

AVALIAÇÃO MULTI OBJETIVO DO DESEMPENHO E ROBUSTEZ DE UMA LEI DE CONTROLE PREDITIVO COM RESTRIÇÃO TERMINAL PARA UM LEVITADOR MAGNÉTICO

NILTON B. MARQUES*, ROBERTO K. H. GALVÃO*, HENRIQUE M. PAIVA*

**Instituto Tecnológico de Aeronáutica - Divisão de Engenharia Eletrônica
Praça Marechal Eduardo Gomes, 50
São José dos Campos, São Paulo, Brasil, 12228-900*

Emails: niltonbezerramarques@gmail.com, kawakami@ita.br, hmpaiva@pq.cnpq.br

Abstract— This paper presents a case study involving the multi-objective assessment of a predictive controller applied to a magnetic levitation system. The control law used makes use of state terminal constraints in order to ensure nominal closed-loop stability. The multi-objective assessment is carried out based on two indexes, one related to loop performance and other to stability robustness, which depend on the controller design parameters. From the analysis it was concluded that the increase of prediction and control horizons and the increase of control weight causes a similar effect on the system considered, which is increase stability robustness and decrease performance.

Keywords— Predictive control, Terminal constraints, Magnetic levitation system, Multiobjective evaluation

Resumo— Este artigo apresenta um estudo de caso envolvendo a avaliação multiobjetivo de um controlador preditivo aplicado a um sistema de levitação magnética. A lei de controle utilizada faz uso de restrições terminais de estado, a fim de garantir a estabilidade nominal em malha fechada. A avaliação multiobjetivo é realizada com base em dois índices, um relacionado ao desempenho da malha e outro à robustez da estabilidade, que dependem dos parâmetros de projeto do controlador. Da análise concluiu-se que o aumento dos horizontes de predição e controle e o aumento do peso de controle causam um efeito semelhante no sistema considerado, que é aumentar a robustez da estabilidade e diminuir o desempenho.

Palavras-chave— Controle preditivo, Restrições terminais, Sistema de levitação magnética, Avaliação multi-objetivo

1 Introdução

O controle preditivo baseado em modelo (MPC: *Model-Based Predictive Control*) é uma técnica de controle moderno que tem se desenvolvido bastante nas últimas décadas. Atualmente, a principal aplicação do controle preditivo é na indústria petroquímica e nas refinarias de petróleo, no entanto, pode-se citar ainda diversas outras áreas de aplicação, como por exemplo, a indústria de mineração e metalurgia, polímeros, aeroespacial e alimentícia, entre outros (Qin and Badgwell, 2003).

Os principais pontos positivos do controle preditivo são a possibilidade de tratamento de restrições, tanto de entrada quanto de estados/saídas, a aplicabilidade em sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO) e a possibilidade de uso de diversos tipos de modelo, como funções de transferência ou espaço de estados (Maciejowski, 2002).

O princípio básico do MPC consiste em, com base em um modelo da planta, prever quais são os efeitos de cada variável de controle nas saídas e assim calcular o controle ótimo a ser aplicado. A determinação do controle ótimo envolve a minimização de uma função de custo, que normalmente é função dos estados/saídas ao longo de um horizonte de predição N e dos controles aplicados ao longo de horizonte de controle M . Em cada instante de atualização do controle calcula-se qual a sequência de controles ótima a ser aplicada en-

tre $t(k)$ e $t(k + M)$, sendo $t(k)$ o instante atual, aplica-se o primeiro controle da sequência ótima e aguarda-se o próximo instante de atualização para repetir o processo.

Para garantir a estabilidade do sistema em malha fechada é comum o uso restrições terminais do tipo $x(k + N) \in \chi$, onde $x(k + N)$ representa o estado N passos adiante (Mayne et al., 2000). No entanto, o acréscimo de restrições terminais pode reduzir o conjunto de condições iniciais factíveis, bem como conduzir a problemas de perda de factibilidade na presença de perturbações ou descasamento de modelo. Tal problema pode ser mitigado por meio de uma ampliação nos horizontes de predição e controle, de modo a estender o tempo para que o estado atinja o conjunto χ , e também aumentar o número de graus de liberdade envolvidos na otimização. Porém, essa solução aumenta o custo computacional, o que, dependendo da aplicação, pode inviabilizar a implementação da lei de controle na prática. (Primbs and Nevistic, 2000), (Afonso and Galvão, 2012).

A possibilidade de se tratar restrições de forma explícita é uma importante vantagem do MPC para o controle de sistemas de levitação magnética. Levitadores magnéticos normalmente operam em condições onde as restrições operacionais são apertadas e falhas podem ser catastróficas (Fama et al., 2005). Desse modo, é possível encontrar diversos estudos envolvendo a aplicação

de controle preditivo a levitadores magnéticos, por exemplo, (Qin et al., 2014), (Bächle et al., 2013), (Candido et al., 2009b) e (Candido et al., 2009a). Nos dois últimos, avalia-se por meio de simulação o desempenho de diferentes formulações de controle preditivo para um sistema de levitação magnética empregando a fronteira de Pareto, considerando como índices a serem minimizados o tempo de subida para uma referência degrau e a sensibilidade a ruído de medida.

Neste artigo, apresenta-se um estudo do impacto da variação dos parâmetros de projeto do controlador preditivo no desempenho e na robustez do sistema de levitação magnética. Como diferencial em relação aos trabalhos (Candido et al., 2009b) e (Candido et al., 2009a), pode-se citar a imposição de uma restrição terminal para garantia de estabilidade nominal e a avaliação da robustez da estabilidade por meio de análise no domínio da frequência. Adicionalmente, avalia-se de forma separada o impacto das variações nos horizontes de predição/controle e no peso atribuído ao esforço de controle na função de custo. Por simplicidade, considera-se que a operação esteja sendo realizada nas proximidades do ponto de equilíbrio desejado, de modo que a robustez da estabilidade possa ser avaliada com o uso de um modelo linear.

A seção 2 trará um detalhamento da lei de controle utilizada. Para esta análise, serão definidos dois índices na seção 3 para quantificar a robustez da estabilidade e o desempenho do sistema em malha fechada. O modelo do levitador magnético considerado no estudo será descrito na seção 4. Por fim, os resultados obtidos serão apresentados na seção 5 e as conclusões na seção 6.

1.1 Notação

Neste artigo será utilizada a seguinte notação:

- n : Número de estados da planta.
- N : Horizonte de predição.
- M : Horizonte de controle.
- $\hat{u}(k+i|k)$: Valor futuro do controle no instante $k+i$, dentro de horizonte de controle iniciado no instante k .
- $\Delta\hat{u}(k+i|k)$: Incremento de controle $\hat{u}(k+i|k) - \hat{u}(k+i-1|k)$
- $\hat{y}(k+i|k)$: Valor predito da saída no instante $k+i$ com base nas informações disponíveis até o instante k , supondo aplicação da sequência de controle $\hat{u}(k|k), \hat{u}(k+1|k), \dots, \hat{u}(k+M-1|k)$.
- $\hat{u}^*(k+i|k)$: Valor ótimo de $\hat{u}(k+i|k)$.
- $\Delta\hat{u}^*(k+i|k)$: Valor ótimo de $\Delta\hat{u}(k+i|k)$.

2 Lei de controle

O projeto do controlador será feito com base no modelo dinâmico linearizado e discretizado da

planta, cuja representação no espaço de estados é dada por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (1)$$

A caracterização do modelo, que possui apenas uma entrada e uma saída (SISO), será apresentada na seção 4.

Para o projeto do controlador será considerada a função de custo

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^N [\hat{y}(k+i|k) - y_{ref}]^2 \\ &+ \rho \sum_{i=1}^M [\Delta\hat{u}(k+i-1|k)]^2 \end{aligned} \quad (2)$$

sujeita ao modelo dinâmico (1) e à restrição terminal de estado

$$\hat{x}(k+N|k) = 0_{n \times 1} \quad (3)$$

onde y_{ref} é o valor de referência para a saída da planta e N , M e ρ são parâmetros de projeto, que devem ser ajustados. Para simplificar o desenvolvimento das equações, a partir deste ponto será considerada a função de custo escrita na sua forma vetorial

$$J = (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r})^T (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r}) + \rho \Delta\hat{\mathbf{u}}^T \Delta\hat{\mathbf{u}} \quad (4)$$

com

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \hat{y}(k+1|k) \\ \hat{y}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N|k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} y_{ref} \\ y_{ref} \\ \vdots \\ y_{ref} \end{bmatrix}_N$$

e

$$\Delta\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \Delta\hat{u}(k|k) \\ \Delta\hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta\hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}$$

Vale notar que $\hat{\mathbf{y}}$ e $\Delta\hat{\mathbf{u}}$ não são variáveis independentes, dado que alterações no controle afetam diretamente a saída do sistema. A relação entre eles é dada por um modelo de predição, que será apresentado na seção 2.1. Desse modo, o custo J poderá ser reescrito como função do vetor de incremento de controle $\Delta\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^M$. No entanto, a imposição da restrição terminal (3) reduz a quantidade de graus de liberdade da solução de M para $M-n$, onde n é o número de estados da planta. Em outras palavras, ao se escolher os $M-n$ primeiros incrementos de controle os n últimos são definidos de forma a satisfazer a igualdade (3).

Seja $\Delta\hat{\mathbf{u}}^*$ o valor de $\Delta\hat{\mathbf{u}}$ que minimiza o custo J sujeito à restrição (3). A lei de controle é tal que o incremento de controle a ser aplicado no instante atual é o primeiro elemento da solução $\Delta\hat{\mathbf{u}}^*$:

$$\Delta u(k) = \Delta\hat{u}^*(k|k) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \Delta\hat{\mathbf{u}}^* \quad (5)$$

A solução do problema de otimização será apresentada na seção 2.2.

2.1 Modelo de Predição

A obtenção do modelo de predição é feita com base no modelo da planta (1). Para que o modelo apresentado possa ser reescrito em função do incremento de controle $\Delta u(k)$, considere o estado aumentado

$$x_a(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Com isso, o modelo pode ser escrito como

$$\begin{aligned} x_a(k+1) &= A_a x_a(k) + B_a \Delta u(k) \\ y(k) &= C_a x_a(k) \end{aligned} \quad (7)$$

onde $A_a = \begin{bmatrix} A & B \\ 0_n^T & 1 \end{bmatrix}$, $B_a = \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}$ e $C_a = [C \ 0]$.

Com base nas equações de estado e saída em (7), pode-se escrever um modelo de predição da forma

$$\hat{y} = G\Delta\hat{u} + \mathbf{f} \quad (8)$$

onde

$$\begin{aligned} G &= \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \dots & 0 \\ g_2 & g_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_M & g_{M-1} & \dots & g_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_N & g_{N-1} & \dots & g_{N-M+1} \end{bmatrix} \\ g_i &= C_a A_a^{i-1} B_a \\ \mathbf{f} &= \begin{bmatrix} f(k+1|k) \\ f(k+2|k) \\ \vdots \\ f(k+N|k) \end{bmatrix} = \Phi x_a(k) \\ \Phi &= \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_a A_a \\ C_a A_a^2 \\ \vdots \\ C_a A_a^N \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vale notar que a matriz G só possui M colunas. Isso se deve ao fato de que $\Delta\hat{u}(k+j|k) = 0$, $\forall j \geq M$.

De forma análoga ao modelo de predição (8) é possível ainda obter um modelo de predição para os estados. Para isso, pode-se escrever

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1|k) \\ \hat{x}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{x}(k+N|k) \end{bmatrix} = G_x \Delta\hat{u} + \mathbf{f}_x \quad (9)$$

onde

$$G_x = \begin{bmatrix} g_{x,1} & 0 & \dots & 0 \\ g_{x,2} & g_{x,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x,M} & g_{x,M-1} & \dots & g_{x,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x,N} & g_{x,N-1} & \dots & g_{x,N-M+1} \end{bmatrix}$$

$$g_{x,i} = C_a A_a^{i-1} B_a$$

$$C_a x = [I_{n \times n} \ 0_{n \times 1}]$$

$$\mathbf{f}_x = \begin{bmatrix} f_x(k+1|k) \\ f_x(k+2|k) \\ \vdots \\ f_x(k+N|k) \end{bmatrix} = \Phi_x x_a(k)$$

$$\Phi_x = \begin{bmatrix} \phi_{x,1} \\ \phi_{x,2} \\ \vdots \\ \phi_{x,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_a A_a \\ C_a A_a^2 \\ \vdots \\ C_a A_a^N \end{bmatrix}$$

2.2 Resolução do problema de otimização

Conforme já apresentado, pode-se tomar como variáveis independentes para a resolução do problema de otimização os $M-n$ primeiros elementos do vetor $\Delta\hat{u}$. Desse modo, é conveniente separar as variáveis independentes das dependentes da seguinte forma

$$\Delta\hat{u} = \begin{bmatrix} \Delta\hat{u}_r \\ \Delta\hat{u}_s \end{bmatrix} \quad (10)$$

com

$$\begin{aligned} \Delta\hat{u}_r &= \begin{bmatrix} \Delta\hat{u}(k|k) \\ \Delta\hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta\hat{u}(k+M-n-1|k) \end{bmatrix} \\ \Delta\hat{u}_s &= \begin{bmatrix} \Delta\hat{u}(k+M-n|k) \\ \Delta\hat{u}(k+M-n+1|k) \\ \vdots \\ \Delta\hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Do modelo de predição para o estado (9) tem-se que o estado ao final do horizonte de predição é

$$\hat{x}(k+N|k) = V\Delta\hat{u}_r + W\Delta\hat{u}_s + f_x(k+N|k) \quad (11)$$

onde

$$V = [g_{x,N} \ g_{x,N-1} \ \dots \ g_{x,N-M+n+1}]$$

$$W = [g_{x,N-M+n} \ g_{x,N-M+n-1} \ \dots \ g_{x,N-M+1}]$$

Desse modo, basta substituir (3) em (11) para encontrar as variáveis dependentes em função das variáveis independentes:

$$\Delta\hat{u}_s = -W^{-1} [V\Delta\hat{u}_r + f_x(k+N|k)] \quad (12)$$

Assim, é possível reescrever o modelo de predição para a saída (8) em função apenas das variáveis independentes $\Delta\hat{u}_r$. Para tal, sejam G_1 , G_2 , G_3 e G_4 sub-matrizes de G tais que

$$\hat{y} = G\Delta\hat{u} + \mathbf{f} = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\hat{u}_r \\ \Delta\hat{u}_s \end{bmatrix} + \mathbf{f} \quad (13)$$

então o modelo de predição para a saída reescrito em função de $\Delta \hat{\mathbf{u}}_r$ se dá por

$$\hat{\mathbf{y}} = G_r \Delta \hat{\mathbf{u}}_r + \mathbf{f} + S f_x(k + N | k) \quad (14)$$

com

$$G_r = \begin{bmatrix} G_1 - G_2 W^{-1} V \\ G_3 - G_4 W^{-1} V \end{bmatrix}$$

$$S = - \begin{bmatrix} G_2 \\ G_4 \end{bmatrix} W^{-1}$$

Substituindo (12), (14) e o fato de que

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}^T \Delta \hat{\mathbf{u}} = \Delta \hat{\mathbf{u}}_r^T \Delta \hat{\mathbf{u}}_r + \Delta \hat{\mathbf{u}}_s^T \Delta \hat{\mathbf{u}}_s \quad (15)$$

na função de custo (4), obtém-se

$$J(\Delta \hat{\mathbf{u}}_r) = \frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{u}}_r^T \mathcal{H}_r \Delta \hat{\mathbf{u}}_r + c_r^T \Delta \hat{\mathbf{u}}_r + \text{cte}_r \quad (16)$$

onde

$$\mathcal{H}_r = 2 [G_r^T G_r + \rho(W^{-1}V)^T(W^{-1}V) + \rho I]$$

$$c_r^T = 2 \{ [\mathbf{f} - \mathbf{r} + S f_x(k + N | k)]^T G_r + \rho [W^{-1} f_x(k + N | k)]^T W^{-1} V \}$$

sendo cte_r um termo constante que não afeta a solução do problema. Vale notar que aqui o problema de otimização inicial se reduz a um problema de otimização sem restrições com uma função de custo quadrática, cuja solução é dada por (Gill et al., 1981):

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_r^* = -\mathcal{H}_r^{-1} c_r \quad (17)$$

Com isso, o incremento de controle a ser aplicado no instante k pode ser obtido como

$$\begin{aligned} \Delta u(k) &= \Delta \hat{u}_r^*(k | k) \\ &= [1 \ 0 \ \dots \ 0] \Delta \hat{\mathbf{u}}_r^* \\ &= K_{MPC,1}(\mathbf{r} - \mathbf{f}) + K_{MPC,2} f_x(k + N | k) \end{aligned} \quad (18)$$

com

$$K_{MPC,1} = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \times [G_r^T G_r + \rho(W^{-1}V)^T(W^{-1}V) + \rho I]^{-1} G_r^T$$

$$K_{MPC,2} = -[1 \ 0 \ \dots \ 0] \times [G_r^T G_r + \rho(W^{-1}V)^T(W^{-1}V) + \rho I]^{-1} \times [G_r^T S + \rho(W^{-1}V)^T W^{-1}]$$

Dado que $\mathbf{r} = [1]_{N \times 1} y_{ref}$, $\mathbf{f} = \Phi x_a$ e $f_x(k + N | k) = \Phi_{x,N} x_a$ então a expressão encontrada para o incremento de controle $\Delta u(k)$ pode ser simplificada para

$$\Delta u(k) = K_1 y_{ref} - K_2 x_a(k) \quad (19)$$

onde

$$K_1 = K_{MPC,1} [1]_{N \times 1}$$

$$K_2 = K_{MPC,1} \Phi - K_{MPC,2} \Phi_{x,N}$$

Para as análises de desempenho e estabilidade robusta do controlador projetado será considerado o diagrama de blocos apresentado na figura 1. No caso,

$$G(z) = (zI - A_a)^{-1} B_a \quad (20)$$

representa a função de transferência de $\Delta u(k)$ para $x_a(k)$.

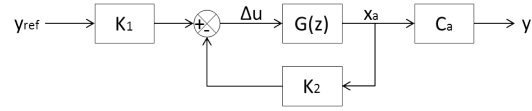


Figura 1: Diagrama de blocos

3 Índices adotados para a avaliação da malha de controle

Para quantificar a robustez da estabilidade e o desempenho foram definidos dois custos para o controlador MPC, J_{RE} e J_D . Com estes custos é possível estudar qual o efeito dos parâmetros de projeto N , M e ρ no desempenho e na estabilidade do sistema em malha fechada.

3.1 Custo de robustez da estabilidade

Para a análise da robustez da estabilidade observa-se a resposta em frequência da função sensibilidade, $S(z)$, e escolhe-se como custo da robustez da estabilidade o pico de sensibilidade

$$J_{RE} = \max_{\theta \in [0, \pi]} |S(e^{j\theta})| \quad (21)$$

Para o caso em estudo, a função sensibilidade é dada por

$$S(z) = \frac{1}{1 + K_2 G(z)} \quad (22)$$

O pico de sensibilidade pode ser interpretado como o inverso da menor distância entre a curva de Nyquist da função de transferência de malha aberta $L(e^{j\theta}) = K_2 G(e^{j\theta})$ e o ponto de singularidade -1.

3.2 Custo de desempenho

Para a análise do desempenho optou-se por analisar o sistema em malha fechada no domínio do tempo.

Desse modo, para o cálculo do custo de desempenho (J_D), considera-se o problema de valor inicial em que o sistema em malha fechada é submetido a uma referência nula ($y_{ref} = 0$) a partir do estado inicial $x_a(0) = [1 \ 0 \ 0]^T$. Define-se então que o custo é a somatória do módulo do erro $e(k) = y(k) - y_{ref}$ durante 1 segundo, isto é

$$J_D = \sum_{kT=0}^{kT=1s} |e(k)| = \sum_{kT=0}^{kT=1s} |y(k)| \quad (23)$$

sendo T o período de amostragem.

4 Modelo adotado

Para o estudo de caso será considerado o sistema de levitação magnética já utilizado em trabalhos anteriores (Candido et al., 2009b) e (Candido et al., 2009a).

O modelo do levitador magnético linearizado e discretizado com período de amostragem $T = 0,005$ s é dado por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (24)$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 1,0108 & 0,0050 \\ 4,3185 & 1,0108 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0,0141 \\ -5,6510 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0]$$

No caso, y e u representam os desvios em relação à tensão de saída do sensor de distância e à tensão de entrada para o driver de corrente no ponto de equilíbrio, respectivamente. Por sua vez, o vetor de estados é definido como $x = [y \quad \dot{y}]^T$.

5 Resultados

Com o objetivo de estudar o compromisso entre os custos de desempenho e robustez da estabilidade foram projetados diversos controladores MPC para o levitador magnético apresentado na seção 4. Os controladores foram obtidos variando-se os horizontes de predição e controle (fixando $N = M$) e o peso de controle ρ .

Variando os horizontes de predição e controle, porém mantendo-os iguais, foram levantados os custos J_{RE} e J_D para 40 diferentes pesos de controle, distribuídos em escala logarítmica entre 0,01 e 100. Adicionalmente, foram projetados controladores LQR (*linear quadratic regulator*), que podem ser interpretados como o caso degenerado de controladores MPC com horizontes infinitos. Os resultados estão apresentados nas figuras 2 e 3. Vale notar que ao aumentar os horizontes de predição e controle há uma tendência em aumentar o custo de desempenho e diminuir o custo de robustez da estabilidade. Em outras palavras, ao aumentar os horizontes o sistema passa a ter maiores margens de estabilidade, no entanto, perde desempenho e se torna mais lento.

Ainda nas figuras 2 e 3 é possível observar outra tendência. Ao se penalizar o esforço de controle, isto é, aumentar o peso ρ , o custo de desempenho tende a aumentar e o custo de robustez da estabilidade tende a diminuir, um efeito semelhante ao observado ao aumentar os horizontes $N = M$. No entanto, este efeito é menos significativo para pequenos horizontes e mais significativos para grandes horizontes. A partir de um certo

valor de ρ as variações nos custos J_{RE} e J_D são mínimas e quanto menor o horizonte menor o valor de ρ para o qual não se observa mais variações nos custos.

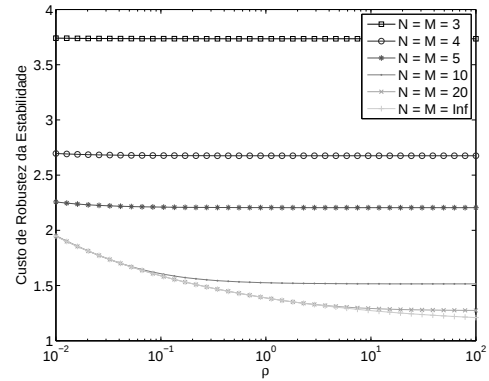


Figura 2: Variação do custo de robustez da estabilidade com o peso de controle ρ

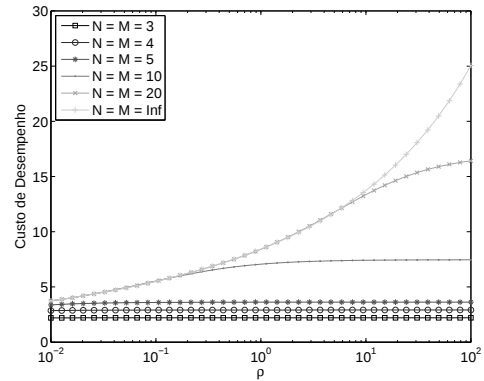


Figura 3: Variação do custo de desempenho com o peso de controle ρ

A fim de se analisar o impacto do peso de controle ρ na robustez da estabilidade foi acrescentado um atuador com dinâmica $H(s) = \frac{200}{s+200}$ em série com a planta. Na prática essa dinâmica de atuador estaria associada à dinâmica elétrica da bobina do eletroímã (circuito RL), excitada por uma fonte de tensão. A figura 4 apresenta os sinais de saída para o problema de valor inicial com $N = M = 20$ e $\rho = 1, 10$ e 100 . Aqui, novamente observa-se o efeito do peso de controle, ao diminuir o valor de ρ o sistema apresenta uma resposta mais rápida, no entanto, perde estabilidade. Como pode ser visto, devido à baixa robustez da malha de controle projetada com $\rho = 1$, a introdução da dinâmica de atuador acarretou instabilidade.

6 Conclusões

Neste artigo foi apresentado um estudo do compromisso entre o desempenho e a robustez, que

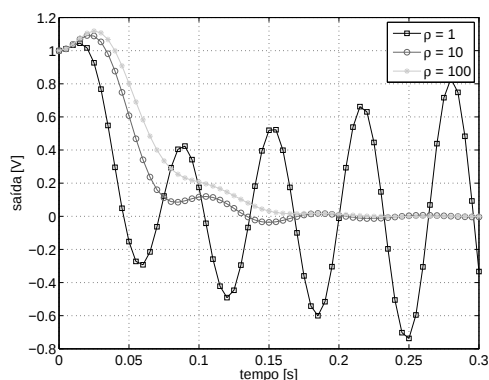


Figura 4: Sinal de saída obtido após inclusão da dinâmica de atuador ($N = M = 20$)

normalmente são objetivos conflitantes, de um controlador MPC aplicado a um levitador magnético. O projeto do controlador foi feito levando em conta a restrição terminal de estado $\hat{x}(k + N | k) = 0$ e o modelo da planta linearizado. Para que o estudo pudesse ser feito de forma quantitativa foram definidos os custos de desempenho e de robustez da estabilidade, J_D e J_{RE} , respectivamente, que se baseiam na resposta do sistema (planta + controlador) tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência.

Como parâmetros de projeto para o controlador foram utilizados o horizonte de predição N , o horizonte de controle M e o peso de controle ρ . A fim de simplificar o estudo, todas as análises foram feitas considerando os horizontes de predição e controle iguais, desta forma o projeto do controlador passou a ter apenas dois graus de liberdade, horizonte $N = M$ e peso ρ .

Variando estes parâmetros pôde-se observar que o aumento do horizonte e o aumento no peso ρ causam o mesmo efeito nos custos J_D e J_{RE} . De maneira geral, aumentar o horizonte ou o peso ρ causa um aumento no custo de desempenho e uma diminuição no custo de robustez da estabilidade. Este efeito pode ser em maior ou menor escala dependendo do intervalo de horizontes em que se está sendo feita a análise.

Para pequenos horizontes, as variações no horizonte causam um impacto significativamente maior nos custos quando comparado às variações no peso ρ . Por outro lado, para grandes horizontes, as variações no peso ρ são bem mais significativas.

Na prática, seria também necessário considerar a carga computacional demandada na presença de restrições impostas sobre os controles e/ou estados da planta. Nesse caso, a avaliação de desempenho e robustez para diferentes horizontes de predição/controlador poderia ser útil não apenas para sintonia do controlador, mas também para avaliar a conveniência de se atualizar o hardware embar-

cado, de modo a permitir o uso de leis de controle com horizontes maiores.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da FAPESP (Projeto Temático 2011/17610-0) e CNPq (Produtividade em Pesquisa 303714/2014-0 e 300285/2012-4).

Referências

- Afonso, R. J. M. and Galvão, R. K. H. (2012). Uso de conjuntos terminais parametrizados para tratamento de problemas de não-factibilidade em controle preditivo, *Controle & Automação* **23**: 653 – 666.
- Bächle, T., Hentzelt, S. and Graichen, K. (2013). Nonlinear model predictive control of a magnetic levitation system, *Control Engineering Practice* **21**(9): 1250 – 1258.
- Candido, A. S., Galvão, R. K. H. and Yoneyama, T. (2009a). Multi-objective evaluation of predictive controllers for a magnetic levitation system, *Proc. XIII Int. Symposium on Dynamic Problems of Mechanics (DINAME)*.
- Candido, A. S., Galvão, R. K. H. and Yoneyama, T. (2009b). Sintonização multiobjetivo de controladores preditivos empregando goal attainment, *Anais do IX Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI)*.
- Fama, R. C., Lopes, R. V., Milhan, A. P., Galvão, R. K. H. and Lastra, B. A. D. (2005). Predictive control of a magnetic levitation system with explicit treatment of operational constraints, *Proc. 18th Int. Congress of Mechanical Engineering (COBEM)*.
- Gill, P. E., Murray, W. and Wright, M. H. (1981). *Practical optimization*, Academic Press, London.
- Maciejowski, J. (2002). *Predictive Control with Constraints*, Prentice Hall, Harlow, England.
- Mayne, D., Rawlings, J., Rao, C. and Scokaert, P. (2000). Constrained model predictive control: Stability and optimality, *Automatica* **36**(6): 789 – 814.
- Primbs, J. A. and Nevistić, V. (2000). Feasibility and stability of constrained finite receding horizon control, *Automatica* **36**(7): 965 – 971.
- Qin, S. and Badgwell, T. (2003). A survey of industrial model predictive control technology, *Control Engineering Practice* **11**(7): 733–764.
- Qin, Y., Peng, H., Ruan, W., Wu, J. and Gao, J. (2014). A modeling and control approach to magnetic levitation system based on state-dependent ARX model, *Journal of Process Control* **24**(1): 93 – 112.