

PRINCÍPIO DE INVARIÂNCIA PARA SISTEMAS FUZZY, VIA EXTENSÃO DE ZADEH

WENDHEL RAFFA COIMBRA*, LUÍS FERNANDO ALBERTO COSTA†, MOISEIS DOS SANTOS
CECCONELLO‡

*Av. Pedro Pedrossian, 725
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS
Paranaíba, MS, Brasil

†Av. Trabalhador São Carlense, 400
Escola de Engenharia de São Carlos - EESC/USP
São Carlos, SP, Brasil

‡Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367
Universidade Federal de Mato Grosso - UFMT
Cuiabá, MT, Brasil

Emails: wendhel@gmail.com, lfcalberto@usp.br, moiseis@gmail.com

Abstract— In this paper, we present an invariance principle for the class of fuzzy dynamical systems described by a set of autonomous ordinary differential equations, with uncertainty only in the initial condition, via the principle of Zadeh extension. This result is useful to study the asymptotic behavior of solutions of differential equations, in which the derivative of the auxiliary function V along the trajectories of the system, commonly called a Lyapunov function, is non-positive. The invariance principle is useful to obtain estimates of attractors and regions of attraction of fuzzy dynamical systems.

Keywords— Dynamic Systems, Differential Equations, Principle of Invariance, Fuzzy Systems.

Resumo— Neste trabalho, apresentamos o princípio de invariância para a classe de sistemas dinâmicos fuzzy descrita por um conjunto de equações diferenciais ordinárias autônomas, em que consideramos o problema de valor inicial com incertezas apenas na condição inicial, via princípio da extensão de Zadeh. Este resultado permite estudar o comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais, em que a derivada da função auxiliar V , ao longo das trajetórias do sistema, normalmente chamada função de Lyapunov, seja não positiva. O princípio de invariância é útil para obter estimativas de atratores e regiões de atração de sistemas fuzzy.

Palavras-chave— Sistemas Dinâmicos, Equações Diferenciais, Princípio de Invariância, Sistemas Fuzzy

1 Introdução

A teoria de sistemas dinâmicos fuzzy aparece em diversas aplicações em engenharia (Barros, 1997; Mizukoshi, 2004; Barros, 2006; Ceconello, 2010; Ceconello et al., 2015). Em 1981, Kandel e Byatt iniciaram estudos sobre equações diferenciais fuzzy (Kandel, 1981). Em seguida, diversos autores interpretam as equações diferenciais de maneiras distintas, tais como a H -diferenciabilidade adotada por Kaleva e Seikkala em 1987 (Kaleva, 1987; Seikkala, 1987) e, em 1983, Puri e Ralescu a desenvolveram a partir da derivada de Hukuhara (Puri, 1983). Oberguggenberger e Pittschamnn em 1999 e Buckley e Feuring em 2000 apresentaram as soluções fuzzy aplicando a extensão de Zadeh sobre as soluções determinísticas (Oberguggenberger, 1991; Buckley, 2000). Para as equações diferenciais autônomas $\dot{x} = f(x)$ com condição inicial $x(0) = x_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$, as propriedades das soluções fuzzy, via extensão de Zadeh foram apresentadas em 2004 por Mizukoshi (Mizukoshi, 2004), satisfazendo as propriedades de um semigrupo e então as soluções podem ser caracterizadas como um fluxo sobre o conjunto formado pelos subconjuntos fuzzy de U .

Uma versão do Princípio de Invariância será desenvolvida para uma classe de sistemas dinâmicos Fuzzy com incertezas na condição inicial. O Princípio de Invariância de LaSalle é uma das ferramentas mais importantes para estudar o comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais sem a necessidade de conhecer explicitamente as soluções das equações diferenciais. Para isto, uma função escalar auxiliar, muitas vezes denominada função de Lyapunov, é utilizada.

Neste trabalho, iremos estudar equações diferenciais fuzzy via princípio de extensão de Zadeh. O Princípio de Invariância Fuzzy, para equações diferenciais autônomas com incertezas na condição inicial do Problema de Valor Inicial Fuzzy (PVIF), é desenvolvido. Aplicações deste resultado, útil para estimar atratores e regiões de atração, são desenvolvidas.

2 Preliminares

Apresentaremos nesta seção conceitos fundamentais sobre a teoria fuzzy e sistemas dinâmicos fuzzy as quais serão fundamentais para melhor compreensão dos resultados inéditos obtidos na Seção 3.

Definição 2.1 Seja $\mathcal{P}(X)$ o conjunto formado pelos subconjuntos de um conjunto X . Para cada $A \in \mathcal{P}(X)$ definimos a função característica $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ de A por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

O conjunto $\mathcal{C}(X)$ de todas as funções características com domínio em X é isomorfo ao conjunto $\mathcal{P}(X)$ (Negoiita, 1975), e portanto as funções características representam o próprio conjunto.

Cada subconjunto fuzzy F de X é caracterizado por uma função de pertinência $\mu_F : X \rightarrow [0, 1]$, denominada função de pertinência, que associa para cada $x \in X$ o grau de pertinência $\mu_F(x)$ de x em F . A função de pertinência é uma generalização da função característica.

Definição 2.2 Seja X um conjunto não vazio. Um subconjunto fuzzy F de X é um subconjunto $\{(x, \mu_F(x)) : x \in X\}$ de $X \times [0, 1]$ para alguma função $\mu_F : X \rightarrow [0, 1]$.

O conjunto formado por todos os subconjuntos fuzzy de X será denotado por $\mathcal{F}(X)$.

Se $A \in \mathcal{P}(X)$, isto é, $A \subset X$, então $\{(x, \chi_A(x)) : x \in X\}$ é um subconjunto não vazio de $X \times [0, 1]$. Pela Definição 2.2, o subconjunto A determina um subconjunto fuzzy de X que será identificado aqui, com abuso de notação, por χ_A . Para uma melhor distinção, o subconjunto fuzzy χ_A será denominado aqui, como na língua inglesa, um subconjunto *crisp* de X (conjunto usual, no sentido clássico).

Definição 2.3 Dado um subconjunto fuzzy A em $\mathcal{F}(X)$ definimos, para cada $\alpha \in (0, 1]$, o conjunto $[A]^\alpha \subset X$ como sendo o conjunto dos elementos de X tal que o grau de pertinência em A é maior ou igual a α . O conjunto $[A]^\alpha \subset X$ é denominado α -nível de A e é definido por $[A]^\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$ para $\alpha \in (0, 1]$.

Definição 2.4 O 0-nível de um subconjunto fuzzy A é definido por $[A]^0 = \bigcup_{\alpha \in (0, 1]} [A]^\alpha = \overline{\text{supp}(A)}$ onde $\text{supp}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$ é o suporte do subconjunto fuzzy A .

O princípio da extensão de Zadeh se baseia em estender o domínio de uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ para os subconjuntos fuzzy em $\mathcal{F}(X)$. Observe que para cada $A \subset X$, temos que $f(A) \subset Y$. Agora, sendo $A \in \mathcal{F}(X)$, ou seja, A é um subconjunto fuzzy X , então a maneira como a imagem se caracteriza é feita através do Princípio da Extensão de Zadeh, proposta em 1965, conforme a seguinte definição:

Definição 2.5 (Princípio da Extensão de Zadeh)

Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação e A um subconjunto fuzzy de X . A extensão de Zadeh $\hat{f} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ é a aplicação cuja imagem $\hat{f}(A)$ tem a função de pertinência

$$\mu_{\hat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(z)} \mu_A(x) & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset. \end{cases}$$

onde $f^{-1}(z)$ é a pré-imagem de z (não necessariamente a inversa).

2.1 O Subespaço $\mathcal{E}(X)$

Adiante, iremos restringir a análise aos subconjuntos fuzzy de um conjunto X cujos α -níveis são subconjuntos compactos e não vazios em X , isto é, $\mathcal{E}(X) := \{A \in \mathcal{F}(X) : [A]^\alpha \text{ é compacto e não vazio, } \forall \alpha \in [0, 1]\}$.

Notação: 1. Os subconjuntos fuzzy que estão em $\mathcal{E}(X)$ serão denotados por letras minúsculas em negrito para diferenciar dos elementos de X . 2. Os subconjuntos, no sentido clássico, do conjunto $\mathcal{E}(X)$ serão representados aqui por letras maiúsculas em negrito.

A seguir, iremos definir uma métrica sobre $\mathcal{E}(X)$, que será por meio da métrica de Hausdorff para subconjuntos compactos de X .

Definição 2.6 (Kreyszig, 1978) Seja $\mathcal{K}(X)$ o conjunto formado pelos subconjuntos compactos não vazios do espaço métrico (X, d) . Dados os conjuntos A e B em $\mathcal{K}(X)$, a distância entre os conjuntos é dada por: $\text{dist}(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b)$.

A Definição 2.6 é chamada de *pseudométrica* para $\mathcal{K}(X)$, pois $\text{dist}(A, B) = 0 \iff A \subseteq B$. Sendo assim, definimos a distância de Hausdorff entre os conjuntos A e B em $\mathcal{K}(X)$ a seguir.

Definição 2.7 Sejam os conjuntos $A, B \in \mathcal{K}(X)$. A distância de Hausdorff entre A e B é definida por $d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b)\} = \max\{\text{dist}(A, B), \text{dist}(B, A)\}$.

Observe que $(\mathcal{K}(X), d_H)$ é um espaço métrico. Se (X, d) é um espaço métrico completo então $(\mathcal{K}(X), d_H)$ também é um espaço métrico completo (Aliprantis, 2005).

A partir da Definição 2.7, definimos a métrica para o conjunto $\mathcal{E}(X)$.

Definição 2.8 Dados $u, v \in \mathcal{E}(X)$, dizemos que a distância, definida por d_∞ , entre u e v , é dada por $d_\infty(u, v) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} d_H([u]^\alpha, [v]^\alpha)$.

Observação 2.1 É de simples verificação que $(\mathcal{E}(X), d_\infty)$ é um espaço métrico.

Definição 2.9 *Sejam os conjuntos $A, B \subset \mathcal{E}(U)$. A distância entre A e B é definida por $\text{dist}(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d_\infty(x, y)$.*

Definição 2.10 *Dizemos que o conjunto ω é limitado se, para quaisquer $x, y \in \omega$, existe $r > 0$ tal que a distância $d_\infty(x, y) \leq r$.*

Os resultados a seguir são fundamentais para o desenvolvimento dos resultados da Seção 3.

Proposição 2.1 (Cecconello, 2010) *Suponha que $f : A \subset X \rightarrow Y$ seja contínua. Se $u \in \mathcal{E}(X)$ é tal que $[u]^\alpha \subset A, \forall \alpha \in [0, 1]$, então $[\hat{f}(u)]^\alpha = f([u]^\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.*

O princípio da extensão de Zadeh preserva algumas propriedades importantes sobre uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (Barros, 1997) e a principal delas é a continuidade, ou seja, se f é uma função contínua então a aplicação $\hat{f}$ é contínua.

2.2 Problema de Valor Inicial Fuzzy via Extensão de Zadeh

Neste trabalho, denominaremos por sistema dinâmico fuzzy, ou fluxo fuzzy, os sistemas dinâmicos definidos sobre o espaço $\mathcal{E}(X)$, obtidos pelo princípio da extensão de Zadeh de soluções determinísticas de equações diferenciais autônomas. Mizukoshi (2004) apresenta diversas interpretações do problema de valor inicial e uma delas é via princípio de extensão de Zadeh, a qual iremos tratar aqui.

Considere o problema de valor inicial determinístico autônomo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

onde $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Iremos admitir neste trabalho que as soluções do sistema (1) existem para todo $t \in \mathbb{R}$.

Agora, considerando incerteza na condição inicial do sistema (1), temos o Problema de Valor Inicial Fuzzy (PVIF) dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2)$$

onde $x_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.11 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $x_0 \in U$. Dizemos que $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U), t \in \mathbb{R}$ é uma solução fuzzy para a Equação (2) quando $\hat{\varphi}_t(\chi_{\{x_0\}}) = \chi_{\{\varphi_t(x_0)\}}, \forall x_0$, onde $\varphi_t : U \rightarrow U$ é a solução da equação (1).*

Observa-se que, a partir da Definição 2.11, a solução fuzzy coincide com a solução do sistema (1) quando o conjunto x_0 é um conjunto “crisp”.

Partindo da condição em que o PVI possua soluções e que possa ser estendido, então para obter a solução do PVIF com condição inicial fuzzy, o princípio de extensão de Zadeh aplicado nessas soluções de problema determinístico mantém os resultados de existência e unicidade das soluções do problema de valor inicial original.

Proposição 2.2 *Seja $\varphi_t : U \rightarrow U$ o fluxo determinístico do problema (1). Então a extensão de Zadeh de $\varphi_t, \hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U), t \in \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições: a) $\hat{\varphi}_0(x_0) = x_0$; b) $\hat{\varphi}_{t+s}(x_0) = \hat{\varphi}_t \circ \hat{\varphi}_s(x_0)$ para todo $x_0 \in \mathcal{E}(U)$ e $t, s \in \mathbb{R}$.*

2.3 Pontos de Equilíbrio Fuzzy

Definição 2.12 *Dizemos que $x_e \in \mathcal{E}(U)$ é um ponto de equilíbrio fuzzy $\hat{\varphi}_t$ quando $\hat{\varphi}_t(x_e) = x_e$ para todo $t \geq 0$.*

As Proposições 2.3 e 2.4 apresentam equivalências entre os pontos de equilíbrio dos sistemas determinísticos e fuzzy.

Proposição 2.3 (Mizukoshi, 2004) *Seja $x_e \in U$. Então x_e é um ponto de equilíbrio do sistema (1) se, e somente se, χ_{x_e} é um ponto de equilíbrio do sistema (2).*

Proposição 2.4 (Mizukoshi, 2004) *Sejam $x_e \in U$ um ponto de equilíbrio para o sistema determinístico (1) e $\hat{\varphi}_t$ o fluxo fuzzy associado ao fluxo determinístico φ_t . Então valem as seguintes afirmações: a) x_e é estável para φ_t se, e somente se, $\chi_{\{x_e\}}$ é estável para $\hat{\varphi}_t$; b) x_e é assintoticamente estável para φ_t se, e somente se, $\chi_{\{x_e\}}$ é assintoticamente estável para $\hat{\varphi}_t$.*

2.4 Órbitas, Conjuntos Limites e Conjuntos Invariantes

Os conceitos de órbita e conjunto limite definidos para fluxos fuzzy $\hat{\varphi}_t$ são análogos aos conceitos definidos para fluxos em espaços métricos.

Definição 2.13 (Cecconello, 2010) *Definimos uma órbita fuzzy $\gamma(x_0) \subset \mathcal{E}(U)$ de um estado inicial $x_0 \in \mathcal{E}(U)$ como sendo o subconjunto no espaço de fase $\mathcal{E}(U)$ definido por $\gamma(x_0) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \hat{\varphi}_t(x_0) = \{\hat{\varphi}_t(x_0) \in \mathcal{E}(U) : t \in \mathbb{R}\}$.*

Definição 2.14 (Cecconello, 2010) *Seja $B \subset \mathcal{E}(U)$. O conjunto ω -limite fuzzy de B é definido por $\omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \hat{\varphi}_t(B)}$.*

A notação de união deve ser entendida no sentido de obter uma coleção de subconjuntos fuzzy e não interpretada pela definição usual dada por

$\mu_{A \cup B}(x) := \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$. Agora, quando $\mathbf{B}$ é um conjunto unitário, podemos definir o conjunto ω -limite fuzzy de $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(U)$ como sendo o conjunto $\omega(\mathbf{x}_0) = \bigcap_{s \geq 0} \bigcup_{t \geq s} \hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$.

Definição 2.15 (Ceconello, 2010) *Seja $\omega(B), B \subset U$, o ω -limite determinado pelo fluxo determinístico e consideremos o conjunto $\omega(B) \subset \mathcal{E}(U)$ definido por $\omega(B) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset \omega(B)\}$.*

A seguir, estudaremos propriedades de $\omega(B)$ e $\omega(\mathbf{B})$ e suas relações.

Proposição 2.5 (Ceconello, 2010) *Sejam $\omega(A)$ e A subconjuntos de U . O conjunto $\omega(A)$ atrai A pelo fluxo determinístico φ_t se, e somente se, $\omega(A)$ atrai $\mathbf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset A \subset U\}$ pelo fluxo $\hat{\varphi}_t$.*

Como consequência deste resultado, apresentamos o Corolário 2.1.

Corolário 2.1 *Se $[\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)]^\alpha, \forall \alpha \in [0, 1]$ é limitada para $t \geq 0$ pelo fluxo fuzzy então $\omega([\mathbf{x}_0]^0)$ atrai $\mathbf{x}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset [\mathbf{x}_0]^0\}$.*

Lema 2.1 *Se $\omega(B)$ é limitado então $\omega(B)$ é limitado.*

Em 1998, Román-Flores afirma que não se podemos garantir que o conjunto $\omega(B)$ seja um conjunto compacto (Román-Flores, 1998). Dessa forma, apresentamos o seguinte resultado:

Proposição 2.6 (Ceconello, 2010) *Seja $\omega(B)$ um conjunto compacto. Então, o conjunto $\omega(B)$ é fechado e limitado.*

A partir do conjunto $B \subset U$, podemos definir o conjunto $\mathbf{B} \subset \mathcal{E}(U)$ da seguinte maneira: $\mathbf{B} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset B \subset U\}$. Com esta relação entre os conjuntos B e $\mathbf{B}$, é interessante observar também a relação entre os conjuntos $\omega(\mathbf{B})$ e $\omega(B)$, conforme a Proposição 2.7.

Proposição 2.7 *Seja $B \subset U$ e defina $\mathbf{B} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset B \subset U\}$. Então o conjunto $\omega(\mathbf{B})$ está contido em $\omega(B)$, ou seja, $\omega(\mathbf{B}) \subset \omega(B)$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que $\omega(\mathbf{B}) \not\subset \omega(B)$. Como $\omega(B)$ é fechado (Proposição 2.6) então existe $\mathbf{a} \in \omega(\mathbf{B}) - \omega(B)$ e $\varepsilon > 0$, tal que $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \cap \omega(B) = \emptyset$. Como $\omega(B)$ atrai $B \subset U$ pelo fluxo determinístico φ_t , então pela Proposição 2.5 temos que $\omega(B)$ atrai $\mathbf{B}$ pelo fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$, e então $\exists T > 0$ tal que $d_\infty(\mathbf{a}, \hat{\varphi}_t(\mathbf{B})) > \frac{\varepsilon}{2}, \forall t > T$. Por outro lado, sabemos que, pela Definição 2.14, o conjunto ω -limite fuzzy é dado por $\omega(\mathbf{B}) = \bigcap_{s \geq 0} \bigcup_{t \geq s} \hat{\varphi}_t(\mathbf{B})$. Então, $\mathbf{a} \notin \bigcup_{t > T} \hat{\varphi}_t(\mathbf{B}), \forall T$.

Logo, $\mathbf{a} \notin \omega(\mathbf{B})$, o que nos leva a um absurdo. Portanto, segue-se a tese. $\square$

Observação 2.2 *Não podemos afirmar nada a respeito da inclusão $\omega(B) \subset \omega(\mathbf{B})$.*

Os Lemas 2.2 e 2.3 apresentados a seguir serão fundamentais para o desenvolvimento do princípio de invariância para a classe de sistemas dinâmicos fuzzy (Seção 3).

Lema 2.2 *Sejam os conjuntos $\mathbf{S} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset S\}$ e $S' = \{x \in [\mathbf{x}]^0 \subset U : x \in S\}$. Então $S' = S$.*

A importância do resultado a seguir é saber que vale a igualdade em certos conjuntos fuzzy definidos em seus α -cortes. Esses conjuntos são extensões dos conjuntos de nível definidos em sistemas autônomos para o fluxo determinístico.

Lema 2.3 *Sejam os conjuntos $\Lambda_L = \{x : V(x) < L\}, \mathbf{\Lambda}_L = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : [\mathbf{x}]^\alpha \subset \Lambda_L, \forall \alpha \in [0, 1]\}, \mathbf{\Omega}_L = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : [\hat{V}(\mathbf{x})]^\alpha \subset (-\infty, L), \forall \alpha \in [0, 1]\}$ e $\Omega_L = \{x \in [\mathbf{x}]^\alpha \subset \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in [0, 1] : x \in \mathbf{\Omega}_L\}$. Então $\mathbf{\Lambda}_L = \mathbf{\Omega}_L$.*

Apresentamos a seguir o conceito de conjuntos invariantes para o fluxo fuzzy.

Definição 2.16 *Um conjunto $\mathbf{S} \subset \mathcal{E}(U)$ é dito ser invariante (positivamente invariante) pelo fluxo $\hat{\varphi}_t$ se $\hat{\varphi}_t(\mathbf{S}) = \mathbf{S}$ para todo $t \in \mathbb{R} (t \geq 0)$.*

Lema 2.4 *Se $B \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto positivamente invariante pelo fluxo determinístico, então o conjunto $\mathbf{B} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : [\mathbf{x}]^\alpha \subset B, \forall \alpha \in [0, 1]\}$ é positivamente invariante pelo fluxo fuzzy.*

O Lema 2.5 será útil na demonstração do Teorema 3.1 (Princípio de Invariância Fuzzy). Ele explora a relação de invariância com os conjuntos de nível de uma função $\hat{V}$.

Lema 2.5 *Seja o conjunto $\mathbf{\Omega}_L := \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : [\hat{V}(\mathbf{x})]^\alpha \subset (-\infty, L), \forall \alpha \in [0, 1]\}$ com $L \in \mathbb{R}$ e admita que $[\hat{V}(\mathbf{x})]^\alpha \subset (-\infty, 0], \forall \mathbf{x} \in \mathbf{\Omega}_L, \forall \alpha \in [0, 1]$. Então $\mathbf{\Omega}_L$ é positivamente invariante.*

O teorema a seguir estabelece equivalências entre os conjuntos S e $\mathbf{S}$.

Lema 2.6 (Ceconello, 2010) *Se $S \subset U$ é um conjunto assintoticamente estável então existe uma vizinhança W com $S \subset W \subset U$ tal que S atrai conjuntos compactos contidos em W .*

Teorema 2.1 (Cecconello, 2010) *Seja $S \subset U$ um conjunto invariante pelo fluxo determinístico e consideremos o conjunto $S \subset \mathcal{E}(U)$ definido por $S = \{x \in \mathcal{E}(U) : [x]^0 \subset S\}$. Então S   invariante para φ_t se, e somente se, S   invariante para o fluxo $\hat{\varphi}_t$*

O Teorema 2.1   fundamental, pois pela extensão de Zadeh de um fluxo determinístico, conseguimos obter conjuntos invariantes para o fluxo fuzzy. Como caso particular da Defini o 2.15, temos a seguinte rela o entre o ω -limite $\omega(B)$ e $\omega(B)$.

Corolário 2.2 (Cecconello, 2010) *O conjunto $\omega(B), B \subset U$,   invariante por φ_t se, e somente se, o conjunto $\omega(B)$   invariante pelo fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$.*

3 Princípio de Invariância Fuzzy

Nesta se o, apresentamos os principais resultados deste capítulo: o princípio de invariância para a classe de sistemas dinâmicos fuzzy e sua versão global, baseando-se na teoria apresentada em Mizukoshi (2004) e por Cecconello (Cecconello, 2010; Cecconello et al., 2015).

  importante ressaltar que estamos trabalhando com equa es diferenciais aut nomas, considerando apenas incertezas na condi o inicial (PVIF via extensão de Zadeh)

Apresentamos o princípio de invariância fuzzy, resultado este que requer incertezas na condi o inicial de um PVI, tornando-se um PVIF via extensão de Zadeh.

Teorema 3.1 (Princípio de Invariância Fuzzy)

Considere o sistema (2) e sejam $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ fun es de classe C^1 . Sejam $\hat{V} : \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R})$ e $\hat{V} : \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R})$ as extensões de Zadeh de V e $\dot{V}$, respectivamente. Seja $L \in \mathbb{R}$ uma constante real tal que $\Omega_L := \{x \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : [\hat{V}(x)]^\alpha \subset (-\infty, L), \forall \alpha \in [0, 1]\}$ seja limitado. Admita que $[\hat{V}(x)]^\alpha \subset (-\infty, 0], \forall x \in \Omega_L, \forall \alpha \in [0, 1]$. Defina $E := \{x \in \Omega_L : \dot{V}(x) = \{0\}\}$. Seja B o maior conjunto fuzzy invariante contido em E , então toda soluço fuzzy de $\dot{x} = f(x)$ iniciando em Ω_L converge para B quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstra o. Sejam $x_0 \in \Omega_L$ e $\hat{\varphi}_t(x_0)$ o fluxo fuzzy com condi o inicial $x_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ em $t = 0$. Definindo os conjuntos $\Lambda_L, \mathbf{\Lambda}_L$ e Ω_L conforme o Lema 2.3, temos que $\mathbf{\Lambda}_L = \Omega_L$ e então pelo Lema 2.2 podemos afirmar que $\Lambda_L = \Omega_L$. Pelo Lema 2.5, Ω_L   positivamente invariante e então o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t(\cdot)$ permanece em Ω_L para $t \geq 0$. Pela extensão de Zadeh podemos afirmar que a soluço do fluxo fuzzy possui o intervalo maximal $t_+ = +\infty$. Assim, o conjunto ω -

limite $\omega([x_0]^\alpha)$ de $\hat{\varphi}_t(x_0)$ está contido no conjunto $\{x \in \Omega_L : [\hat{V}(x)]^\alpha \subset (-\infty, \sup_{\alpha \in [0, 1]} [\hat{V}(x_0)]^\alpha)\}$. Seja $y \in [x_0]^\alpha$. Então $\varphi_t(y) \in \Omega_L, \forall t$ e sabemos que $\omega(y) \subset \omega([x_0]^\alpha)$   não vazio. Como V   decrescente e $V(\varphi_t(y))$   limitada inferiormente, então $V(\varphi_t(y)) \rightarrow v(y) \in \mathbb{R}$ quando $t \rightarrow \infty$. Como $V(\varphi_t(y))$ tende para $\omega(y)$ então da continuidade da V temos que $V(x) = V(y), \forall x \in \omega(y)$. Da invariância de $\omega(y)$, $\dot{V}(x) = 0, \forall x \in \omega(y)$ e por y ser arbitrário, então $\dot{V}(x) = 0, \forall x \in \omega([x_0]^\alpha)$. Tome $x \in \omega([x_0]^\alpha)$. Pela Defini o 2.15 temos que $[x]^\alpha \subset \omega([x_0]^\alpha), \forall \alpha \in [0, 1]$ e pela Proposi o 2.1 temos que $[\hat{V}(x)]^\alpha = \dot{V}([x]^\alpha), \forall x \in \omega([x_0]^\alpha), \forall \alpha \in [0, 1]$, então $\dot{V}([x]^\alpha) = \{0\}$, pois $[x]^\alpha \subset \omega([x_0]^\alpha)$. Logo $x \in E$ e $\omega([x_0]^\alpha) \subset E$. Portanto, pelo Corolário 2.1 podemos afirmar que $\omega([x_0]^\alpha)$ atrai $\hat{\varphi}_t(x_0)$, isto  , $\hat{\varphi}_t(x_0) \rightarrow \omega([x_0]^\alpha) \subset B$ quando $t \rightarrow \infty$. $\square$

Exemplo 3.1 (Efeito Allee) *Considere o sistema descrito pela seguinte equa o diferencial:*

$$\begin{cases} \dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) \left(\frac{x}{a} - 1\right) \\ x(0) = x_0 > 0, \end{cases} \quad (3)$$

onde denota-se a taxa de reprodu o intríseca por $r > 0$, capacidade suporte por $k > 0$ e o limiar Allee por $a \in (0, k)$.

Observe que para condi es iniciais $x_0 \in \mathbb{R}$ com $x_0 < a$ temos que a popula o vai   extin o. Caso $x_0 \in (a, k)$ temos que a popula o aumenta e   limitada pela capacidade suporte k (Cecconello, 2010). Consideramos então que a condi o inicial do sistema (3) seja fuzzy, isto  , $x_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$. Sabemos que a origem (análogo para $z_e = k$)   um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para φ_t e então pela Proposi o 2.4 temos que a origem, $x_e = \chi_{\{0\}}$ (análogo para $z_e = \chi_{\{k\}}$),   um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para $\hat{\varphi}_t$. Cecconello (2010) afirma que $\hat{\varphi}_t(x_0) \rightarrow \chi_{\{0\}}$ quando $t \rightarrow \infty$ para todo x_0 com $[x_0]^0 \subset [0, a)$ (Análogo para $z_e = \chi_{\{k\}}$, para qualquer x_0 com $[x_0]^0 \subset (a, \infty)$). A fun o $V(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{r(k+a)x^3}{3ka} + \frac{rx^4}{4ka}$   uma fun o de Lyapunov associada ao sistema (3). A derivada da fun o V ao longo das solu es do sistema   dada por: $\dot{V}(x) = \frac{r}{ka}[-akx^2 + (r+1)(k+a)x^3 - (1 + r + \frac{r(k+a)}{ka})x^4] + \frac{r^2[2(k+a)x^5 - x^6]}{(ka)^2}$. Note que a fun o V   definida positiva e radialmente ilimitada. Além disso, $\dot{V} \leq 0$ no intervalo $(-10, 38)$ e então, pela Extensão de Zadeh, temos que $\hat{V}$   radialmente ilimitada e $\hat{V}([x]^\alpha) \subset (-\infty, 0], \forall \alpha \in (0, 1], \forall x \in \Omega_L$ e portanto o conjunto Ω_L   limitado para $L \approx 38$, ou seja, $\Omega_L := \{x \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : [\hat{V}(x)]^\alpha \subset (-\infty, 38), \forall \alpha \in [0, 1]\}$. Logo, as hipóteses do Teorema 3.1 estão satisfeitas e portanto

as soluções tendem para o maior conjunto invariante B contido em $E := \{x \in \Omega_L : \hat{V}(x) = \{0\}\} = \{x \in \Omega_L : x = \{0\}\}$. Como a origem é o único conjunto invariante contido em E , então podemos concluir que as soluções tendem para a origem quando $t \rightarrow \infty$.

A Figura 1 ilustra o Exemplo 3.1.

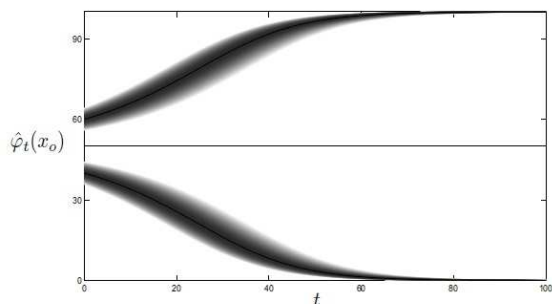


Figura 1: (Cecconello, 2010) Representa a evolução da solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(x_0)$ do sistema (3). Constantes $a = 50, r = 0, 1$ e $k = 100$.

Observação 3.1 Na Figura 1, note que para a condição inicial fuzzy abaixo do limiar Allee ($a = 50$), a evolução da solução fuzzy tende para a origem. Caso esteja acima do limiar Allee, a evolução da solução fuzzy tende para a capacidade suporte ($k = 100$). Quanto mais escuro a solução fuzzy, maior o grau de pertinência e quanto menos escuro, menor o grau de pertinência.

4 Conclusões

Neste trabalho, o princípio de invariância para a classe de sistemas dinâmicos fuzzy foi demonstrado. Para este resultado, consideramos um sistema autônomo em que para o Problema de Valor Inicial Fuzzy (PVIF) apresenta incertezas na condição inicial. O objetivo principal do princípio de invariância fuzzy é estimar atratores e região de estabilidade para classe de sistemas dinâmicos fuzzy, com incertezas apenas na condição inicial de um PVIF, como é o caso do efeito Allee demográfico.

Agradecimentos

Agradecemos a Profa. Dra. Luciana Takata Gomes pela ajuda e ao CNPq.

Referências

Aliprantis, C.D.; Border, K. (2005). Infinite Dimensional Analysis, Springer.

- Barros, L. (1997). Sobre Sistemas Dinâmicos Fuzzy: Teoria e Aplicações, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP - Tese de Doutorado.
- Barros, L.C.; Bassanezi, R. (2006). Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática, Volume 5 de Coleção IMECC - Textos Didáticos. IMECC.
- Buckley, J.J.; Feuring, T. (2000). Fuzzy differential equations, Fuzzy Sets Syst., v. 110, n. 1, p. 43-54.
- Cecconello, M. (2010). Sistemas Dinâmicos em Espaços Métricos Fuzzy - Aplicações em Biomatemática, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP - Tese de Doutorado.
- Cecconello, M., Leite, J., Bassanezi, R. and Brândão, A. (2015). Invariant and attractor sets for fuzzy dynamical systems, Fuzzy Sets and Systems, v. 265, n. 11, p. 99-109.
- Kaleva, O. (1987). Fuzzy differential equations, Fuzzy Sets Syst., v. 24, p. 301-318.
- Kandel, A; Byatt, W. (1981). Fuzzy differential equations, in "Proc. Internat. Conf. Cybernetics and Society".
- Kreyszig, E. (1978). Introductory Functional Analysis With Applications, John Wiley & Sons.
- Mizukoshi, M. (2004). Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Fuzzy, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.
- Negoita, C.V; Ralescu, D. (1975). Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis, Wiley.
- Oberguggenberger, M; Pittschmann, S. (1991). Differential equations with fuzzy parameters, Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems, v. 5, p. 181-202.
- Puri, M.L; Ralescu, D. (1983). Differentials of fuzzy functions, J. Math. Analysis and Applications, v. 91, p. 552-558.
- Román-Flores, H. (1998). The of compactness $e(x)$, Appl. Math. Lett, v. 11, p. 13-17.
- Seikkala, S. (1987). On the fuzzy initial value problem, IEEE Transactions on Automatic Control, v. 24, n. 3, p. 319-330.