTM converge com um menor número de iterações. Também é possível observar que as técnicas RELAX-FPR e RELAX-FOTM apresentam, após a convergência, modelos com um menor REQM. Um menor índice REQM indica que as saídas dos modelos RELAX-FPR e RELAX-FOTM encontram-se mais próximas da saída simulada $y_0(k) = i(k)$ (veja a Figura 4). A Figura 4 também mostra os erros de aproximação $y_0(k) - y(k, \hat{\theta}, \hat{\mathbf{a}})$ para cada modelo. Tais erros

foram multiplicados por 5 apenas para facilitar a visualização.

Já a Figura 5 mostra o condicionamento numérico da matriz $\mathbf{M}_R(\mathbf{a}^{(t)})$ obtido em cada iteração.⁴ É possível notar que as técnicas RELAX-FPR e RELAX-FOTM apresentam um melhor condicionamento numérico em relação à técnica TRAD-FPR, com destaque para o uso das FOTM neste contexto.

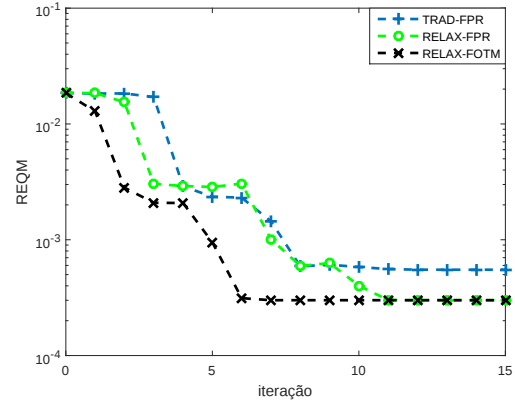


Figura 3: REQM no processo de estimação dos modelos.

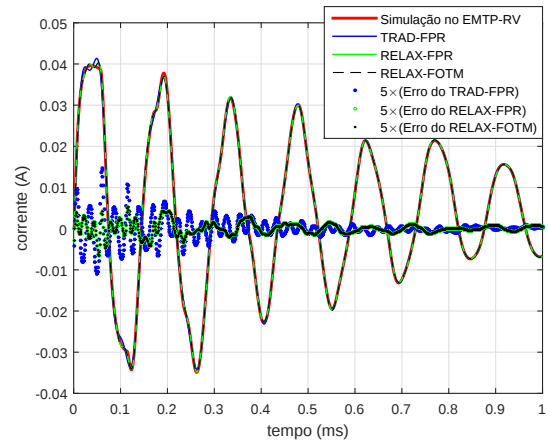


Figura 4: Saídas e erros dos modelos obtidos na última iteração (iteração 15).

5 Conclusões

Neste trabalho, foi proposto um método iterativo relaxado para identificação de sistemas no domínio do tempo. Tal formulação baseia-se em modelos formados por BFRs e nas iterações de SK/SM. O método relaxado proposto neste trabalho permite que a constante de valor unitário presente nas formulações propostas anteriormente (no domínio do

⁴Para fins de comparação, na técnica TRAD-FPR foi calculado o condicionamento numérico da matriz que compõe a sua respectiva solução analítica dos mínimos quadrados.

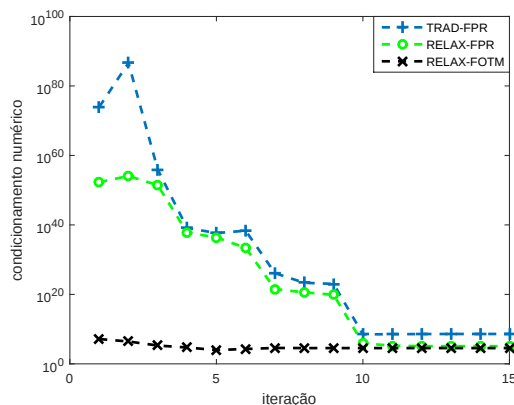


Figura 5: Condicionamento numérico no processo de estimação dos modelos.

tempo) torne-se uma variável livre para assumir diferentes valores. Quando comparada com a tradicional técnica TD-VF (TRAD-FPR), os resultados obtidos mostram que o método relaxado aqui proposto pode apresentar vantagens em termos de precisão dos modelos (menor (R)EQM), convergência (o método relaxado converge com um menor número de iterações) e condicionamento numérico (menor condicionamento numérico da matriz presente na solução analítica dos mínimos quadrados).

Agradecimentos

Os autores deste trabalho agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

Referências

- Deschrijver, D., Gustavsen, B. and Dhaene, T. (2007). Advancements in iterative methods for rational approximation in the frequency domain, *IEEE Transactions on Power Delivery* **22**(3): 1633 – 1642.
- Deschrijver, D., Haegeman, B. and Dhaene, T. (2007). Orthonormal vector fitting: A robust macromodeling tool for rational approximation of frequency domain responses, *IEEE Transactions on Advanced Packaging* **30**(2): 216 – 225.
- Grivet-Talocia, S. (2003). Package macromodeling via time-domain vector fitting, *Microwave and Wireless Components Letters, IEEE* **13**(11): 472 – 474.
- Grivet-Talocia, S. and Gustavsen, B. (2016). *Passive Macromodeling*, John Wiley and Sons.
- Gustavsen, B. (2006). Improving the pole relocating properties of vector fitting, *IEEE Tran-*

sactions on Power Delivery **21**(3): 1587 – 1592.

- Gustavsen, B. and Semlyen, A. (1999). Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting, *IEEE Transactions on Power Delivery* **14**(3): 1052 – 1061.
- Ramirez, A. (2009). Vector fitting-based calculation of frequency-dependent network equivalents by frequency partitioning and model-order reduction, *IEEE Transactions on Power Delivery* **24**(1): 410–415.
- Sanathanan, C. K. and Koerner, J. (1963). Transfer function synthesis as a ratio of two complex polynomials, *IEEE Transactions on Automatic Control* **8**(1): 56–58.
- Schumacher, R. and Oliveira, G. H. C. (2015). Uma nova abordagem *Vector Fitting* para identificação de sistemas com dados no domínio do tempo, *XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI 2015)*, pp. 283–288.
- Steiglitz, K. and McBride, L. E. (1965). A technique for the identification of linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **10**(4): 461–464.
- Ubolli, A. and Gustavsen, B. (2011). Comparison of methods for rational approximation of simulated time-domain responses: ARMA, ZD-VF, and TD-VF, *IEEE Transactions on Power Delivery* **26**(1): 279 – 288.