

PLANICIDADE DIFERENCIAL APLICADA AO CONTROLE DE NÍVEL DO PROCESSO DE QUATRO TANQUES

JOSÉ ONIRAM DE A. LIMAVERDE FILHO*, MAYARA CRISTINA DE FARIA WIIRA†, EUGÊNIO LIBÓRIO
FEITOSA FORTALEZA*, EDUARDO STOCKLER TOGNETTI†

**Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, UnB
Brasília, DF, Brasil*

†*Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, UnB
Brasília, DF, Brasil*

Emails: joseoniram@ieee.org , maywiira@hotmail.com, efortaleza@unb.br,
estognetti@ene.unb.br

Abstract— The four-tank system is presented as didactic way to study concepts and properties of minimum and non-minimum phase of multivariable systems, being extensively explored in the process control literature. This work proposes a flatness-based control design for the four-tanks system. The nominal trajectories are planned exploiting the liouvillian character of the nonlinear model, whereas the Jacobian linearization of system around the planned trajectories allows us to obtain an incremental feedback control law to ensure an asymptotic convergence of the trajectory's tracking error to zero. The performance of the tracking controller was evaluated through numerical simulations and compared to the linear quadratic controllers (LQR).

Keywords— Four-tanks process; Differential Flatness; Liouvillian Systems; Trajectory Planning; Nonlinear Control

Resumo— O sistema de quatro tanques se apresenta como modo didático de estudar conceitos e propriedades de sistemas multivariáveis de fase mínima e não-mínima, sendo bastante explorado na literatura de controle de processos. Este trabalho propõe uma abordagem de controle baseada na teoria de planicidade diferencial para o modelo não-linear do processo de quatro tanques. O planejamento das trajetórias nominais é realizado explorando o caráter liouvilliano do sistema, enquanto que a linearização Jacobiana do sistema em torno das trajetórias planejadas permite obter uma lei de controle incremental em malha fechada que elimine o erro de rastreamento de trajetória. Simulações numéricas permitiram avaliar a performance do controlador proposto, além de compará-lo ao controlador linear quadrático (LQR).

Palavras-chave— Processo de Quatro Tanques; Planicidade Diferencial; Sistemas Liouvillianos; Planejamento de trajetória; Controle Não-Linear

1 Introdução

O sistema de quatro tanques, objeto de estudo deste trabalho, foi apresentado em (Johansson, 2000) com o objetivo didático de demonstrar de forma ilustrativa conceitos e propriedades de sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO, do inglês *Multiple Input, Multiple Output*). Além disso, o sistema pode ser tratado como protótipo para aplicações de controle de processo presentes em plantas industriais, principalmente, nos ramos químicos, petroquímicos e de alimentos.

Desde o seu desenvolvimento, o sistema de quatro tanques tem sido estudado e largamente incorporado a laboratórios de controle em universidades em todo o mundo. (Johansson, 2000) obteve resultados satisfatórios com a realização de controle PI descentralizado para o sistema de fase mínima, mas observou que para o sistema de fase não-mínima a resposta era mais lenta. Para este caso, (Mercangöz and Doyle, 2007) mostraram que o controle preditivo fornece resultados significativamente melhores do que o descentralizado. Em (Shneiderman and Palmor, 2010), analisaram-se os efeitos dos atrasos que haviam sido ignorados por (Johansson, 2000) em sua descrição matemática.

Recentemente, (Huang and Sira-Ramirez, 2015) apresentaram uma abordagem de controle ativo de rejeição às perturbações (ADRC, do inglês *Active Disturbance Rejection Control*) associado a teoria de planicidade diferencial. Assumindo simplificações relacionadas as características estruturais do sistema de quatro tanques, trataram os problemas de regulação e acompanhamento de trajetória na presença de distúrbios em sua configuração de fase não-mínima.

Neste trabalho, apresenta-se o modelo não-linear dos quatro tanques como pertencente a uma classe especial de sistemas não-diferencialmente planos que exibem um caráter liouvilliano. Essa característica permite realizar o planejamento de trajetória das variáveis do modelo não-linear tanto para a configuração de fase mínima como não-mínima. Em seguida, explora-se o fato que a linearização Jacobiana do modelo em torno das trajetórias nominais fornece um sistema linear variante no tempo diferencialmente plano. Isso permite projetar um controle de trajetória que complementará o controle nominal, gerando o sinal de controle a ser aplicado diretamente ao modelo não-linear.

O conteúdo do artigo está organizado da se-

guinte maneira. Na Seção 2, apresenta-se a modelagem matemática do sistema não-linear. Na Seção 3, introduz-se conceitos relacionados a teoria de planicidade diferencial, além de descrever as etapas para obter o sistema de controle proposto. Os resultados da implementação do controlador no MATLAB/Simulink são apresentados e discutidos na Seção 4. Por fim, considerações finais e propostas para trabalhos futuros são apresentadas na Seção 5.

2 Modelagem matemática do sistema de quatro tanques

O diagrama esquemático do sistema de quatro tanques apresentado em (Johansson, 2000) pode ser visualizado na Figura 1.

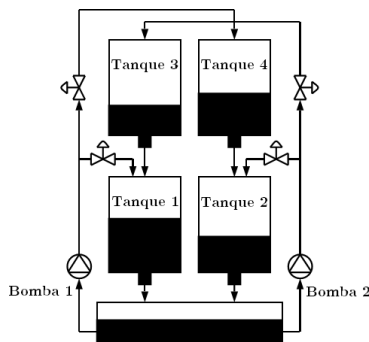


Figura 1: Diagrama esquemático do sistema de quatro tanques. Adaptado de (Gatzke et al., 2000).

Como pode ser observado na Figura 1, o sistema de tanque quádruplo consiste em quatro tanques de água, um reservatório inferior e duas bombas responsáveis pelo controle do nível de água nos tanques. A presença de válvulas permite separar o fluxo de água proveniente das bombas proporcionalmente a uma constante antes de atingir os tanques.

Baseado nos princípios de conservação de massa e na lei de Bernoulli para líquidos incompressíveis, tem-se o seguinte sistema de equações não-lineares que descrevem o processo:

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \frac{1}{A_1}(o_3\sqrt{2gh_3} + \gamma_1 k_1 v_1 - o_1\sqrt{2gh_1}) \\ \dot{h}_2 = \frac{1}{A_2}(o_4\sqrt{2gh_4} + \gamma_2 k_2 v_2 - o_2\sqrt{2gh_2}) \\ \dot{h}_3 = \frac{1}{A_3}((1 - \gamma_2)k_2 v_2 - o_3\sqrt{2gh_3}) \\ \dot{h}_4 = \frac{1}{A_4}((1 - \gamma_1)k_1 v_1 - o_4\sqrt{2gh_4}) \end{cases} \quad (1)$$

onde g é a aceleração da gravidade, enquanto que h_i , A_i e o_i correspondem ao nível de água, a área da seção transversal do tanque e a área da seção transversal do orifício de saída do tanque i , $i = 1, 2, 3, 4$, respectivamente. Os coeficientes de proporcionalidade γ_j , $j = 1, 2$, representam a razão entre os fluxos para os tanques 1 e 4 e para os tanques 2 e 3, respectivamente. A constante de

fluxo e o sinal de controle aplicado na bomba p são dados por k_p e v_p , $p = 1, 2$.

Assumindo os níveis de água h_1 e h_2 como as saídas do processo, o sistema (1) apresenta a característica de mudança de comportamento a depender da configuração das válvulas que determinam a razão entre os fluxos. Mais precisamente, a abertura das válvulas determina se o sistema é de fase mínima ou de fase não-mínima (ver Tabela 1) afetando a estratégia de controle a ser adotada.

Tabela 1: Configuração do sistema

Configuração	Condição
Fase Mínima	$1 < \gamma_1 + \gamma_2 < 2$
Fase Não-Mínima	$0 < \gamma_1 + \gamma_2 < 1$

Ambas configurações serão utilizadas para a validação do controlador proposto, cujo desenvolvimento será apresentado na próxima seção.

3 Planicidade Diferencial

Comumente encontrada em aplicações de robôs móveis, a teoria de planicidade diferencial foi proposta e desenvolvida em (Fliess et al., 1992) com a motivação de solucionar problemas de planejamento e acompanhamento de trajetórias para sistemas não-lineares.

Um sistema é dito diferencialmente plano se apresenta a propriedade de ser possível determinar um conjunto finito de variáveis “endógenas” ao sistema, denominadas saídas planas, de dimensão igual ao de entrada do sistema tal que o estado e a entrada deste possam ser determinados como função dessas saídas planas e de um número finito de suas derivadas sem usar a operação de integração.

A planicidade diferencial permite construir uma realimentação linearizante e um difeomorfismo de tal forma a obter um sistema linear controlável equivalente na forma canônica de Brunovsky, cujo vetor de estado é composto pelas saídas planas e suas derivadas temporais. Dessa forma, ao identificar as saídas planas do sistema, permite-se reduzir tarefas definidas para o sistema global a correspondentes definida em relação às saídas planas.

3.1 Planejamento de trajetória

Dentro desse contexto, encontram-se os sistemas liouvillianos, os quais não são diferencialmente planos, porém é possível identificar um subsistema diferencialmente plano de ordem inferior. As variáveis não pertencentes ao subsistema podem ser expressas em termos de quadraturas de funções diferenciais das saídas planas do subsistema.

Essa característica pode ser observada no modelo não-linear do sistema de quatro tanques, permitindo realizar o planejamento de trajetória a partir das trajetórias nominais definidas para as saídas planas do subsistema.

Mais precisamente, o sistema (1) possui um subsistema diferencialmente plano caracterizado por h_3 e h_4 como as saídas planas. Então, se as trajetórias nominais $h_3^*(t)$ e $h_4^*(t)$ são conhecidas, os controles nominais $v_1^*(t)$ e $v_2^*(t)$ são dados por:

$$v_1^*(t) = \frac{A_4 \dot{h}_4^*(t) + o_4 \sqrt{2gh_4^*(t)}}{(1 - \gamma_1)k_1} \quad (2)$$

$$v_2^*(t) = \frac{A_3 \dot{h}_3^*(t) + o_3 \sqrt{2gh_3^*(t)}}{(1 - \gamma_2)k_2} \quad (3)$$

As trajetórias nominais das variáveis remanescentes $h_1^*(t)$ e $h_2^*(t)$ são obtidas resolvendo as seguintes equações diferenciais em função das saídas planas do subsistema e suas derivadas temporais:

$$\dot{h}_1^*(t) = \frac{-o_1 \sqrt{2gh_1^*(t)} + o_3 \sqrt{2gh_3^*(t)} + \gamma_1 k_1 v_1^*(t)}{A_1} \quad (4)$$

$$\dot{h}_2^*(t) = \frac{-o_2 \sqrt{2gh_2^*(t)} + o_4 \sqrt{2gh_4^*(t)} + \gamma_2 k_2 v_2^*(t)}{A_2} \quad (5)$$

onde as condições iniciais $h_1^*(0)$ e $h_2^*(0)$ são expressas por:

$$h_1^*(0) = \frac{\left[o_3 \sqrt{2gh_3^*(0)} - \frac{\gamma_1 o_4 \sqrt{2gh_4^*(0)}}{(\gamma_1 - 1)} \right]^2}{2o_1^2 g} \quad (6)$$

$$h_2^*(0) = \frac{\left[o_4 \sqrt{2gh_4^*(0)} - \frac{\gamma_2 o_3 \sqrt{2gh_3^*(0)}}{(\gamma_2 - 1)} \right]^2}{2o_2^2 g} \quad (7)$$

dado $h_3^*(0)$ e $h_4^*(0)$ e assumindo $\dot{h}_i(0)$, $i = 1, 2, 3, 4$ igual a zero.

É interessante ressaltar que, apesar de h_1 e h_2 representarem as saídas do sistema (1), o planejamento de trajetória é baseado nas variáveis h_3 e h_4 . Uma das possibilidades para contornar esse impasse é observar as equações (4) e (5) como o sistema de equações de operadores diferenciais não-lineares apresentado a seguir:

$$h_3^*(t) = \frac{A_3 \dot{h}_3^*(t) + \epsilon_1 \epsilon_2 [A_1 \dot{h}_1^*(t) + o_1 \sqrt{2gh_1^*(t)}] - \epsilon_2 [A_2 \dot{h}_2^*(t) + A_4 \dot{h}_4^*(t) + o_2 \sqrt{2gh_2^*(t)}]}{2g[o_3(\epsilon_1 \epsilon_2 - 1)]^2} \quad (8)$$

$$h_4^*(t) = \frac{A_4 \dot{h}_4^*(t) + \epsilon_1 \epsilon_2 [A_2 \dot{h}_2^*(t) + o_2 \sqrt{2gh_2^*(t)}] - \epsilon_1 [A_1 \dot{h}_1^*(t) + A_3 \dot{h}_3^*(t) + o_1 \sqrt{2gh_1^*(t)}]}{2g[o_4(\epsilon_1 \epsilon_2 - 1)]^2} \quad (9)$$

onde $\epsilon_1 = (1 - \gamma_1)/\gamma_1$ e $\epsilon_2 = (1 - \gamma_2)/\gamma_2$.

O seguinte processo iterativo será utilizado para aproximadamente resolver o sistema de equações de operadores acima (Sira-Ramírez and Agrawal, 2004):

$$h_{3k+1}^* = \frac{A_3 \dot{h}_{3k}^* + \epsilon_1 \epsilon_2 [A_1 \dot{h}_{1k}^* + o_1 \sqrt{2gh_{1k}^*}] - \epsilon_2 [A_2 \dot{h}_{2k}^* + A_4 \dot{h}_{4k}^* + o_2 \sqrt{2gh_{2k}^*}]}{2g[o_3(\epsilon_1 \epsilon_2 - 1)]^2} \quad (10)$$

$$h_{4k+1}^* = \frac{A_4 \dot{h}_{4k}^* + \epsilon_1 \epsilon_2 [A_2 \dot{h}_{2k}^* + o_2 \sqrt{2gh_{2k}^*}] - \epsilon_1 [A_1 \dot{h}_{1k}^* + A_3 \dot{h}_{3k}^* + o_1 \sqrt{2gh_{1k}^*}]}{2g[o_4(\epsilon_1 \epsilon_2 - 1)]^2} \quad (11)$$

sendo (t) omitido para facilitar a leitura das equações.

Assumindo h_{30}^* e h_{40}^* como constantes e a partir do conhecimento de $h_1^*(t)$ e $h_2^*(t)$, têm-se que as sequências (10) e (11) representam aproximadamente as expressões de $h_3^*(t)$ e $h_4^*(t)$ quando $k \rightarrow \infty$. Consequentemente, permitindo obter $v_1^*(t)$ e $v_2^*(t)$.

3.2 Controle de Trajetória

A partir do planejamento de trajetória, tem-se que a linearização Jacobiana do sistema (1) em torno das trajetórias nominais fornece o seguinte sistema linear variante no tempo:

$$\dot{\mathbf{h}}_\delta = \mathbf{A}(t)\mathbf{h}_\delta + \mathbf{B}(t)\mathbf{v}_\delta \quad (12)$$

onde $\mathbf{h}_\delta = \mathbf{h} - \mathbf{h}^*(t)$ e $\mathbf{v}_\delta = \mathbf{v} - \mathbf{v}^*(t)$ correspondem ao vetor de estado e de entradas incrementais, respectivamente. As matrizes $\mathbf{A}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$ são dadas por:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \frac{-o_1 \sqrt{2g}}{2A_1 \sqrt{h_1^*(t)}} & 0 & \frac{o_3 \sqrt{2g}}{2A_1 \sqrt{h_3^*(t)}} & 0 \\ 0 & \frac{-o_2 \sqrt{2g}}{2A_2 \sqrt{h_2^*(t)}} & 0 & \frac{o_4 \sqrt{2g}}{2A_2 \sqrt{h_4^*(t)}} \\ 0 & 0 & \frac{-o_3 \sqrt{2g}}{2A_3 \sqrt{h_3^*(t)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-o_4 \sqrt{2g}}{2A_4 \sqrt{h_4^*(t)}} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} \\ 0 & \frac{(1 - \gamma_2)k_2}{A_3} \\ \frac{(1 - \gamma_1)k_1}{A_4} & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Como apresentado em (Sira-Ramírez and Agrawal, 2004), a equivalência entre controlabilidade e planicidade diferencial é direta para sistemas lineares, ou seja, se o sistema é controlável, então é diferencialmente plano, e vice-versa.

O critério de controlabilidade está relacionado ao posto da matriz de controlabilidade $\mathbf{C}_K(t)$, sendo determinada através da formulação apresentada em (Silverman and Meadows, 1967):

$$\mathbf{C}_K(t) = \left[\mathbf{B}(t), (\mathbf{A}(t) - \frac{d}{dt})\mathbf{B}(t), \dots, (\mathbf{A}(t) - \frac{d}{dt})^{(n-1)}\mathbf{B}(t) \right] \quad (15)$$

Mais precisamente, se o posto de $\mathbf{C}_K(t)$ é completo durante um intervalo de tempo finito, então o sistema é uniformemente controlável nesse intervalo. Isso garante a existência de uma matriz $\mathbf{C}(t)$ dada por:

$$\mathbf{C}(t) = \left[\mathbf{b}_1(t), \dots, (\mathbf{A}(t) - \frac{d}{dt})^{(\theta_1-1)}\mathbf{b}_1(t), \dots, \mathbf{b}_m(t), \dots, (\mathbf{A}(t) - \frac{d}{dt})^{(\theta_m-1)}\mathbf{b}_m(t) \right]_{n \times n} \quad (16)$$

onde n e m correspondem a ordem e ao número de entradas do sistema, respectivamente. Além disso, θ_i , $i = 1, \dots, m$ são os índices de controlabilidade de Kronecker de (12), os quais devem satisfazer $\sum_i \theta_i = n$.

A partir disso, as saídas planas de um sistema linear variante no tempo podem ser expressas por (Sira-Ramírez and Agrawal, 2004):

$$\mathbf{F}_\delta = \begin{bmatrix} F_{1\delta} \\ \vdots \\ F_{m\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_m \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1}(t) \mathbf{h}_\delta \quad (17)$$

onde $\phi_j, j = 1, \dots, m$ são vetores linha de ordem n dados por:

$$\phi_j = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] \quad (18)$$

com a posição do elemento unitário de ϕ_j obtida por $(\sum_{i=1}^j \theta_i)$.

É possível mostrar que o sistema (12) deixa de ser uniformemente controlável quando $h_i^*(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$ é zero, ou seja, na situação em que os quatro tanques estão vazios. Evitando essa singularidade, o sistema linearizado é uniformemente controlável e, consequentemente, diferencialmente plano.

Os índices de controlabilidade correspondem ao número de vezes necessários para derivar saídas planas incrementais no sentido de obter a parametrização diferencial do sistema. Assumindo os índices de controlabilidade $\theta_1 = 2$ e $\theta_2 = 2$, têm-se que as saídas planas incrementais do sistema (12) e suas derivadas temporais são dadas por:

$$F_{1\delta} = \alpha_1(t)h_{1\delta} + \alpha_2(t)h_{2\delta} + \alpha_3(t)h_{3\delta} + \alpha_4(t)h_{4\delta} \quad (19)$$

$$\dot{F}_{1\delta} = \alpha_5(t)h_{1\delta} + \alpha_6(t)h_{2\delta} + \alpha_7(t)h_{3\delta} + \alpha_8(t)h_{4\delta} \quad (20)$$

$$\ddot{F}_{1\delta} = \alpha_9(t)h_{1\delta} + \alpha_{10}(t)h_{2\delta} + \alpha_{11}(t)h_{3\delta} + \alpha_{12}(t)h_{4\delta} + \alpha_{13}(t)v_{1\delta} + \alpha_{14}(t)v_{2\delta} \quad (21)$$

$$F_{2\delta} = \eta_1(t)h_{1\delta} + \eta_2(t)h_{2\delta} + \eta_3(t)h_{3\delta} + \eta_4(t)h_{4\delta} \quad (22)$$

$$\dot{F}_{2\delta} = \eta_5(t)h_{1\delta} + \eta_6(t)h_{2\delta} + \eta_7(t)h_{3\delta} + \eta_8(t)h_{4\delta} \quad (23)$$

$$\ddot{F}_{2\delta} = \eta_9(t)h_{1\delta} + \eta_{10}(t)h_{2\delta} + \eta_{11}(t)h_{3\delta} + \eta_{12}(t)h_{4\delta} + \eta_{13}(t)v_{1\delta} + \eta_{14}(t)v_{2\delta} \quad (24)$$

onde $\alpha_1(t) - \alpha_{14}(t)$ e $\eta_1(t) - \eta_{14}(t)$ são coeficientes variantes no tempo que podem ser pré-computados durante a etapa de planejamento de trajetória.

A partir disso, pode-se montar a seguinte equação matricial $\mathbf{F} = \mathbf{M}\mathbf{H}$ com:

$$\mathbf{H} = [h_{1\delta} \ h_{2\delta} \ h_{3\delta} \ h_{4\delta} \ v_{1\delta} \ v_{2\delta}]^T \quad (25)$$

$$\mathbf{F} = [F_{1\delta} \ \dot{F}_{1\delta} \ \ddot{F}_{1\delta} \ F_{2\delta} \ \dot{F}_{2\delta} \ \ddot{F}_{2\delta}]^T \quad (26)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha_1(t) & \alpha_2(t) & \alpha_3(t) & \alpha_4(t) & 0 & 0 \\ \alpha_5(t) & \alpha_6(t) & \alpha_7(t) & \alpha_8(t) & 0 & 0 \\ \alpha_9(t) & \alpha_{10}(t) & \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \alpha_{13}(t) & \alpha_{14}(t) \\ \eta_1(t) & \eta_2(t) & \eta_3(t) & \eta_4(t) & 0 & 0 \\ \eta_5(t) & \eta_6(t) & \eta_7(t) & \eta_8(t) & 0 & 0 \\ \eta_9(t) & \eta_{10}(t) & \eta_{11}(t) & \eta_{12}(t) & \eta_{13}(t) & \eta_{14}(t) \end{bmatrix} \quad (27)$$

Invertendo a matriz $\mathbf{M}$, obtém-se a parametrização diferencial das variáveis do sistema linearizado em função das saídas planas e de suas derivadas temporais. Assim, os controles incrementais $v_{1\delta}$ e $v_{2\delta}$ são expressos por:

$$v_{1\delta} = C_1(t)F_{1\delta} + C_2(t)\dot{F}_{1\delta} + C_3(t)\ddot{F}_{1\delta} + C_4(t)F_{2\delta} + C_5(t)\dot{F}_{2\delta} + C_6(t)\ddot{F}_{2\delta} \quad (28)$$

$$v_{2\delta} = C_7(t)F_{1\delta} + C_8(t)\dot{F}_{1\delta} + C_9(t)\ddot{F}_{1\delta} + C_{10}(t)F_{2\delta} + C_{11}(t)\dot{F}_{2\delta} + C_{12}(t)\ddot{F}_{2\delta} \quad (29)$$

onde os coeficientes $C_1(t) - C_6(t)$ e $C_7(t) - C_{12}(t)$ correspondem aos elementos da penúltima e da última linha da matriz $\mathbf{M}^{-1}$, respectivamente.

Sendo diferencialmente plano, a partir das equações (28) e (29), o sistema (12) é portanto equivalente, sob uma alteração de coordenadas de variáveis de entrada, ao seguinte sistema linear MIMO na forma canônica de Brunovsky:

$$\begin{cases} \ddot{F}_{1\delta} = v_1 \\ \ddot{F}_{2\delta} = v_2 \end{cases} \quad (30)$$

Assim, pode-se propor um controle de acompanhamento de trajetória para o sistema (30):

$$v_1 = \ddot{F}_{1\delta}^* - k_{11}[\dot{F}_{1\delta} - \dot{F}_{1\delta}^*(t)] - k_{01}[F_{1\delta} - F_{1\delta}^*(t)] \quad (31)$$

$$v_2 = \ddot{F}_{2\delta}^* - k_{12}[\dot{F}_{2\delta} - \dot{F}_{2\delta}^*(t)] - k_{02}[F_{2\delta} - F_{2\delta}^*(t)] \quad (32)$$

com (k_{11}, k_{01}) e (k_{12}, k_{02}) de tal forma que $p_1(s) = s^2 + k_{11}s + k_{01}$ e $p_2(s) = s^2 + k_{12}s + k_{02}$ possuam suas raízes com a parte real estritamente negativa.

Como se deseja estabilizar o sistema linearizado em torno da origem para garantir que o erro de trajetória seja nulo, logo se assume que as trajetórias nominais para $F_{1\delta}$, $F_{2\delta}$ e suas respectivas derivadas temporais sejam nulas. Assim, as expressões de v_1 e v_2 se resumem a:

$$v_1 = -k_{11}\dot{F}_{1\delta} - k_{01}F_{1\delta} \quad (33)$$

$$v_2 = -k_{12}\dot{F}_{2\delta} - k_{02}F_{2\delta} \quad (34)$$

A partir de (30), têm-se que $\ddot{F}_{1\delta} = v_1$ e $\ddot{F}_{2\delta} = v_2$, logo podem ser substituídas nas expressões dos controles incrementais $v_{1\delta}$ e $v_{2\delta}$. Assim, como $v_1(t) = v_1^*(t) + v_{1\delta}$ e $v_2(t) = v_2^*(t) + v_{2\delta}$, obtém-se que:

$$v_{1\delta}(t) = v_1^*(t) + C_1(t)F_{1\delta} + C_2(t)\dot{F}_{1\delta} + C_3(t)v_1 + C_4(t)F_{2\delta} + C_5(t)\dot{F}_{2\delta} + C_6(t)v_2 \quad (35)$$

$$v_{2\delta}(t) = v_2^*(t) + C_7(t)F_{1\delta} + C_8(t)\dot{F}_{1\delta} + C_9(t)v_1 + C_{10}(t)F_{2\delta} + C_{11}(t)\dot{F}_{2\delta} + C_{12}(t)v_2 \quad (36)$$

onde $v_1(t)$ e $v_2(t)$ correspondem aos sinais de controle aplicados no sistema não-linear.

Portanto, desde que $F_{1\delta}$, $F_{2\delta}$ assintoticamente converjam para zero, então se garante que as variáveis incrementais de estado também convergem a zero. Isso equivale a dizer que as variáveis do sistema (1) convergem localmente para suas respectivas trajetórias nominais.

4 Simulações Numéricas

Nessa seção, resultados de simulação do sistema de quatro tanques serão apresentados tanto para a configuração de fase mínima como a de fase não-mínima com o objetivo de validar a performance do controlador proposto.

Os parâmetros do sistema utilizados nas simulações foram os mesmos utilizados em (Johansson, 2000), os quais podem ser visualizados na Tabela 2. Assume-se também que, inicialmente, os tanques estão vazios, ou seja, $h_1(0)$, $h_2(0)$, $h_3(0)$ e $h_4(0)$ são iguais à zero.

Tabela 2: Parâmetros do modelo não-linear do processo de quatro tanques.

Parâmetro	Fase Mínima	Fase Não-Mínima
A_1, A_3	28 cm ²	
A_2, A_4	32 cm ²	
o_1, o_3	0,071 cm ²	
o_2, o_4	0,057 cm ²	
g	981 cm/s ²	
k_1, k_2	[3,33, 3,35] cm ³ /Vs	[3,14, 3,29] cm ³ /Vs
γ_1, γ_2	[0,70, 0,60]	[0,43, 0,34]
v_1, v_2	0 < v_1, v_2 < 5 V	

Assumindo um tempo de simulação $t_s = 1250$ s, as referências para h_1 e h_2 foram definidas como funções degrau iniciadas em 5 cm e com um salto para 6 cm nos instantes $t = 400$ s e $t = 700$ s, respectivamente.

Na abordagem por planicidade diferencial, define-se o planejamento de trajetória para $h_1^*(t)$ e $h_2^*(t)$ como as trajetórias descritas na Tabela 3. As funções $g_1(t)$ e $g_2(t)$ são polinômios de sétima ordem variando de 5 a 6 dentro dos seus intervalos, cujas derivadas até terceira ordem são nulas. Os instantes de tempo t_i , $i = 1, 2, 3, 4$, são 400, 550, 700 e 850, respectivamente.

Tabela 3: Planejamento de trajetória para $h_1^*(t)$ e $h_2^*(t)$.

	$0 \leq t < t_1$	$t_1 \leq t < t_2$	$t_2 \leq t < t_3$	$t_3 \leq t < t_4$	$t_4 \leq t < t_s$
$h_1^*(t)$	5	$g_1(t)$	6	6	6
$h_2^*(t)$	5	5	5	$g_2(t)$	6

A partir disso, inicia-se o planejamento da trajetória em relação à $h_3^*(t)$ e $h_4^*(t)$ a partir solução iterativa descrita pelas equações (8) e (9). Para $k = 2$, já foi possível obter uma aproximação satisfatória de $h_3^*(t)$ e $h_4^*(t)$.

Antes de obter $v_1^*(t)$ e $v_2^*(t)$, recalculam-se as trajetórias $h_1^*(t)$ e $h_2^*(t)$ a partir das equações (4) e (5). Isso se fez necessário para manter uma relação diferencial entre as trajetórias nominais.

Os ganhos do controlador proposto foram definidos a partir de polinômios $p_i(s)$, $i = 1, 2$, idênticos com raízes iguais a $-1,25$ e $-0,0375$, como pode ser observado na Tabela 4.

Tabela 4: Parâmetros do controlador por planicidade diferencial.

Parâmetro	Fase Mínima	Fase Não-Mínima
k_{01}, k_{02}	0,0469	
k_{11}, k_{12}	1,2875	

Os resultados da implementação do controlador proposto foram comparados com os obtidos pelo controlador linear quadrático (LQR, do inglês *Linear Quadratic Regulator*) de realimentação de estados com ação integral e alocação de polos via LMIs (Costa et al., 2013). As restrições de alocação de pólos foram sobressinal inferior a 1% e tempo de acomodação inferior a 200 segundos tanto para a fase mínima quanto para a fase não-mínima.

Tanto para configuração de fase mínima e como a de fase não-mínima, as respostas dos níveis h_1 e h_2 a mudança de referência e os respectivos sinais de controle v_1 e v_2 para ambos controladores podem ser visualizadas nas Figuras 2 a 5.

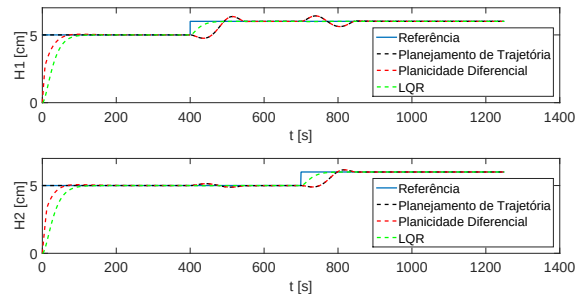


Figura 2: Resposta dos níveis h_1 e h_2 a mudança de referência do sistema em fase mínima.

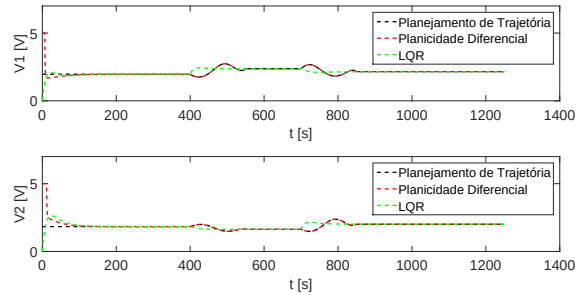


Figura 3: Sinais de controle v_1 e v_2 para o sistema em fase mínima.

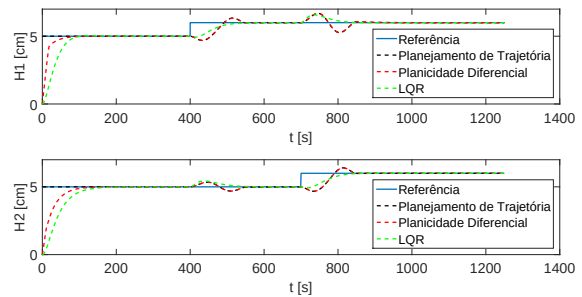


Figura 4: Resposta dos níveis h_1 e h_2 a mudança de referência do sistema em fase não-mínima.

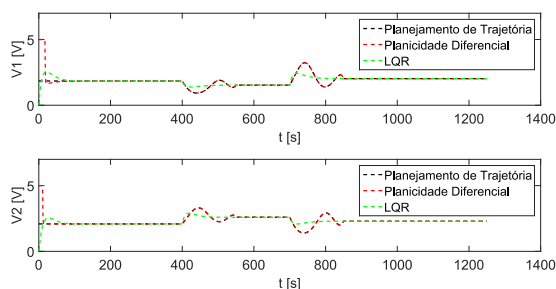


Figura 5: Sinais de controle v_1 e v_2 para o sistema em fase não-mínima.

Para fins de comparação, utilizaram-se os seguintes índices de desempenho computados a partir das respostas h_1 e h_2 e da referência apresentadas nas Figuras 2 e 4: Integral dos Erros ao Quadrado (ISE, do inglês *Integral Squared Error*), Integral do módulo dos erros (IAE, do inglês *Integral Absolute Error*) e Integral do módulo dos erros ponderada pelo tempo (ITAE, do inglês *Integral Time-weighted Absolute Error*). Os resultados destes índices no sistema em malha fechada para ambos controladores podem ser visualizados na Tabela 5.

Tabela 5: Índices de desempenho do controlador baseado na planicidade diferencial e do LQR.

Técnica	Índice	Fase Mínima			Fase Não-Mínima		
		h_1	h_2	Média	h_1	h_2	Média
Planicidade Diferencial	ISE	121,32	142,77	132,04	157,86	192,71	175,28
	IAE	36,99	40,44	38,72	42,98	48,42	45,70
	ITAE	188,88	208,87	198,87	228,28	273,82	251,05
LQR	ISE	269,18	273,24	271,21	275,57	286,85	281,21
	IAE	57,89	58,35	58,12	58,61	59,84	59,22
	ITAE	348,88	352,97	350,92	355,43	366,45	360,94

Analisando as Figuras 2 e 4, verifica-se que as respostas para o sistema de fase não-mínima mostram-se mais lentas que as para fase mínima refletindo em piores índices de desempenho para a fase não-mínima, conforme já era esperado.

Quanto aos sinais de controle, as Figuras 3 e 5 mostram que o controlador baseado na planicidade diferencial apresenta ação de controle mais rápida, no entanto, mais bruscas o que leva a uma maior exigência dos atuadores nos instantes iniciais.

Por fim, a Tabela 5 confirma que para ambas as configurações de fase o controlador baseado na planicidade diferencial obteve melhor desempenho comparado ao controlador LQR.

5 Conclusões

Este trabalho apresentou o projeto de um controlador baseado na planicidade diferencial aplicado ao sistema não-linear de quatro tanques e comparou os seus resultados com o controlador LQR, obtendo melhor performance tanto para a fase mínima quanto para a fase não-mínima.

Em trabalhos futuros, os autores desejam implementar o controlador projetado em uma banca didática a fim de observar o comportamento

do sistema físico real. Além disso, propõe-se também adicionar um sistema de rejeição de distúrbios conforme descrito em (Rigatos, 2015) visando comparar com os resultados apresentados em (Huang and Sira-Ramirez, 2015).

Agradecimentos

Agradecemos ao CNPQ e à FAP-DF pela oportunidade de levar ao domínio público a produção científica desse trabalho.

Referências

- Costa, M. V. S., Campos, J. C. T., Almeida, O. M. and Pinto, V. P. (2013). Análise e controle multivariável robusto d-lqi otimizado via lmis, *Anais do XI SBAI - Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*.
- Fliess, M., Lévine, J., Martin, P. and Rouchon, P. (1992). Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats, *C. R. Acad. Sciences* **315**: 619–624.
- Gatzke, E. P., Meadows, E. S., Wang, C. and Doyle, F. J. (2000). Model based control of a four-tank system, *Computers & Chemical Engineering* **24**(2): 1503–1509.
- Huang, C. and Sira-Ramirez, H. (2015). A flatness based active disturbance rejection controller for the four tank benchmark problem, *American Control Conference (ACC), 2015, IEEE*, pp. 4628–4633.
- Johansson, K. H. (2000). The quadruple-tank process: a multivariable laboratory process with an adjustable zero, *Control Systems Technology, IEEE Transactions on* **8**(3): 456–465.
- Mercangöz, M. and Doyle, F. J. (2007). Distributed model predictive control of an experimental four-tank system, *Journal of Process Control* **17**(3): 297–308.
- Rigatos, G. G. (2015). *Nonlinear control and filtering using differential flatness approaches: applications to electromechanical systems*, Vol. 25 of *Studies in Systems, Decision and Control (SSDC)*, Springer.
- Shneiderman, D. and Palmor, Z. (2010). Properties and control of the quadruple-tank process with multivariable dead-times, *Journal of Process Control* **20**(1): 18–28.
- Silverman, L. M. and Meadows, H. E. (1967). Controllability and observability in time-variable linear systems, *Siam Journal On Control* **5**(1): 64–73.
- Sira-Ramírez, H. and Agrawal, S. K. (2004). *Differentially Flat Systems*, Control Engineering Series, Marcel Dekker.