

UM MÉTODO APRIMORADO PARA TRATAMENTO DE RESTRIÇÕES ASSIMÉTRICAS DE SAÍDA EM CONTROLE PREDITIVO ROBUSTO EMPREGANDO DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

EDUARDO HENRIQUE DOS SANTOS*, ROBERTO KAWAKAMI HARROP GALVÃO*

**Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Divisão de Engenharia Eletrônica
12228-900 São José dos Campos, SP, Brasil*

Emails: eduardo.ime12@gmail.com, kawakami@ita.br

Abstract— A key feature of Model-based Predictive Control (MPC) is the capacity of handling constraints. However, constraint violation may occur if the MPC formulation does not take into account uncertainties on the plant model. A possible approach for the treatment of uncertainties consists of robust model-based predictive control (RPMC) formulations based on the use of linear matrix inequalities (LMI). However, such formulations were originally developed for the use of symmetric constraints only. This paper presents an improved RPMC method for asymmetric constraints using pseudo-references determined as part of the optimization problem. A case study involving a simulation model is presented for illustration.

Keywords— Model-based predictive control, linear matrix inequalities, robust control, asymmetric constraints.

Resumo— O controle preditivo baseado em modelo (MPC) se sobressai perante outras técnicas de controle sobretudo pela capacidade para tratamento de restrições. Contudo, caso a formulação MPC não considere as incertezas do modelo da planta, as restrições impostas poderão ser violadas. Para o tratamento de modelos com incertezas, pode-se empregar formulações de controle preditivo robusto baseado em modelo (RPMC) que utilizam desigualdades matriciais lineares (LMI). Tais formulações, no entanto, foram originalmente desenvolvidas apenas para o caso de restrições simétricas. Este trabalho apresenta um método RPMC aprimorado para o tratamento de restrições assimétricas de saída por meio de pseudo-referências determinadas como parte do problema de otimização. Para fins de exemplo, apresenta-se um estudo de caso com um modelo de simulação.

Palavras-chave— Controle preditivo baseado em modelo, desigualdades matriciais lineares, controle robusto, restrições assimétricas.

1 Introdução

O Controle Preditivo Baseado em Modelo (*Model-based Predictive Control*, MPC) abrange um conjunto de métodos que utilizam a solução de um problema de otimização com horizonte móvel para determinação das ações de controle a serem aplicadas à planta. O cálculo envolvido, e repetido em cada período de amostragem, emprega explicitamente o modelo da planta para vincular os valores futuros dos estados e controles no funcional de custo (Maciejowski, 2002). Um dos motivos que tem tornado o MPC vastamente utilizado em aplicações industriais é a sua capacidade de incorporar restrições sobre os controles e estados de uma maneira sistemática (Camacho and Bordons, 1999), o que possibilita melhores rendimentos sobre o processo e maior segurança de operação (Rossiter, 2003).

No entanto, caso haja descasamento entre o modelo real e a representação nominal utilizada na otimização, o desempenho esperado para o sistema pode ficar degradado, eventualmente com violação de restrições ou mesmo instabilidade. Dessa forma, são necessárias novas tratativas robustas para o MPC (*Robust Model-based Predictive Control*, RPMC) que levem em considerações as incertezas do modelo na otimização.

Pioneiramente Kothare et al. (1996) apresen-

taram um RPMC com horizonte de predição infinito empregando desigualdades matriciais lineares (*Linear Matrix Inequalities*, LMIs) para o tratamento de incertezas de modelo, sujeito a restrições simétricas sobre entradas e saídas da planta. Tal metodologia possui garantias de factibilidade recursiva e convergência assintótica robusta. Avanços subsequentes à metodologia proposta apresentaram formulações LMI menos conservadores (Cuzzola et al., 2002), utilização de realimentação de saída (Wan and Kothare, 2008), extensão a sistemas não lineares (Wan and Kothare, 2003), dentre outros aprimoramentos.

Tais formulações derivadas de (Kothare et al., 1996), no entanto, foram desenvolvidas apenas para o caso de restrições simétricas. Alguns trabalhos subsequentes propuseram métodos para o tratamento de restrições assimétricas no âmbito do RPMC (Yu et al., 2012; Dorofieiev et al., 2014). No entanto, esses métodos acabam recorrendo a uma simetrização conservadora das restrições de saída, possibilitando a exploração da assimetria apenas nas variáveis de controle.

Nesse contexto, (Matos et al., 2010) abordou um tratamento heurístico para assimetrias de saída com o inconveniente de não garantir a factibilidade recursiva. Tal problema foi contornado em (Cavalca et al., 2011) com a proposição de

um novo método que impõe o chaveamento programado de pseudo-referências em sistemas SISO (*Single-Input Single-Output*). Contudo, essa formulação faz uso de algoritmos auxiliares para determinação das pseudo-referências, aumentando a complexidade do problema. Além disso, o procedimento de chaveamento introduz oscilações indesejadas no sinal de controle, que na prática poderiam provocar um maior desgaste dos atuadores.

Com base no exposto, o presente artigo apresenta um método RPMC aprimorado para o tratamento de restrições assimétricas de saída por meio de pseudo-referências determinadas como parte do problema de otimização. O artigo está estruturado da seguinte forma. A Seção 2 apresenta o desenvolvimento da formulação RPMC adotada. A Seção 3 aborda o algoritmo de rastreamento de pseudo-referências pré-determinadas apresentado em (Cavalca et al., 2011). A Seção 4 apresenta o novo método proposto para a otimização de pseudo-referências durante a tarefa de controle. A Seção 5 apresenta um exemplo ilustrativo e, finalmente, a Seção 6 traz as conclusões obtidas, bem como sugestões para trabalhos futuros.

2 Controle Preditivo Robusto

Considere um sistema com dinâmica representada por:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (1)$$

em que $x(k) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é o vetor de estados, $u(k) \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ o vetor de entradas de controle e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ matrizes incertas. Assume-se que as matrizes A e B pertencem a um politopo Ω o qual tem seus vértices representados por (A_i, B_i) , $i = 1, 2, \dots, L$, ou seja:

$$(A, B) = \sum_{i=1}^L \lambda_i (A_i, B_i), \quad (2)$$

com $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L$ escalares desconhecidos que satisfazem a combinação convexa:

$$\sum_{i=1}^L \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \quad (3)$$

Suponha que as variáveis de saída estejam relacionadas com os estados de acordo com:

$$y(k) = Cx(k) \quad (4)$$

sendo $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ uma matriz conhecida. Assuma, ainda, que as p variáveis de entrada e as q variáveis de saída estejam restritas, conforme:

$$|u_r(k)| \leq u_{r,max}, \quad r = 1, 2, \dots, p, \quad (5)$$

$$|y_r(k)| \leq y_{r,max}, \quad r = 1, 2, \dots, q, \quad (6)$$

em que u_r representa a r -ésima entrada de controle, y_r a r -ésima saída e $u_{r,max}$, $y_{r,max}$ os respectivos limitantes.

O problema no âmbito do RMPC consiste na procura de uma lei de controle para (1) que satisfaça (5) e (6) e minimize o valor de um custo $J_\infty(k)$ tomando a pior situação possível para quaisquer arranjos de matrizes $(A, B) \in \Omega$, ou seja:

$$\min_{\hat{u}(k+j|k), j \geq 0} \left(\max_{(A,B) \in \Omega} J_\infty(k) \right) \quad (7)$$

com $J_\infty(k)$ definido por:

$$J_\infty(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \|\hat{x}(k+j|k)\|_S^2 + \|\hat{u}(k+j|k)\|_R^2 \quad (8)$$

onde $S > 0$ e $R > 0$ são matrizes de pesos positivo-definidas e $\hat{x}(*|k)$ e $\hat{u}(*|k)$ denotam os valores futuros preditos, a partir do instante k , para os vetores x e u , respectivamente. Para este problema de otimização com horizonte infinito é adotada a parametrização $\hat{u}(k+j|k) = F_k \hat{x}(k+j|k)$, em que $F_k \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é uma matriz de ganho de realimentação de estado ótima a ser determinada em cada instante de amostragem k . Doravante é assumido que o vetor de estados $x(k) = x(k|k)$ possa ser diretamente medido.

O problema (7) pode ser reformulado a partir da minimização de um limitante superior γ para $J_\infty(k)$ (Kothare et al., 1996):

$$\min_{\gamma, Q > 0, X, Y} \gamma \quad (9)$$

sujeito ao seguinte conjunto de desigualdades matriciais lineares:

$$\begin{bmatrix} Q & x(k) \\ \star & 1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & A_i Q + B_i Y \\ \star & \gamma I & 0 & S^{1/2} Q \\ \star & \star & \gamma I & R^{1/2} Y \\ \star & \star & \star & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (11)$$

$$i = 1, 2, \dots, L$$

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ \star & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (12)$$

$$X_{r,r} \leq u_{r,max}^2, \quad r = 1, 2, \dots, p \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} Q & (A_i Q + B_i Y)^T C_r^T \\ \star & y_{r,max}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (14)$$

$$r = 1, \dots, q, \quad i = 1, 2, \dots, L$$

sendo L o número de vértices de Ω , $X_{r,r}$ o elemento da diagonal principal da r -ésima linha de X e C_r a r -ésima linha da matriz C . Os símbolos $\star$ denotam elementos transpostos das respectivas matrizes. Por brevidade de notação, o problema (9) sujeito a (10), (11), (12), (13) e (14) será denotado por $\mathbb{P}(x(k))$.

A cada instante de tempo k procura-se resolver $\mathbb{P}(x(k))$ e aplica-se a entrada de controle $u(k) = F_k x(k)$ com $F_k = YQ^{-1}$, sendo $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ encontradas pela otimização. Em

caso de factibilidade em $k = 0$, garante-se factibilidade recursiva pela aplicação de $u(k)$, bem como a convergência dos estados para a origem com o atendimento das restrições (Kothare et al., 1996).

Se o problema envolve a condução do estado a um ponto de equilíbrio $x_{ss} \neq 0$, pode-se empregar uma mudança de variáveis da forma:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(k) &= x(k) - x_{ss}, \\ \tilde{u}(k) &= u(k) - u_{ss}\end{aligned}\quad (15)$$

sendo u_{ss} o valor do controle em regime estacionário (Kothare et al., 1996). Com isso determina-se F_k a partir da solução de $\mathbb{P}(\tilde{x}(k))$ e aplica-se o seguinte controle ao sistema:

$$\tilde{u}(k) = F_k(x(k) - x_{ss}) + u_{ss} \quad (16)$$

3 Algoritmo de controle empregando pseudo-referências

Caso existam assimetrias nas restrições, ou seja:

$$\begin{cases} u_{r,min} \leq u_r(k) \leq u_{r,max}, & r = 1, 2, \dots, p, \\ y_{r,min} \leq y_r(k) \leq y_{r,max}, & r = 1, 2, \dots, q, \end{cases} \quad (17)$$

pode-se adotar limitantes mais restritivos para cada uma das entradas e saídas, impondo-se:

$$\begin{cases} |u_r(k)| \leq \min(|u_{r,max}|, |u_{r,min}|), \\ |y_r(k)| \leq \min(|y_{r,max}|, |y_{r,min}|), \end{cases} \quad (18)$$

para a r -ésima entrada e a r -ésima saída, respectivamente.

No entanto, a imposição (18) limita ainda mais a operação do sistema, perdendo tanto em excursão das variáveis de controle bem como das variáveis de saída. Este é, no entanto, o preço que se paga pelo emprego desta formulação quando existirem assimetrias nas restrições. Alternativamente, (Cavalca et al., 2011) apresentou um método para solução do problema com restrições assimétricas para uma saída $y(k)$ escalar. O método envolve o uso de dois algoritmos. O primeiro deles, o **Algoritmo PR**, determina um conjunto de pseudo-referências $y_{ss,i}$. O segundo, o **Algoritmo CPR**, realiza as transições entre as pseudo-referências durante a tarefa de controle.

Considerando limitantes de saída $y_{max} > 0$, $y_{min} < 0$, o método, doravante denominado por CGY2011, será apresentado para o caso $|y_{max}| < |y_{min}|$. O tratamento do caso $|y_{max}| > |y_{min}|$ é similar e encontra-se também descrito em (Cavalca et al., 2011).

Supõe-se ainda que o conjunto $X_{ss} \subset \mathbb{R}^n$ de possíveis pontos de equilíbrio para o estado da planta tenha sido previamente determinado. Considera-se que o sistema tenha dinâmica integrativa (isto é, com $u_{ss} = 0$ em qualquer ponto de equilíbrio x_{ss}) e que o controle esteja sujeito a uma restrição simétrica da forma $|u(k)| \leq u_{max}$.

3.1. Algoritmo PR

Passo 1 Faça $i = 1$ e determine $y_{ss,0}$, $x_{ss,0} \in X_{ss}$, ξ_0 e $\bar{y}_0$, tais que:

$$y_{ss,0} = \frac{y_{max} + y(0)}{2} \quad (19)$$

$$Cx_{ss,0} = y_{ss,0} \quad (20)$$

$$\xi_0 = x(0) - x_{ss,0} \quad (21)$$

$$\bar{y}_0 = y_{max} - y_{ss,0} \quad (22)$$

Passo 2 Enquanto $|y_{ss,i-1}| > y_{max}$ faça:

$$y_{ss,i} = \frac{y_{max} + y_{ss,i-1}}{2} \quad (23)$$

$$Cx_{ss,i} = y_{ss,i} \quad (24)$$

$$\xi_i = x_{ss,i-1} - x_{ss,i} \quad (25)$$

$$\bar{y}_i = y_{max} - y_{ss,i} \quad (26)$$

$$i = i + 1; \quad (27)$$

com $x_{ss,i} \in X_{ss}$.

Passo 3 Faça $i_{max} = i$ e $y_{ss,i_{max}} = 0$.

Passo 4 Resolva $\mathbb{P}(\xi_i)$ com o limitante $\bar{y}_i$ em lugar de y_{max} para $i = 0, 1, \dots, i_{max}$ e denote a solução resultante por $(\tilde{\gamma}_i, \tilde{Q}_i, \tilde{Y}_i)$. ■

3.2. Algoritmo CPR

Passo 1 Faça $k = 0$, $i = 0$ (inicialização).

Passo 2 Leia $x(k)$.

Passo 3 Se $i < i_{max}$ faça:

$$\tilde{x}_{i+1}(k) = x(k) - x_{ss,i}$$

e verifique se $\tilde{x}_{i+1}^T(k)(\tilde{Q}_{i+1})^{-1}\tilde{x}_{i+1}(k) < 1$. Apenas em caso positivo faça $i = i + 1$ e retorne ao início do **Passo 3**.

Passo 4 Faça $\tilde{x}_i(k) = x(k) - x_{ss,i}$. Resolva $\mathbb{P}(\tilde{x}_i(k))$ com o limitante $\bar{y}_i$ em lugar de y_{max} para a obtenção de (γ_k, Q_k, Y_k) .

Passo 5 Determine $F_k = Y_k(Q_k)^{-1}$ e aplique $u(k) = F_k\tilde{x}_i(k)$ à planta.

Passo 6 Espere pelo próximo instante de amostragem, faça $k = k + 1$ e retorne ao **Passo 2**. ■

Vale salientar que o uso deste método pode infligir modos desnecessários de vibração nos atuadores, em consequência do chaveamento brusco que ocorre entre as pseudo-referências. Tal problema ficará evidente ao se apresentar um exemplo de aplicação na Seção 5.

4 Método proposto

Assim como em (Cavalca et al., 2011), considera-se que o sistema tenha dinâmica integrativa, com $u_{ss} = 0$ em qualquer ponto de equilíbrio x_{ss} . Desse modo, no estado estacionário, a partir de (1), tem-se $x_{ss} = Ax_{ss}$. Portanto, x_{ss} deve satisfazer

$$(I - A)x_{ss} = \mathbf{0}_{n \times 1} \quad (28)$$

para qualquer A pertencente ao politopo de vértices $A_1, A_2, \dots, A_L$, sendo $\mathbf{0}_{n \times 1}$ o vetor nulo de n componentes. Para isso, é suficiente impor que a identidade (28) seja satisfeita nos vértices $A_i, i = 1, 2, \dots, L$. Com efeito, se $(I - A_i)x_{ss} = \mathbf{0}_{n \times 1}$, $i = 1, 2, \dots, L$, então dados $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L$, satisfazendo (3), tem-se que:

$$\begin{aligned} (I - A)x_{ss} &= (I - \sum_{i=1}^L \lambda_i A_i)x_{ss} \\ &= \sum_{i=1}^L \lambda_i (I - A_i)x_{ss} = \mathbf{0}_{n \times 1} \end{aligned} \quad (29)$$

Assim, será imposta a seguinte restrição sobre x_{ss} :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (I - A_1) \\ (I - A_2) \\ \vdots \\ (I - A_L) \end{bmatrix}}_{H \in \mathbb{R}^{(nL) \times n}} x_{ss} = \mathbf{0}_{(nL) \times 1} \quad (30)$$

Supõe-se que a matriz H tenha posto $h < n$, de modo que a equação (28) admita uma infinidade de soluções, além da trivial ($x_{ss} = 0$). Tais soluções podem ser parametrizadas na forma:

$$x_{ss} = \mathcal{H}z, \quad z \in \mathbb{R}^{(n-h) \times 1} \quad (31)$$

sendo $\mathcal{H}$ uma matriz cujas colunas formam uma base para o espaço nulo de H e z um vetor cujos elementos ditam a combinação linear das colunas de $\mathcal{H}$.

Deseja-se que o estado $x(k)$ seja conduzido a x_{ss} enquanto x_{ss} também converge para a origem. Agregar-se-á, então, um limitante superior ξ para o quadrado da norma de x_{ss} impondo-se

$$x_{ss}^T x_{ss} \leq \xi \quad (32)$$

que equivale, a partir de (31) e do complemento de Schur (Boyd et al., 1994), a:

$$\begin{bmatrix} I & \mathcal{H}z \\ \star & \xi \end{bmatrix} \geq 0 \quad (33)$$

Assume-se que a planta tenha uma entrada ($p = 1$), com valor de equilíbrio nulo ($u_{ss} = 0$) e restrição da forma $|u(k)| \leq u_{max}$. Considera-se ainda que haja uma variável de saída $y(k)$ com limitantes assimétricos, isto é:

$$y_{min} \leq y(k) \leq y_{max}, \quad (34)$$

onde $y_{min} < 0$, $y_{max} > 0$ e $|y_{min}| \neq |y_{max}|$. Fazendo uso de uma pseudo-referência y_{ss} a se determinar, define-se a variável:

$$\tilde{y}(k) = y(k) - y_{ss} \quad (35)$$

em que $y_{ss} = Cx_{ss}$ com $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. Assim, de (34) e (35), deve-se ter:

$$y_{min} - y_{ss} \leq \tilde{y}(k) \leq y_{max} - y_{ss} \quad (36)$$

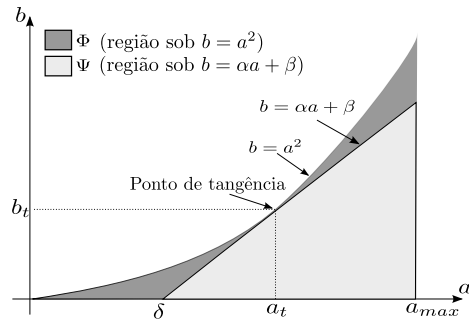


Figura 1: Regiões delimitadas pela parábola $b = a^2$ (em cinza escuro) e reta $b = \alpha a + \beta$ (em cinza claro, sobreposto ao cinza escuro).

A nova variável $\tilde{y}(k)$ estará restrita ao intervalo $\Pi = [y_{min} - y_{ss}, y_{max} - y_{ss}]$ que não é necessariamente simétrico, pois depende diretamente da variável y_{ss} . Fazendo uso da formulação RPMC apresentada na Seção 2 (Kothare et al., 1996), será imposto um novo intervalo máximo de restrição simétrica sobre $\tilde{y}(k)$ da forma:

$$-a \leq \tilde{y}(k) \leq a, \quad \text{com } a > 0, \quad (37)$$

ou seja, $\tilde{y}(k) \in \tilde{\Pi} = [-a, a]$ com $\tilde{\Pi} \subseteq \Pi$.

Caso o limitante superior a imposto em (37) satisfaça as restrições:

$$\begin{cases} a \leq y_{ss} - y_{min} \\ a \leq y_{max} - y_{ss} \end{cases} \quad (38)$$

tem-se a garantia de que (36) também será atendida. Na situação de igualdade dos intervalos $\tilde{\Pi}$ e Π , obtém-se o máximo valor possível para a :

$$a_{max} = \frac{y_{max} - y_{min}}{2} \quad (39)$$

Com a adoção do intervalo $\tilde{\Pi}$ para a saída, modifica-se (14) para a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} Q & (A_i Q + B_i Y)^T C^T \\ \star & a^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (40)$$

$$i = 1, 2, \dots, L$$

o que torna o problema não linear para a variável a (a ser determinada). Para contornar tal dificuldade, propõe-se, como primeiro passo, a introdução de uma variável adicional b e a imposição de:

$$\begin{bmatrix} Q & (A_i Q + B_i Y)^T C^T \\ \star & b \end{bmatrix} \geq 0, \quad (41)$$

$$i = 1, 2, \dots, L \quad \text{e}$$

$$b \leq a^2 \quad (42)$$

em lugar de (40). Contudo, a restrição (42) ainda envolve uma não linearidade sobre a e define uma região Φ não convexa no plano $a \times b$ como ilustrado na Figura 1. Desse modo, como segundo passo, propõe-se a aproximação de Φ por uma região convexa Ψ tal que $\Psi \subset \Phi$. No presente trabalho, a região Ψ adotada foi aquela delimitada pela

reta $b = \alpha a + \beta$ tangente à parábola $b = a^2$ em algum ponto de abscissa a_t , sendo $0 \leq a_t \leq a_{max}$. Dessa forma, o intervalo de possíveis valores para a é dado por:

$$\delta \leq a \leq a_{max} \quad (43)$$

em que $\delta = -\beta/\alpha$ é o ponto de cruzamento entre a reta $b = \alpha a + \beta$ e o eixo de abscissas na Figura 1.

Assim sendo, o problema de otimização com restrições assimétricas para a saída passa a ser formulado como:

$$\min_{\gamma, Q > 0, X, Y, \xi, a, b, z} \xi + \rho\gamma, \quad (44)$$

sujeito a:

$$\begin{bmatrix} Q & (x(k) - \mathcal{H}z) \\ \star & 1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (45)$$

$$\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & A_i Q + B_i Y \\ \star & \gamma I & 0 & S^{1/2} \\ \star & \star & \gamma I & R^{1/2} Y \\ \star & \star & \star & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (46)$$

$i = 1, 2, \dots, L.$

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ \star & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad \text{com } X \leq u_{max}^2 \quad (47)$$

$$\begin{bmatrix} Q & (A_i Q + B_i Y)^T C^T \\ \star & b \end{bmatrix} \geq 0, \quad (48)$$

$i = 1, 2, \dots, L$

$$\begin{bmatrix} I & \mathcal{H}z \\ \star & \xi \end{bmatrix} \geq 0 \quad (49)$$

$$a \leq -y_{min} + C\mathcal{H}z \quad (50)$$

$$a \leq y_{max} - C\mathcal{H}z \quad (51)$$

$$b \leq \alpha a + \beta \quad (52)$$

$$-\frac{\beta}{\alpha} \leq a \leq a_{max} \quad (53)$$

em que $\rho > 0$ é um peso associado a γ e α e β são constante determinadas previamente a partir do ponto de tangência da Figura 1. Para cada $k \geq 0$, resolve-se o problema (44), sujeito às LMIs (45) a (53), determina-se $F_k = YQ^{-1}$ e aplica-se o controle $u(k) = F_k(x(k) - \mathcal{H}z)$ à planta.

Observação 1. Os parâmetros α e β da reta $b = \alpha a + \beta$ e o ponto δ de interseção com o eixo das abscissas podem ser determinados trivialmente pelas relações de tangência com a parábola $b = a^2$ em algum ponto a_t , de forma que:

$$\begin{cases} \alpha = 2a_t \\ \beta = -a_t^2 \\ \delta = \frac{a_t}{2} \end{cases} \quad (54)$$

Em princípio, pode-se escolher qualquer a_t no intervalo $[0, a_{max}]$ como ponto de tangência. Convém, no entanto, escolher algum a_t de forma a

permitir que os novos possíveis valores de a em (43) contemplem também o caso do menor intervalo simétrico possível dadas as restrições assimétricas (34), ou seja:

$$\min(y_{max}, |y_{min}|) \in [\delta, a_{max}] \quad (55)$$

lembrando que $\delta = a_t/2$ e $a_{max} = (y_{max} - y_{min})/2$. Assim se procedendo, quando a saída $y(k)$ estiver próxima da origem, estará intrínseco na lógica do otimizador o caso mais restritivo para a saída. Escolheu-se neste trabalho a_t da forma:

$$a_t = \min(y_{max}, |y_{min}|) \quad (56)$$

que garantidamente atende (55).

5 Exemplo de aplicação

Com a finalidade de ilustrar o uso do método proposto, foi realizada uma simulação para um sistema do tipo duplo integrador (Cavalca et al., 2011) com as seguintes matrizes de modelo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} \kappa, \quad (57)$$

$$C = [1 \quad 0, 2],$$

em que $T = 0,5s$ foi o tempo de amostragem considerado e κ é um fator de ganho incerto no intervalo $0,9 \leq \kappa \leq 1,1$. As restrições para o controle e saída são tais que $|u(k)| \leq 5$, $y_{min} = -10$ e $y_{max} = 0,1$. Com esses limitantes para a saída determina-se de (39) que $a_{max} = 5,05$ e, de acordo com (56), $a_t = y_{max} = 0,1$. Sendo assim, de (54), obtém-se $\alpha = 0,2$ e $\beta = -0,01$. O valor de peso no custo (44) foi tomado como $\rho = 10^{-4}$, sendo ainda adotadas as seguintes matrizes de peso para os estados e controle assim como em (Cavalca et al., 2011):

$$S = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 0,01 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = 100. \quad (58)$$

O resultado da simulação a partir de um estado inicial $x(0) = [-10, 0]^T$, com $\kappa = 0,9$, pode ser visualizado nas Figuras 2 e 3.

Na Figura 2 observa-se qualitativamente uma resposta mais rápida para a saída $y(k)$ pelo método aqui proposto, respeitando o limitante superior y_{max} . Com efeito, o tempo necessário para que tal saída chegasse a 2% do valor inicial foi de apenas 4s, bem abaixo dos 13,5s pelo método CGY2011. Adicionalmente, como se pode observar na Figura 3, o sinal de controle $u(k)$ obtido com o método CGY2011 exibe um padrão oscilatório, resultado do chaveamento entre as pseudo-referências. Com o uso do método proposto as alterações na pseudo-referência y_{ss} se dão de maneira mais gradual, como mostra a Figura 4, o que reduz a inserção de vibrações indesejadas no atuador. Vale também observar que os valores de y_{ss} obtidos durante o processo de otimização atingem a origem por volta de 4s (próximo ao tempo em que ocorre o primeiro chaveamento com o método CGY2011).

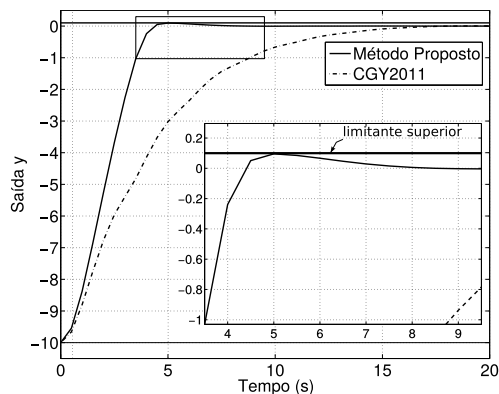


Figura 2: Variável de saída y . As linhas horizontais indicam os limitantes impostos.

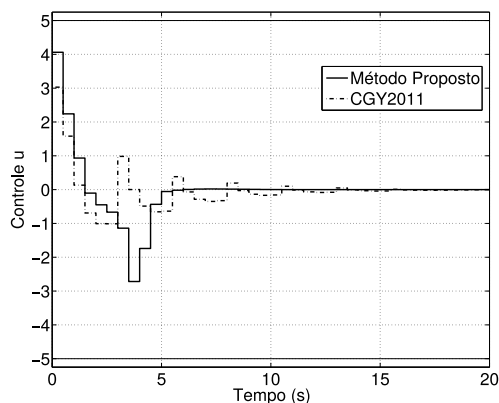


Figura 3: Variável de controle u . As linhas horizontais indicam os limitantes impostos.

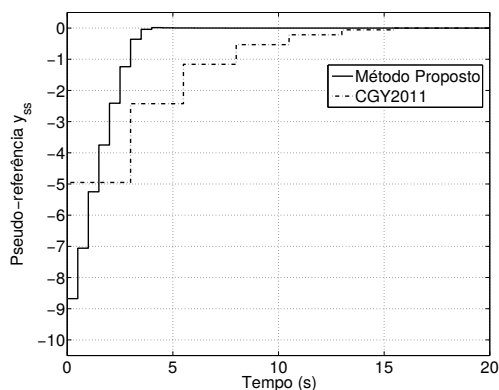


Figura 4: Evolução da pseudo-referência.

6 Conclusões

Este trabalho apresentou um método aprimorado para o tratamento de restrições assimétricas de saída em controle preditivo robusto empregando LMIs. Para esta finalidade, foi apresentado um novo método para a determinação de pseudo-referências durante o processo de otimização. Tal método se baseia apenas no uso de LMIs, não recorrendo a algoritmos adicionais para o cálculo do controle ótimo. Os resultados evidenciam que o método proposto proporciona respostas mais rápidas e controle menos oscilatório, quando confrontado com uma proposta anterior (Cavalca et al., 2011). Investigações futuras po-

derão centralizar esforços na extensão do método para assimetrias também nas variáveis de controle.

Agradecimentos

À FAPESP (2011/17610-0) e CNPq (Produtividade em Pesquisa 303714/2014-0).

Referências

- Boyd, S., L. El Ghaoui, E. F. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, USA.
- Camacho, E. and Bordons, C. (1999). *Model Predictive Control*, Springer, London, UK.
- Cavalca, M. S. M., Galvão, R. K. H. and Yoneyama, T. (2011). Robust model predictive control using linear matrix inequalities for the treatment of asymmetric output constraints, *Journal of Control Science and Engineering*. Article ID485784.
- Cuzzola, F. A., Geromel, J. C. and Morari, M. (2002). An improved approach for constrained robust model predictive control, *Automatica* **38**: 1183–1189.
- Dorofieiev, Y. I., Lyubchyk, L. M. and Nikulchenko, A. A. (2014). Robust stabilizing inventory control in supply networks under uncertainty of external demand and supply time-delays, *Journal of Computer and Systems Sciences International* **53**: 761–775.
- Kothare, M. V., Balakrishnan, V. and Morari, M. (1996). Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities, *Automatica* **32**(10): 1361–1379.
- Maciejowski, J. M. (2002). *Predictive Control with Constraints*, Prentice-Hall, Harlow, UK.
- Matos, M. S., Galvão, R. K. H. and Yoneyama, T. (2010). Robust model predictive control for a magnetic levitation system employing linear matrix inequalities, *ABCM Symposium Series in Mechatronics* **4**: 147–155.
- Rossiter, J. A. (2003). *Model-based Predictive Control - a Practical Approach*, CRC Press, New York, USA.
- Wan, Z. and Kothare, M. V. (2003). Efficient scheduled stabilizing model predictive control for constrained nonlinear systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **13**(3-4): 331–246.
- Wan, Z. and Kothare, M. V. (2008). A framework for design of scheduled output feedback model predictive control, *Journal of Process Control* **18**(3-4): 391–398.
- Yu, S., Böhm, C., Chen, H. and Allgöwer, F. (2012). Model predictive control of constrained LPV systems, *International Journal of Control* **85**(6): 671–683.