

LEVITADOR MAGNÉTICO DIDÁTICO CONTROLADO POR ARDUINO

THIAGO RAGOZO CONTIM*, BRUNO AUGUSTO ANGÉLICO†, ANSELMO BITTAR†

*Dept. de Eletrônica Automotiva, FATEC SOROCABA, Sorocaba, Brasil

†Dept. de Eng. de Telecomunicações e Controle

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brazil

Emails: thiago@contim.eng.br, angelico@lac.usp.br, anselmo@lac.usp.br

Abstract— This paper presents the development, modeling and control of a didactic magnetic Levitator. A digital PID controller is designed by the roots locus method directly in the z plane. The algorithm was embedded in an Arduino UNO platform, widely used in undergraduate academic projects in Electrical Engineering. The system is low cost and can be reproduced in teaching control laboratories. Simulation and experimental results are presented as an example of digital control application.

Keywords— Arduino, Digital Control, Magnetic Levitator, PID.

Resumo— Este artigo apresenta o desenvolvimento, modelagem e controle de um levitador magnético didático. Um controlador PID digital foi projetado pelo método do lugar das raízes diretamente no plano z . O algoritmo foi embarcado em uma plataforma Arduino UNO, amplamente utilizada em projetos acadêmicos de graduação em Engenharia Elétrica. O sistema é de baixo custo e pode ser reproduzido em laboratórios didáticos de controle. Resultados experimentais e de simulação são apresentados como exemplo de aplicação de controle digital.

Palavras-chave— Arduino, Controle Digital, Levitador Magnético, PID.

1 Introdução

Levitadores magnéticos são sistemas não lineares e naturalmente instáveis estudados com frequência em livros didáticos de Engenharia de Controle (Franklin et al., 2013; Castrucci et al., 2011).

Há vários trabalhos acadêmicos que consideram o levitador magnético como um sistema com grande potencial para o aprendizado de conceitos como modelagem e controle de sistemas dinâmicos. Em (Galvao et al., 2003) é apresentada uma forma simples de obtenção dos parâmetros do modelo linear de um levitador magnético, bem como o projeto de um compensador digital por avanço de fase. Uma solução muito interessante, do ponto de vista didático é apresentado em (Lilienkamp, 2004), onde um levitador magnético de baixo custo é desenvolvido no MIT (*Massachusetts Institute of Technology*). Como parte do projeto, alunos de graduação receberam kits e instruções de montagem e foram desafiados a modificar o projeto para melhorar o desempenho.

Geralmente, um levitador magnético é composto por uma bobina presa em uma estrutura, responsável por gerar o campo magnético, uma massa metálica a ser levitada, um sensor de distância, um *driver* de corrente e um *hardware* de controle. O levitador magnético tem aplicações diversas, como por exemplo, em sistemas de transporte levitados magneticamente, onde a ausência do atrito de contato possibilita que o veículo atinja altíssimas velocidades (Bittar and Sales, 1998).

Neste trabalho, em específico, a massa suspensa é um ímã, pois um sensor de efeito Hall foi utilizado para medir a distância da massa levitada em relação à bobina. Uma ponte H foi utilizada

como *driver* de potência e o *hardware* de controle escolhido foi o Arduino UNO (Arduino, 2015).

A primeira etapa do projeto consistiu na determinação do modelo matemático do levitador magnético, baseado nas equações de força e eletromagnetismo. Esse modelo foi linearizado em torno do ponto de operação e seus parâmetros foram obtidos por meio de experimentos. Assim, foi encontrada a função de transferência do levitador magnético que relaciona a distância do ímã em função da corrente.

A partir do modelo foi realizada a segunda etapa, que correspondeu ao projeto do controlador PID digital. Para isso foi utilizada a técnica de lugar das raízes no domínio discreto pela imposição de polos de malha fechada e critérios de desempenho do controlador.

A terceira etapa consistiu no desenvolvimento do código do controlador digital PID na plataforma Arduino UNO e também na montagem do *hardware* da ponte H e do sensor de efeito Hall.

Finalmente, com o sistema montado, foram realizados os testes para a validação do funcionamento do sistema do levitador magnético didático. Com isso, foi possível levar o ímã em torno do ponto de operação desejado.

2 Modelo e Construção da Planta

Nesta seção a modelagem matemática do levitador é apresentada, assim como a construção do sistema e a parametrização do modelo.

2.1 Modelo do Levitador Magnético

A Figura 1 apresenta o princípio de funcionamento de um levitador magnético

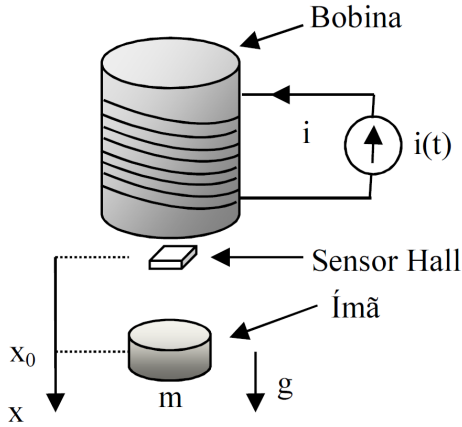


Figura 1: Elementos que compõem o levitador magnético didático.

O levitador magnético é composto por um ímã de massa m que é levitado, uma bobina que gera um campo magnético de atração e repulsão conforme a corrente que a percorre, e por um sensor de efeito Hall responsável por determinar a distância do ímã a partir da medida do campo magnético.

Conforme (Castrucci et al., 2011), a força produzida pela bobina é dada por:

$$F(x, i) = K \frac{i^2}{x^2}, \quad (1)$$

sendo i a corrente elétrica que circula pela bobina, K uma constante que depende do número de espiras e da área da seção transversal da mesma e x a distância entre o ímã e a bobina.

Para obter a função de transferência do sistema que possui como entrada a corrente i e saída a distância x , será utilizada a força resultante $F_R(x, i)$, sendo que a aceleração da gravidade é g e o ímã possui massa m .

$$F_R(x, i) = mg - F(x, i) = mg - K \frac{i^2}{x^2}. \quad (2)$$

Como a força resultante é não linear, será realizada a linearização do sistema usando o polinômio de Taylor de grau 1, no ponto de equilíbrio (x_0, i_0) :

$$\begin{aligned} F_R(x, i) &\cong F_R(x_0, i_0) + \left(\frac{\partial F_R}{\partial x} \Big|_{x=x_0, i=i_0} \right) (x - x_0) \\ &\quad + \left(\frac{\partial F_R}{\partial i} \Big|_{x=x_0, i=i_0} \right) (i - i_0) \\ &\cong F_R(x_0, i_0) + \left(\frac{2Ki_0^2}{x_0^3} \right) (x - x_0) \\ &\quad - \left(\frac{2Ki_0}{x_0^2} \right) (i - i_0). \end{aligned} \quad (3)$$

As seguintes notações são adotadas: $f_R(t) = F_R(x, i) - F_R(x_0, i_0)$, $\bar{x}(t) = x(t) - x_0$ e $\bar{i}(t) = i(t) - i_0$. A força resultante linearizada fica:

$$f_R(t) = \left(\frac{2Ki_0^2}{x_0^3} \right) \bar{x}(t) - \left(\frac{2Ki_0}{x_0^2} \right) \bar{i}(t) = \frac{md^2\bar{x}(t)}{d^2t}. \quad (4)$$

No ponto de equilíbrio:

$$mg = \frac{Ki_0^2}{x_0^2} \Rightarrow x_0^2 = \frac{Ki_0^2}{mg} \Rightarrow i_0^2 = \frac{mgx_0^2}{K}. \quad (5)$$

De (5), segue que:

$$\frac{d^2\bar{x}(t)}{d^2t} = \frac{2g}{x_0} \bar{x}(t) - \frac{2g}{i_0} \bar{i}(t). \quad (6)$$

Logo, a função de transferência do levitador magnético linearizada em torno do ponto de equilíbrio é:

$$\frac{X(s)}{I(s)} = \frac{-\frac{2g}{i_0}}{s^2 - \frac{2g}{x_0}}, \quad (7)$$

sendo $X(s)$ e $I(s)$ as transformadas de Laplace de $\bar{x}(t)$ e $\bar{i}(t)$, respectivamente.

2.2 Montagem Experimental

A partir do modelo (7) do levitador, foi preciso determinar os parâmetros x_0 e i_0 . Para isso foi realizada a montagem experimental da Figura 2.

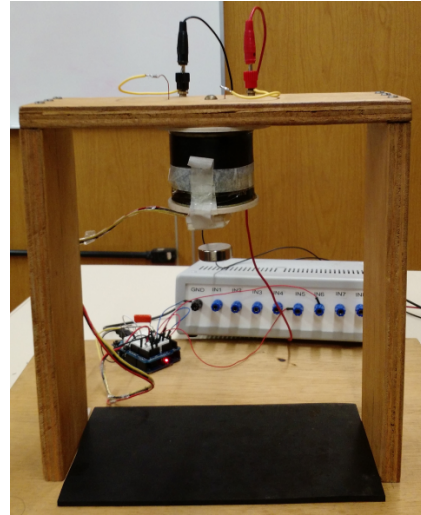


Figura 2: Montagem do levitador magnético.

Nessa montagem experimental foram utilizados os seguintes elementos:

- ímã de 30mm de diâmetro por 10mm de altura;
- bobina;
- sensor de efeito Hall modelo A1321LUA-T;
- Arduino Uno;

- ponte H L298;
- fonte de alimentação 12V, 3A;
- suporte de madeira para o sistema.

O ímã escolhido é feito de neodímio. O sensor de efeito Hall selecionado foi o A1321 (Allegro, 2011), que apresenta uma saída em tensão com sensibilidade de 5mV/Gauss centrado numa tensão de 2,5V (metade do valor da alimentação de 5V). Assim, o sensor apresenta 2,5V quando não é atravessado por campo magnético. A partir da medida do campo magnético do ímã é possível determinar a distância do mesmo.

O *hardware* usado para implementar o controle digital foi o Arduino Uno (Arduino, 2015), que é uma plataforma de prototipagem eletrônica de hardware livre e de placa única, projetada com um microcontrolador Atmel AVR com suporte de entrada/saída embutido e com uma linguagem de programação padrão baseada no C/C++.

Para controlar a corrente $i(t)$ que é aplicada na bobina foi utilizada uma ponte H integrada (L298), que permite o controle de atração e repulsão do ímã. Para gerar a corrente, o Arduino utiliza dois sinais de modulação de largura de pulso (PWM), que são aplicados nas entradas da ponte H, sendo que esses sinais são complementares.

Foi utilizada uma fonte de alimentação com saída de 12V para alimentar a Ponte H, responsável por gerar a corrente da bobina.

O sistema funciona da seguinte forma: por intermédio de uma entrada analógica do Arduino é realizada a leitura do sensor de efeito Hall. O campo magnético obtido é convertido em uma distância equivalente do ímã. Então, o Arduino executa um algoritmo PID de forma a controlar a posição do ímã para uma distância de referência x_0 . Isso é realizado por meio de uma saída PWM do Arduino, que é convertida em dois sinais PWM complementares (com o uso de um inversor 74LS04). Esses sinais são aplicados nas duas entradas da Ponte H, controlando assim a corrente da bobina e, por consequência, a posição do ímã.

2.3 Parâmetros do Modelo

Inicialmente a planta foi estabilizada por meio de um controlador PID, ajustado manualmente. Este procedimento permitiu determinar, por meio de medições, a corrente de equilíbrio i_0 e a posição de equilíbrio x_0 . A Tabela 1 apresenta os parâmetros medidos experimentalmente.

Tabela 1: Parâmetros de equilíbrio do modelo.

Parâmetro	Valor
i_0 : corrente	0,27 A
x_0 : posição	0,03 m
v_0 : tensão do sensor	0,44 V

A aceleração da gravidade é dada por $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. A função de transferência do levitador experimental é dada por:

$$\frac{X(s)}{I(s)} = \frac{-72,59}{s^2 - 653,3}. \quad (8)$$

3 Projeto do Controlador

As especificações de desempenho e o projeto de um controlador PID digital são apresentados nesta seção.

3.1 Desempenho do Controlador

A especificação do controlador baseado em uma resposta transitória de segunda ordem e o período de amostragem escolhido são mostrados na Tabela 2.

Tabela 2: Especificações de Projeto.

Parâmetro	Valor
t_s : tempo de acomodação 2%	1 s
ξ : coeficiente de amortecimento	0,5
T_s : período de amostragem	0,002 s

Assim a frequência natural não amortecida é calculada por:

$$\omega_n = \frac{4}{\xi t_s} = \frac{4}{0,5} = 8 \text{ rad/s}. \quad (9)$$

Os polos de malha fechada dominantes desejados são:

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\xi^2}j \\ &= -4 \pm 6,9282j. \end{aligned} \quad (10)$$

No plano z , tais polos são mapeados em:

$$z_{1,2} = e^{s_{1,2}T_s} = 0,9919 \pm 0,0137j. \quad (11)$$

3.2 Elaboração do Controlador

A função de transferência do levitador magnético no plano z com o segurador de ordem zero, desconsiderando a ação negativa da planta, é dada por:

$$G_D(z) = \frac{0,00014521(z+1)}{(z-1,0524)(z-0,9502)}. \quad (12)$$

Como o projeto foi realizado pelo método do lugar das raízes, é conveniente representar o controlador na seguinte forma:

$$C_D(z) = KC'_D(z) = K \frac{(z-c_1)(z-c_2)}{z(z-1)}, \quad (13)$$

que representa um controlador PID (Castrucci et al., 2011).

Primeiramente, o polo estável da planta é cancelado, ou seja, um dos zeros do controlador é fixado em $c_2 = 0,9502$. Para encontrar o outro zero do controlador, aplica-se a condição de fase do lugar das raízes, tal que:

$$\left| \frac{C'_D(z)G_D(z)}{z(z-1)} \right|_{z=z_1} = \pm \text{múltiplo ímpar de } \pi. \quad (14)$$

O ângulo ϕ a ser imposto pelo zero do controlador a ser determinado para satisfazer a condição angular em $z_1 = 0,9919 + j0,0137$ é calculado como:

$$\phi = -\pi - \frac{\angle z_1 + 1}{\angle z_1} + \frac{\angle z_1 - 1}{\angle z_1 - 1,0524} = 1,8849 \text{ rad}. \quad (15)$$

Com isso,

$$c_1 = -\frac{\text{Imag}(z_1)}{\tan(\phi)} + \text{Real}(z_1) = 0,9964. \quad (16)$$

Portanto,

$$C_D(z) = KC'_D(z) = \frac{K(z - 0,9964)(z - 0,9502)}{z(z - 1)}. \quad (17)$$

O ganho do controlador é calculado pela condição módulo, ou seja:

$$K = \frac{1}{|C'_D(z_1)G_D(z_1)|} = 234,657. \quad (18)$$

Logo, o seguinte controlador é obtido:

$$C_D(z) = \frac{234,65(z - 0,9964)(z - 0,9502)}{z(z - 1)}. \quad (19)$$

Como o ganho da planta foi invertido para o projeto, para implementação no sistema real o sinal do ganho do controlador precisa ser trocado, ou seja,

$$C_D(z) = \frac{-234,65(z - 0,9964)(z - 0,9502)}{z(z - 1)}. \quad (20)$$

3.3 Simulação do Sistema com o Controlador

Para verificar o funcionamento do controlador encontrado, foi realizada uma simulação do sistema considerando que o ímã é solto próximo à condição de equilíbrio. O diagrama da simulação é mostrado na Figura 3.

Como o modelo foi linearizado em torno de $x_0 = 0,03\text{m}$ foi aplicado um degrau de $0,027\text{m}$ no instante $t = 0\text{s}$ para que o ímã chegasse próximo da posição de equilíbrio.

No instante $t = 4\text{s}$ é aplicado outro degrau com amplitude $0,003\text{m}$ que é somando ao primeiro degrau resultando na referência da posição de equilíbrio que é $x_0 = 0,03\text{m}$. A Figura 4 apresenta a posição x do ímã em função do tempo e a Figura 5 apresenta a corrente i aplicada na bobina.

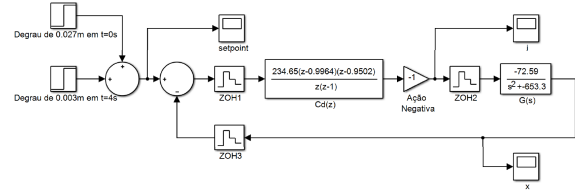


Figura 3: Diagrama da simulação do sistema do levitador magnético.

Como é possível observar, o tempo de acomodação da resposta transitória é próximo de 1s , que está de acordo com o valor especificado. Já o sobressinal elevado é devido ao fato da malha aberta resultante não ser de segunda ordem.

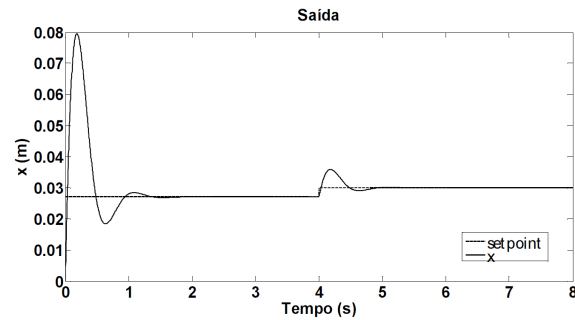


Figura 4: Posição do ímã em função do tempo.

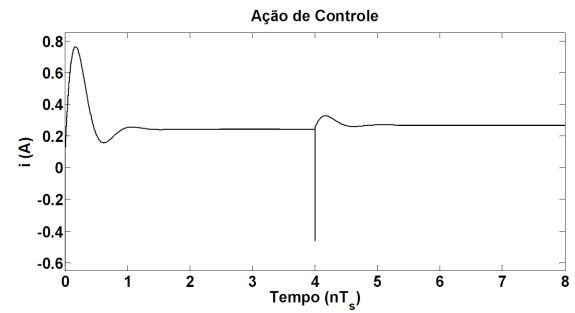


Figura 5: Corrente aplicada na bobina em função do tempo.

4 Implementação do Código do Controlador

Para implementar o código do controlador foi utilizado o algoritmo de PID posicional com anti-windup que mantém o valor do integrador quando a saída estiver saturada.

Para obter os parâmetros do controlador PID foram utilizadas as seguintes relações:

$$K_P = \frac{K}{2}(c_1 + c_2 - 3c_1c_2 + 1), \quad (21)$$

$$T_I = \frac{T_s}{2} \frac{1 + c_1 + c_2 - 3c_1c_2}{1 + c_1c_2 - c_1 - c_2}, \quad (22)$$

$$T_D = 2T_s \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2 - 3c_1 c_2 + 1}. \quad (23)$$

Tais relações são obtidas ao comparar a Equação 13 com a função de transferência do PID digital básico com aproximação Tustin para a parcela integrativa e retangular para trás na parcela derivativa:

$$\begin{aligned} PID(z) &= K_P \left(1 + \frac{T_s}{2T_I} \frac{(z+1)}{(z-1)} + \frac{T_D}{T_s} \frac{z-1}{z} \right) \\ &= a + b \frac{(z+1)}{(z-1)} + c \frac{z-1}{z} \\ &= \frac{az(z-1) + bz(z+1) + c(z-1)^2}{z(z-1)}. \end{aligned} \quad (24)$$

com $a = K_P$, $b = K_P \frac{T_s}{2T_I}$ e $c = K_P \frac{T_D}{T_s}$.

Substituindo os valores c_1 , c_2 , c_3 e T_s encontrados no projeto do controlador, os parâmetros do controlador apresentados na Tabela 3 são obtidos:

Tabela 3: Parâmetros do controlador PID.

Parâmetro	Valor
K_P	-12,4754
T_I	0,5930
T_D	0,0356

O PID digital foi implementado no Arduino usando como referência da distância x os valores do conversor A/D de 10 bits em inteiros (0 até 1023), e como valores de saída para gerar a corrente i , um sinal PWM de 10 bits (0 até 1023) de forma a otimizar o processamento do Arduino.

Assim, a referência da distância usando valores inteiros no Arduino foi de 100, que corresponde a uma distância x de 0,03m. Para calcular a distância x a partir do valor do conversor A/D, é utilizada a Equação (25), em que a primeira parte corresponde ao conversor A/D e a segunda parte à conversão do campo magnético medido em tensão para distância:

$$x(m) = \left[\frac{(\text{Leitura AD}) \cdot 5}{1023} \right] \left(\frac{2,5 - v_o}{x_o} \right). \quad (25)$$

Substituindo pelos parâmetros da Tabela 1, tem-se:

$$x(m) = (\text{Leitura AD}) \cdot 0,335614. \quad (26)$$

Assim, o ganho do PID precisa ser corrigido também por essa constante, para se adequar a nova faixa de leituras da posição em função do valor do conversor A/D.

$$K_{PAD} = \left[\frac{K_P \cdot 5}{1023} \right] \left(\frac{2,5 - v_o}{x_o} \right). \quad (27)$$

Substituindo novamente pelos valores da Tabela 1 e por K_P , obtém-se:

$$K_{PAD} \cong -4. \quad (28)$$

Com os parâmetros do PID, foi implementado o código em linguagem C na plataforma Arduino como é mostrado na Figura 6.

```
#include <TimerOne.h>
float Setpoint=100, sat = 511.0f, u = 0.0
float u_ant=0, u_I_ant=0, u_D_ant=0, N=20;
int Field = 0.0, Field_ant = 0;
float Ts = 0.002f, Kp=-4.0f, Ti=0.1f, Td=0.05;
int out;
unsigned long Time=0, ControlTime=0;
void setup(){
  Serial.begin(115200);
  Timer1.initialize(100);
  Timer1.pwm(9,1023,100); }

void loop(){
  Time = millis();
  if (Time - ControlTime ≥ 2) {
    ControlTime = Time;
    Field = analogRead(A0);
    PID();
    out = (int)(u*1.0+512);
    if (out > 1023) out = 1023;
    if (out < 0) out = 0;
    Timer1.pwm(9,out,100); Serial.print(Field);
    Serial.print(";"); Serial.println(out); }
}

void PID() {
  float uP = 0.0f, uI = 0.0f, uD = 0.0f;
  float e, e_i;
  e = Setpoint - Field; // Calcula Erro
  //Antiwindup
  if (u_ant ≥ sat || u_ant ≤ -sat){
    e_i = 0;
  }
  else{
    e_i = e;
  }
  uP = (float)(Kp*e); // Proporcional
  uI = (float)(u_I_ant + (Kp*Ts/Ti)*e_i);
  uD = (float)((Td/(Td+N*Ts))*u_D_ant -
    (Kp*N*Td/(Td+N*Ts))*(Field-Field_ant));
  u = (float)(uP+uI+uD);
  u_D_ant = uD; u_I_ant = uI;
  u_ant = u; Field_ant = Field;
}
```

Figura 6: Código em C implementado no Arduino UNO

5 TESTES E RESULTADOS

Nesse item foram realizados ensaios experimentais com o sistema do levitador magnético de forma a validar o controlador PID digital projetado. A Figura 7 mostra a distância x do ímã em função do tempo e a Figura 8 apresenta a corrente da bobina i em função do tempo. Na Figura 8 foi necessário aplicar um filtro de média móvel de 10 amostras para mostrar a tendência da corrente i , sabendo que esse valor de corrente foi calculado a partir do valor de saída do PWM.

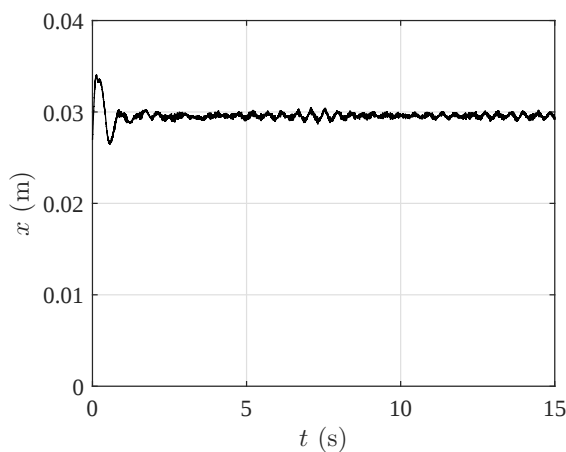


Figura 7: Dados experimentais da distância x em função do tempo.

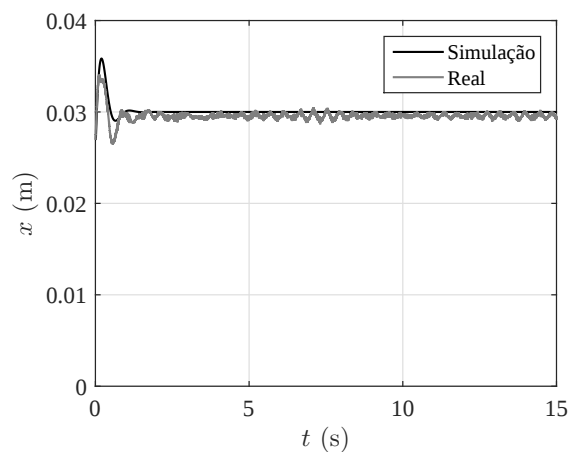


Figura 9: Comparação da simulação com os dados experimentais da distância x .

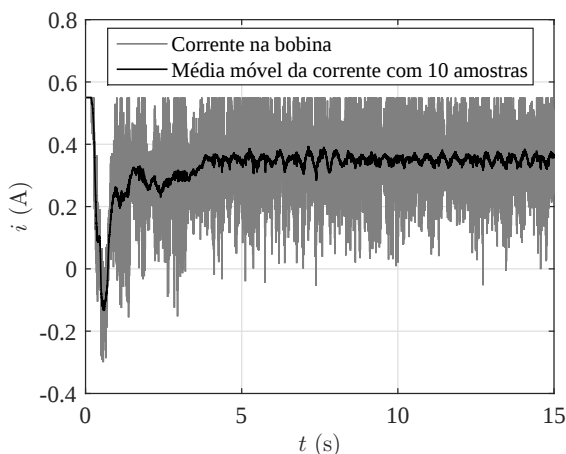


Figura 8: Dados experimentais da corrente i em função do tempo.

A Figura 9 apresenta uma comparação entre a distância x do ímã do sistema simulado, com a distância x do sistema obtida experimentalmente, ambos começando com a condição inicial de $x = 0,027\text{m}$.

A comparação entre a simulação e os resultados experimentais da distância x do ímã mostra que o modelo apresenta grande aderência, conforme mostrado na Figura 9.

6 CONCLUSÕES

Por meio dos resultados experimentais pôde-se observar o desempenho adequado do sistema em malha fechada com o controlador PID digital projetado. O modelo apresentou grande aderência para distâncias próximas do ponto de equilíbrio da linearização. Resultados experimentais e de simulação para a distância da massa levitada ficaram próximos. O kit construído é de baixo custo e pode ser utilizado em laboratórios didáticos de controle nos cursos de graduação.

Referências

- Allegro (2011). A1321, a1322, and a1323 ratio-metric linear hall effect sensor ics for high-temperature operation. pp. 1-12.
- Arduino (2015). Arduino - arduinoboarduno, <https://www.arduino.cc/en/Main/arduinoBoardUno>.
- Bittar, A. and Sales, R. M. (1998). H_2 and H_∞ control for maglev vehicles, *IEEE Control Systems* **18**(4): 18-25.
- Castrucci, P. L., Bittar, A. and Sales, R. M. (2011). *Controle Automático*, 1a. edn, LTC, Rio de Janeiro, RJ.
- Franklin, G., Powell, J. and Emami-Naeini, A. (2013). *Sistemas de Controle para Engenharia - 6ed*, Bookman Editora, Porto Alegre, RS.
- Galvao, R. K. H., Yoneyama, T., de Araújo, F. M. U. and Machado, R. G. (2003). A simple technique for identifying a linearized model for a didactic magnetic levitation system, *IEEE Transactions on Education* **46**(1): 22-25.
- Lilienkamp, K. A. (2004). Low-cost magnetic levitation project kits for teaching feedback system design, *American Control Conference*, Vol. 2, pp. 1308-1313 vol.2.