

PROJETO DE CONTROLADOR PID VIA LMIS COM ALOCAÇÃO DE POLOS PARA SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM COM ATRASO NO TEMPO

MAYARA CRISTINA DE FARIA WIIRA*, RENATO ALVES BORGES*, EDUARDO STOCKLER TOGNETTI*

*Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, UnB
Brasília, DF, Brasil

Emails: maywiira@hotmail.com, raborges@ene.unb.br, estognetti@ene.unb.br

Abstract— This work proposes LMI conditions for synthesis of PID controllers for D-stability of second order systems subject to time-delay. The conditions yield the closed-loop poles to be in an open area on the left side of the complex plane ensuring a minimum decay rate. Numerical examples were implemented to allow comparisons with other results from the literature.

Keywords— Time-delay, D-stability, LMIs.

Resumo— Este trabalho propõe condições LMI para a síntese de controladores PID para D-estabilidade de sistemas de segunda ordem sujeitos a atrasos no tempo. As condições de síntese garantem a localização dos polos de malha fechada em uma área aberta no lado esquerdo do plano complexo, assegurando resposta com taxa de decaimento mínima. Exemplos numéricos foram implementados para permitir comparações com outros resultados da literatura.

Palavras-chave— Sistemas com atraso no tempo, D-estabilidade, LMIs.

1 Introdução

Os controladores Proporcionais-Integrais-Derivativos (PID) ainda hoje são os mais usados no cotidiano da indústria, representando mais de 90% dos circuitos de regulação implementados (Gonçalves et al., 2008). Apesar das várias técnicas clássicas de sintonia de PIDs, tais como as regras de Ziegler e Nichols (1942) e o projeto baseado no modelo do processo (IMC, do inglês *Internal Model Controller*), há espaço para o estudo de novas técnicas de projeto que atendam critérios de desempenho mais rigorosos para diversas classes de sistemas dinâmicos. Neste contexto, a abordagem baseado no uso de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) tem recebido destaque cada vez maior pois é capaz de lidar com uma ampla classe de problemas de análise, desempenho e síntese de sistemas lineares. A sintonia de controladores PIDs para sistemas de segunda ordem incertos com atraso no tempo conhecido é apresentado em Parada et al. (2011). O caso de atraso no tempo incerto e restrições de norma H_∞ é tratado em Mozelli e Souza (2013) por meio de funcionais do tipo Lyapunov-Krasovskii.

A D-estabilidade consiste na alocação de polos de um sistema linear e invariante no tempo em uma certa região do plano complexo a fim de obter um comportamento desejado em malha fechada. Para um sistema de segunda ordem obter uma taxa mínima de decaimento α , um fator de amortecimento mínimo $\zeta = \cos\theta$ e uma frequência natural não amortecida máxima $\omega = r\sin\theta$, a região de alocação dos polos deve ser a intersecção de um plano a esquerda de α , um setor cônico de ângulo de abertura θ e um disco de raio r , ou seja, os polos devem pertencer ao lugar geométrico

$$s = x + jy \text{ tais que } x < -\alpha < 0, |x + jy| < r \text{ e } |y| < -x\tan\theta.$$

Para um sistema linear dinâmico com atraso no tempo, Bellman e Cooke (1963) e Niculescu (2001) mostraram que é impossível alocar os polos em uma região fechada já que o número de raízes do polinômio característico neste caso é infinito. O problema de D-estabilidade para sistemas lineares com atraso no tempo foi estudado por Chu (2006) e forneceu como resultado condições LMIs que garantem a estabilidade para uma região aberta no lado esquerdo do plano complexo.

A maioria dos processos industriais pode ser satisfatoriamente aproximada por uma função de transferência de segunda ordem com atraso no tempo. Desta forma, a proposta deste trabalho é estender os resultados apresentados em Parada et al. (2011) por meio de condições LMIs que garantam a D-estabilidade para uma região aberta no lado esquerdo do plano complexo para funções de transferência de segunda ordem com atraso no tempo conhecido, reduzindo o problema à factibilidade das LMIs através do uso de softwares computacionais como Sedumi e Yalmip.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. Na Seção 2 é feita a formulação do problema. A Seção 3 apresenta o desenvolvimento do projeto do controlador PID juntamente com as condições LMIs. Exemplos numéricos comparando resultados da literatura são apresentados na Seção 4. Por fim, algumas considerações finais e sugestões de trabalhos futuros são apresentadas na Seção 5.

2 Formulação do problema

Considere o sistema de segunda ordem com atraso no tempo conhecido com a seguinte função de transferência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} e^{-\tau s} \quad (1)$$

e a seguinte representação no espaço de estados aumentado

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2)$$

em que τ é o atraso tempo, $y(t)$ é a saída, o vetor de estados $x(t)$ é dado por $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \int y(t)]'$, e as matrizes A , B e C são:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & 0 \\ b_0 & b_1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C' = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

O controlador que se deseja projetar é da forma

$$PID(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (4)$$

e a lei de controle pode ser dada por

$$u(t) = \begin{bmatrix} k_p & k_d & k_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + k_d b_1 \dot{x}_2(t) \quad (5)$$

ou

$$u(t) = KFx(t) \quad (6)$$

com

$$K = \begin{bmatrix} \frac{k_p}{a - k_d b_1} & \frac{k_d}{a - k_d b_1} & \frac{k_i}{a - k_d b_1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$F = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & 0 \\ -b_1 a_0 & b_0 - b_1 a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Considere também um vetor de distúrbio $w(t)$ para representar uma incerteza não estruturada $\Delta(s)$, ou seja,

$$W(s) = \Delta(s)Y(s) \quad (9)$$

onde $\Delta(s)$ é uma função de transferência causal com norma H_∞ limitada.

Com isso, o sistema em malha fechada, apresentado na Figura 1, é dado por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) + B_w w(t) \\ y(t) = Cx(t) + d_w w(t) \end{cases} \quad (10)$$

em que $A_d = BKF$, e B_w e d_w ponderam a influência do distúrbio no processo.

A função de transferência completa $G_{uy}(s)$ da entrada do controlador $u(t)$ para a saída $y(t)$ é dada por

$$G_{uy}(s) = \frac{G(s)}{1 - C(sI - A)^{-1}B_w \Delta(s) - d_w \Delta(s)} \quad (11)$$

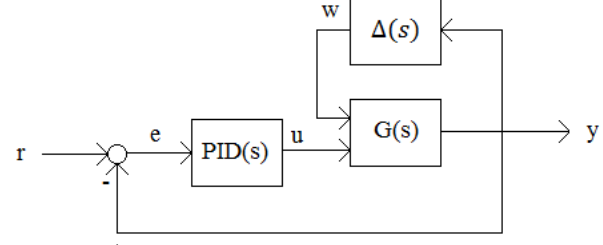


Figura 1: Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.

A região na qual se deseja alocar os polos do sistema em malha fechada é uma região aberta à esquerda de $-\delta$, com $\delta > 0$, isto é, a região que contém os números complexos $s = x + jy$ tais que $x < -\delta$, como mostrado na Figura 2. Observe que uma região aberta para a localização dos polos é necessária visto que o polinômio característico do sistema em malha fechada terá o termo devido ao atraso resultando em um número infinito de polos.

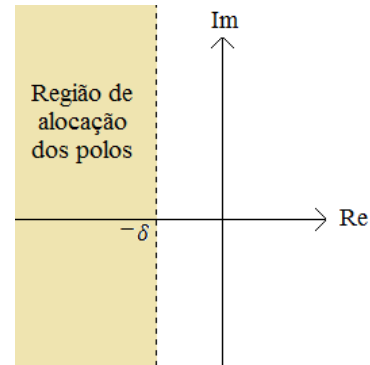


Figura 2: Região de alocação de polos.

3 Projeto do controlador PID

Antes da apresentação do resultado principal os seguintes resultados preliminares são apresentados.

Lema 1 (Zhou et al. (1996)) Seja H_{wy} a função de transferência de $W(s)$ para $Y(s)$ em (10) e considere (9). Se

$$\|H_{wy}(s)\|_\infty \|\Delta(s)\|_\infty \leq 1 \quad (12)$$

então, o sistema (10) é estável.

Lema 2 (Gu (2000)) Para qualquer matriz constante $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $M = M' > 0$, um escalar $\rho > 0$, uma função vetorial $\omega : [0, \sigma] \rightarrow \mathbb{R}^m$, tal

que as integrações a seguir são bem definidas, então

$$\rho \int_0^\rho \omega'(\beta) M \omega(\beta) d\beta \geq \left(\int_0^\rho \omega(\beta) d\beta \right)' M \left(\int_0^\rho \omega(\beta) d\beta \right). \quad (13)$$

O resultado principal é apresentado no teorema abaixo e considera a alocação dos polos em malha fechada em uma área aberta do lado esquerdo do plano complexo.

Teorema 1 *Se existirem matrizes simétricas positivas definidas $R, M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e $L \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$, tal que, para um dado $\tau > 0$ e um dado $\delta > 0$*

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{11} & \tau^2(e^{\delta\tau}B)L + \tau R & \star & \star & \star & \star \\ \star & -\tau^2M - \tau R & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \tau^2R(A + \delta I)' & \tau RC' & \tau B_w & \tau^2L'(e^{\delta\tau}B)' & 0 & 0 \\ \tau^2L'(e^{\delta\tau}B)' & 0 & 0 & -\tau R & 0 & \tau B_w \\ -\tau R & 0 & \tau B_w & \star & -I & d_w \\ \star & -I & d_w & \star & \star & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

$$\Upsilon_{11} = \tau^2(R(A + \delta I)' + (A + \delta I)R + M) - \tau R$$

então o sistema em malha fechada (10) é assintoticamente estável com $\|\Delta(s)\|_\infty < \gamma^{-\frac{1}{2}}$ e possui os polos alocados na região à esquerda de $-\delta$. Os parâmetros do PID são dados por:

$$k_p = \frac{k_1}{1 + k_2b_1}, k_i = \frac{k_2}{1 + k_2b_1}, k_d = \frac{k_3}{1 + k_2b_1} \quad (15)$$

em que $K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3] = L(FR)^{-1}$.

Prova: A prova segue as linhas apresentadas em Parada et al. (2011). Considere o funcional Lyapunov-Krasovskii

$$\begin{aligned} v_{dd}(x(t)) &= x(t)'Px(t) + \int_{t-\tau}^t x(\theta)'Qx(\theta)d\theta \\ &+ \int_{-\tau}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}(\theta)'P\dot{x}(\theta)d\theta d\beta \end{aligned} \quad (16)$$

com

$$\begin{aligned} \dot{v}_{dd}(x(t)) &= \dot{x}(t)'Px(t) + x(t)'P\dot{x}(t) + x(t)'Qx(t) \\ &- x_d'Qx_d + \tau \dot{x}(t)'P\dot{x}(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(\theta)'P\dot{x}(\theta)d\theta \end{aligned} \quad (17)$$

onde $x_d = x(t - \tau)$

Usando o Lema 2, o termo integral do lado direito da expressão acima pode ser substituído por um limitante inferior

$$\frac{1}{\tau} \ddot{z}(t)'P\ddot{z}(t), \ddot{z}(t) = \int_{t-\tau}^t \dot{x}(\theta)d\theta = x(t) - x_d(t) \quad (18)$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \dot{v}_{dd} &\leq \dot{x}(t)'Px(t) + x(t)'P\dot{x}(t) + x(t)'Qx(t) \\ &- x_d'Qx_d + \tau \dot{x}(t)'P\dot{x}(t) - \frac{1}{\tau} \ddot{z}(t)'P\ddot{z}(t). \end{aligned} \quad (19)$$

Utilizando o *Bounded Real Lemma* (Boyd et al., 1994) e impondo $\dot{v}_{dd} + y'y - \lambda^2 w'w < 0$ chega-se na LMI (14). Note que a factibilidade dessa LMI implica que o sistema em malha fechada tem norma H_∞ limitada superiormente por $\lambda = \sqrt{\gamma}$ e, de acordo com o Lema 1, o sistema apresentado na Figura 1 é estável.

A garantia de alocação de polos na região desejada pode ser obtida conforme mostrado em Chu (2006), ou seja, escreve-se a equação característica do sistema em malha fechada

$$F(s) = \det(sI - A - A_d e^{-s\tau}) \quad (20)$$

e define-se a função

$$\begin{aligned} H(\epsilon) &= F(\epsilon - \delta) = \det(\epsilon I - \delta I - A - A_d e^{-(\epsilon - \delta)\tau}) \\ &= \det(\epsilon I - \bar{A} - \bar{A}_d e^{\epsilon\tau}) \end{aligned} \quad (21)$$

onde $\bar{A} = A + \delta I$ e $\bar{A}_d = A_d e^{\delta\tau}$. Assim, se as raízes de $H(\epsilon) = 0$ satisfazem $Re(\epsilon) < 0$, então tem-se $Re(s) < 0$ para as raízes de $F(s)$, o que conclui a demonstração. $\square$

4 Exemplo numérico

No exemplo abaixo foram utilizados os seguintes acrônimos: ZN: Ziegler Nichols, P11a: Parada et al. (2011) (com $\delta = 0.03$), F14a: Felini et al. (2014) (com $\delta = 0.03$, $\mu = 0.01$ e $\alpha = 0.001$), Teo 1a: Teorema 1 (com $\delta = 0.03$), P11b: Parada et al. (2011) (com $\delta = 0.04$), F14b: Felini et al. (2014) (com $\delta = 0.04$, $\mu = 0.01$ e $\alpha = 0.001$) e Teo 1b: Teorema 1 (com $\delta = 0.04$).

Considere o seguinte sistema de segunda ordem estudado em Parada et al. (2011)

$$G(s) = \frac{6(s+1)}{(7s+1)(3s+1) - 21\beta} e^{-5s} \quad (22)$$

que pode ser reescrito da seguinte forma

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0 - \beta} e^{-5s} \quad (23)$$

com $a_0 = 0.0476$, $a_1 = 0.4762$, $b_0 = 0.2857$, $b_1 = 0.2857$, $\tau = 5$ e onde $\beta \leq \beta_{max}$ é um escalar incerto adicionado de modo a modelar os erros nos parâmetros do sistema escolhido com $\beta_{max} = 0.999a_0$.

Se considerarmos $\Delta(s) = \beta\Phi(s)$, com

$$\Phi(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0}, \quad (24)$$

$$B_w = [0 \quad 0 \quad 0]' \quad e \quad d_w = 1 \quad (25)$$

então o sistema pode ser escrito na forma da equação (11). O escalar γ é obtido por $\|\Delta(s)\|_\infty = |\beta| \|\Phi(s)\|_\infty \leq \beta_{max} \|\Phi(s)\|_\infty = \gamma^{-\frac{1}{2}}$.

A sintonia dos controladores PIDs para os métodos utilizados por Parada et al. (2011), Felini et al. (2014) e o proposto neste artigo encontram-se na Tabela 1. A resposta ao degrau de cada um destes controladores pode ser observada nas Figuras 3 e 4 e os critérios de desempenho por eles alcançados são dados na Tabela 2.

Tabela 1: Valores dos parâmetros dos controladores PID projetados.

Método	k_p	k_d	k_i
ZN	0.3124	0.7899	0.0309
P11a	0.2648	0.6084	0.0199
F14a	0.2534	0.5322	0.0254
Teo 1a	0.2212	0.5069	0.0167
P11b	0.3302	0.7327	0.0274
F14b	0.2691	0.5652	0.0269
Teo 1b	0.2604	0.5776	0.0216

Tabela 2: Critérios de desempenho.

Método	ITAE	IAE	OS[%]	Tr[s]	Ts[s]
ZN	513.6	19.9	86.3	19.7	58.8
P11a	455.4	18.2	63.5	19.7	58.8
F14a	800.7	24.9	83.6	19.7	78.4
Teo 1a	580.0	20.4	57.1	20.4	69.4
P11b	396.7	17.5	83.2	19.8	47.8
F14b	750.7	24.2	86.7	19.8	73.1
Teo 1b	529.3	19.8	70.0	19.8	60.8

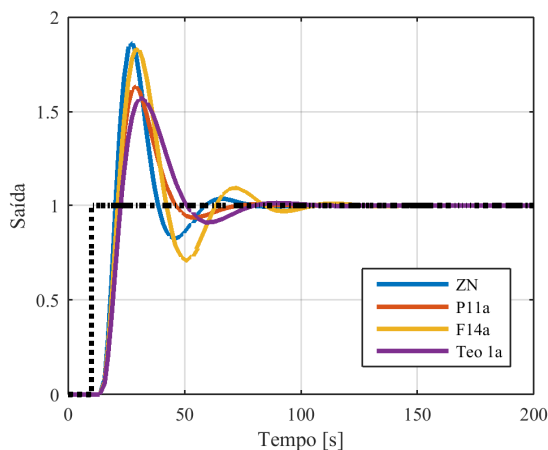


Figura 3: Comparação da resposta dos diferentes PIDs a uma entrada degrau para $\delta = 0.03$.

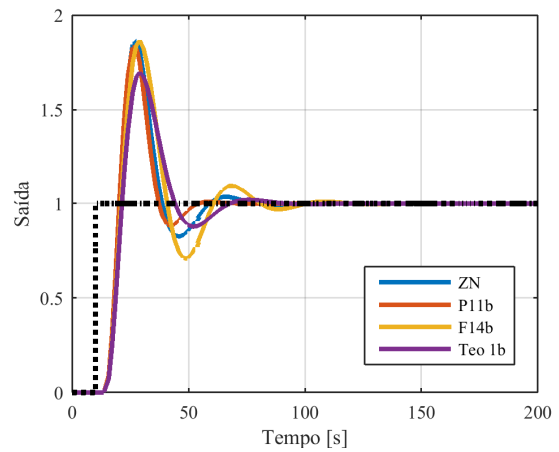


Figura 4: Comparação da resposta dos diferentes PIDs a uma entrada degrau para $\delta = 0.04$.

Analisando as Figuras 3 e 4 e a Tabela 2 pode-se verificar que a vantagem do PID projetado pelo Teorema 1 é a diminuição do sobressaio percentual (OS[%]), sendo que, de modo geral, considerando os índices de erro ITAE e IAE, seu desempenho foi melhor que Felini et al. (2014) e pior que Parada et al. (2011).

No Teorema de Felini et al. (2014) escolheu-se um valor pequeno para a incerteza do atraso ($\mu = 0.01$) e realizou-se uma varredura no parâmetro α de modo a obter os melhores indicadores de desempenho na Tabela 2 obtido com $\alpha = 0.001$.

5 Conclusões

Este trabalho apresenta uma extensão aos resultados de Parada et al. (2011) incorporando a alocação de polos (D-estabilidade) a um sistema com atraso. Comparações numéricas com Felini et al. (2014) e Parada et al. (2011) foram realizadas e observou-se que, para o exemplo numérico apresentado, o método proposto obteve menores valores de sobressaio percentual (OS[%]).

Agradecimentos

Agradamos a FAPDF e CNPq (processos 477487/2013-0 e 480415/2013-7).

Referências

- Bellman, R. E. e Cooke, K. L. (1963). Differential-difference equations.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- Chu, W.-J. M. J. (2006). D-stability for linear continuous-time systems with multiple time delays, *Automatica* **42**(9): 1589–1592.

- Felini, E. P., Souza, F. O. e Mozelli, L. A. (2014). Sintonia de PID via LMIs: Imposição de tempo de acomodação em sistemas com retardo incerto, *Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática*, Belo Horizonte, BH, pp. 1127–1134.
- Gonçalves, E. N., M., R. e Takahashi, R. H. C. (2008). A novel approach for H_2/H_∞ robust PID synthesis for uncertain systems, *Journal of process control* **18**(1): 19–26.
- Gu, K. (2000). An integral inequality in the stability problem of time-delay systems, *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 3, IEEE, pp. 2805–2810.
- Mozelli, L. A. e Souza, F. O. (2013). PID tuning under uncertain conditions: robust LMI design for second-order plus time-delay transfer functions, *11th Workshop on Time-Delay Systems, Part of 2013 IFAC Joint Conference*, pp. 120–125.
- Niculescu, S.-T. (2001). *Delay effects on stability: a robust control approach*, Vol. 269, Springer Science & Business Media.
- Parada, M., Borges, R. A., Sbarbaro, D. e Peres, P. L. D. (2011). Robust PID design for second-order processes with time-delay and structured uncertainties., *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, Vol. 18, pp. 4614–4619.
- Zhou, K., Doyle, J. C. e Glover, K. (1996). *Robust and optimal control*, Vol. 40, Prentice hall New Jersey.