

CONTROLE $\mathcal{H}_2$ VIA REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA DE SISTEMAS AFINS COM COMUTAÇÃO A TEMPO CONTÍNUO

LUCAS N. EGIDIO*, GRACE S. DEAECTO*

*DMC / Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP
13083 - 860, Campinas, SP, Brasil

Emails: egidio@fem.unicamp.br, grace@fem.unicamp.br

Abstract— This paper deals with control design of an output feedback switching function for continuous-time switched affine systems, assuring global asymptotic stability of a desired equilibrium point. More specifically, the main purpose is to design a full order switched affine filter together with a switching function, assuring not only stability, but also an $\mathcal{H}_2$ guaranteed performance. Regarding conservatism, the design conditions do not require stability of any open-loop subsystem and are less conservative than other techniques available in the literature to date. A numerical example illustrates the validity and the efficiency of the proposed theory.

Keywords— Switched affine systems, output-feedback control, $\mathcal{H}_2$ performance, LMI.

Resumo— Este artigo propõe o projeto de uma função de comutação via realimentação de saída para sistemas afins com comutação a tempo contínuo, assegurando estabilidade assintótica global de um ponto de equilíbrio desejado. Mais especificamente, a ideia principal é realizar o projeto simultâneo de um filtro afim de ordem completa e uma função de comutação, assegurando não somente estabilidade, mas também um índice de desempenho $\mathcal{H}_2$. No que diz respeito ao conservadorismo, as condições de projeto não exigem estabilidade de nenhum subsistema em malha aberta e são menos conservadoras do que outras técnicas existentes na literatura. Um exemplo numérico ilustra a validade e a eficiência da teoria proposta.

Palavras-chave— Sistemas com comutação, controle via realimentação de saída, desempenho $\mathcal{H}_2$, LMI

1 Introdução

Sistemas com comutação são compostos por um número finito de subsistemas e uma regra de comutação que orquestra o chaveamento entre eles. Esta regra quando adequadamente projetada pode assegurar estabilidade mesmo no caso em que todos os subsistemas são instáveis ou, se estritamente consistente, pode melhorar o desempenho global quando comparado àquele de cada subsistema isolado, veja (Geromel et al., 2013). Estas características intrínsecas vêm atraindo a atenção da comunidade científica nas últimas décadas principalmente devido ao grande interesse para aplicações práticas em várias áreas na engenharia. O livro (Liberzon, 2003) e o artigo (Shorten et al., 2007) são referências básicas sobre o tema. Os sistemas afins com comutação representam uma subclasse muito comum na área de eletrônica de potência, veja (Cardim et al., 2009), (Corona et al., 2007) e (Deaecto et al., 2010). Eles são caracterizados por apresentar termos afins que são responsáveis pela existência de diversos pontos de equilíbrio no espaço de estado. Logo, o projeto de controle consiste em determinar uma região de pontos de equilíbrio atingíveis e projetar uma função de comutação capaz de guiar qualquer trajetória do sistema para o ponto de equilíbrio desejado. A literatura apresenta resultados importantes relacionados ao projeto de controle via realimentação de estado, como por exemplo, (Bolzern and Spinelli, 2004), (Deaecto et al., 2010), (Deaecto and Santos, 2015), (Hetel and Fridman, 2013) e (Mainardi Jr. et al., 2012), que se baseiam na

adoção de uma função de Lyapunov quadrática enquanto que (Scharlau et al., 2014), (Trofino et al., 2012) se baseiam em uma função de Lyapunov do tipo máximo. Para o caso de realimentação de saída, existem poucos resultados na literatura, como por exemplo, a referência (Yoshimura et al., 2013) que propõe uma solução baseada no projeto de um observador de estado com comutação e as referências recentes (Deaecto, 2015), (Deaecto, 2016) que tratam o projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$, exclusivamente.

Este artigo generaliza o resultado disponível em (Deaecto, 2016) de forma a tratar o projeto de controle $\mathcal{H}_2$ via realimentação de saída de sistemas afins com comutação. Mais especificamente, nossa proposta se baseia no projeto simultâneo de um filtro afim de ordem completa e uma função de comutação que além de estabilidade assegura um índice de desempenho $\mathcal{H}_2$. O procedimento aqui adotado fornece condições necessárias e suficientes para a existência de uma solução estruturada para as desigualdades propostas em (Deaecto and Santos, 2015) que trata do caso de controle via realimentação de estado. Além disso, diferente de (Yoshimura et al., 2013) as condições obtidas não exigem como condição necessária que as matrizes dos subsistemas sejam estáveis. A validade e a eficiência da função de comutação proposta é ilustrada através de um exemplo numérico.

A notação adotada é usual. Para matrizes ou vetores, o símbolo ($'$) indica transposto. Para uma matriz simétrica, o símbolo ($\bullet$) denota cada um de seus blocos simétricos. A matriz I_n denota a matriz identidade de ordem n , mas por vezes,

o índice n pode ser omitido. A combinação convexa de matrizes de mesma dimensão $\{J_1, \dots, J_N\}$ é denotada por $J_\lambda = \sum_{j=1}^N \lambda_j J_j$ onde λ pertence ao simplex unitário Λ , composto por todos os vetores não-negativos $\lambda \in \mathbb{R}^N$ tais que $\sum_{j=1}^N \lambda_j = 1$. A norma ao quadrado de uma trajetória $\xi(t)$ definida para todo $t \geq 0$, denotada por $\|\xi\|_2^2$, é igual a $\|\xi\|_2^2 = \int_0^\infty \xi(t)' \xi(t) dt$. O conjunto de todas as trajetórias $\xi(t)$ com norma finita $\|\xi\|_2^2 < \infty$ é denotado por $\mathcal{L}_2$. A Hermitiana de uma matriz real M é definida como $\text{He}\{M\} = M + M'$. Uma matriz quadrada é Hurwitz estável se todos os seus autovalores tiverem parte real negativa. Por fim, o conjunto dos N primeiros inteiros positivos $\{1, \dots, N\}$ é denotado por $\mathbb{K}$.

2 Formulação do problema

Considere o sistema afim com comutação

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + H_\sigma w(t) + b_\sigma, \quad x(0) = x_e \quad (1)$$

$$y(t) = C_\sigma x(t) + D_\sigma w(t) \quad (2)$$

$$z(t) = E_\sigma x(t) \quad (3)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o estado, $w(t) = \delta(t)e_k \in \mathbb{R}^{n_w}$ é a entrada externa do tipo impulsiva com e_k sendo a k -ésima coluna da matriz identidade I_{n_w} , $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída medida, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída controlada e $\sigma(t) : t \geq 0 \rightarrow \mathbb{K}$ é a função de comutação que seleciona a cada instante de tempo um dos N subsistemas disponíveis. Note que o termo afim b_σ faz com que este sistema possua vários pontos de equilíbrio $x_e \in \mathbb{R}^{n_x}$, compondo a seguinte região no espaço de estado

$$X_e = \{x_e \in \mathbb{R}^{n_x} : x_e = -A_\lambda^{-1} b_\lambda, \quad A_\lambda \in \mathcal{H}, \quad \lambda \in \Lambda\} \quad (4)$$

onde $\mathcal{H}$ é o conjunto de todas as matrizes Hurwitz estáveis. Para um número relativamente pequeno de subsistemas, este conjunto pode ser determinado por busca linear com relação aos componentes de $\lambda \in \Lambda$. Infelizmente, para um número arbitrário de subsistemas, esta tarefa não é fácil pois envolve a solução de um problema NP -difícil, veja (Blondel and Tsitsiklis, 1997).

Considere também o seguinte índice de desempenho $\mathcal{H}_2$, definido para uma função de comutação estabilizante arbitrária $\sigma(\cdot)$ e dado por

$$J_2(\sigma) = \sum_{k=1}^{n_w} \|z_e^k\|_2^2 \quad (5)$$

sendo que a saída controlada $z_e^k(t) = z^k - E_\sigma x_e$ é a resposta à entrada $w(t) = \delta(t)e_k$. Para compreender a definição deste índice, suponha que a regra de comutação permaneça fixa $\sigma(t) = i$, $\forall t \geq 0$. Neste caso, o índice se iguala à norma $\mathcal{H}_2$ ao quadrado da função de transferência entre a entrada externa w e a saída controlada z_e do subsistema

$$\dot{\xi}(t) = A_i \xi(t) + H_i w(t), \quad \xi(0) = 0 \quad (6)$$

$$z_e(t) = E_i \xi(t) \quad (7)$$

com ponto de equilíbrio $x_e = -A_i^{-1} b_i \in X_e$, que foi obtido impondo $\sigma(t) = i$ em (1)-(3) e fazendo a mudança de variável $\xi(t) = x(t) - x_e$. Note que para o caso geral, mesmo com uma regra $\sigma(t)$ dada, este índice é extremamente difícil de calcular.

Nosso objetivo é determinar uma função de comutação estabilizante $\sigma(y) : \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{K}$ que assegure um limitante superior adequado para o índice de desempenho (5). Para isso, propomos um filtro afim com comutação de ordem completa

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}_\sigma \hat{x}(t) + \hat{B}_\sigma y(t) + \hat{b}_\sigma, \quad \hat{x}(0) = x_e \quad (8)$$

em que $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o estado do filtro e $(\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{b}_i)$, $\forall i \in \mathbb{K}$, são matrizes de dimensões compatíveis a ser determinadas. Conectando este filtro ao sistema (1)-(3) e definindo o vetor de estado aumentado $\tilde{\xi} = [(x - x_e)' (\hat{x} - x_e)']'$, obtemos

$$\dot{\tilde{\xi}}(t) = \tilde{A}_\sigma \tilde{\xi}(t) + \tilde{H}_\sigma w(t) + \tilde{\ell}_\sigma, \quad \tilde{\xi}(0) = 0 \quad (9)$$

$$z_e(t) = \tilde{E}_\sigma \tilde{\xi}(t) \quad (10)$$

onde as matrizes indicadas são dadas por

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ \hat{B}_i C_i & \hat{A}_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{H}_i = \begin{bmatrix} H_i \\ \hat{B}_i D_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{\ell}_i = \begin{bmatrix} A_i x_e + b_i \\ (\hat{A}_i + \hat{B}_i C_i)x_e + \hat{b}_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}'_i = \begin{bmatrix} E'_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Adotando então a função de Lyapunov quadrática $v(\tilde{\xi}) = \tilde{\xi}' \tilde{P} \tilde{\xi}$, será mostrado na sequência que a função de comutação

$$\sigma(\tilde{\xi}) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \tilde{\xi}' (-\tilde{Q}_i \tilde{\xi} + 2\tilde{P} \tilde{\ell}_i) \quad (12)$$

garante a estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio $x_e \in X_e$, onde $\tilde{P} > 0$ e $\tilde{Q}_i$ são matrizes simétricas $\forall i \in \mathbb{K}$ a ser determinadas.

3 Estabilidade

Considere inicialmente o sistema mais simples

$$\dot{\tilde{\xi}}(t) = \tilde{A}_\sigma \tilde{\xi}(t) + \tilde{\ell}_\sigma, \quad \tilde{\xi}(0) = \tilde{\xi}_0 \quad (13)$$

$$z_e(t) = \tilde{E}_\sigma \tilde{\xi}(t) \quad (14)$$

em que o estado $\tilde{\xi}$ está disponível. O seguinte lema apresenta condições de estabilidade para este sistema e um custo garantido.

Lema 1 Considere o sistema (13)-(14) e sejam $x_e \in X_e$ e seu vetor $\lambda \in \Lambda$ associado dados. Se existirem $0 < \tilde{P} \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ e matrizes simétricas $\tilde{Q}_i \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ satisfazendo as condições

$$\text{He}\{\tilde{P} \tilde{A}_i\} + \tilde{E}'_i \tilde{E}_i + \tilde{Q}_i < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (15)$$

$$\tilde{Q}_\lambda \geq 0, \quad \tilde{\ell}_\lambda = 0 \quad (16)$$

então a função de comutação de tipo mínimo (12) preserva a estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio $x_e \in X_e$ e satisfaz o custo

$$\|z_e\|_2^2 < \tilde{\xi}'_0 \tilde{P} \tilde{\xi}_0 \quad (17)$$

Prova: A prova vem do fato de que a derivada no tempo de $v(\tilde{\xi})$ para uma trajetória arbitrária de (13)-(14)   dada por

$$\begin{aligned}\dot{v}(\tilde{\xi}) &= \tilde{\xi}'(\tilde{A}'_o\tilde{P} + \tilde{P}\tilde{A}_o)\tilde{\xi} + 2\tilde{\xi}'\tilde{P}\tilde{\ell}_o \\ &< -\tilde{\xi}'(\tilde{E}'_oE_o + \tilde{Q}_o)\tilde{\xi} + 2\tilde{\xi}'\tilde{P}\tilde{\ell}_o \\ &< \min_{i \in \mathbb{K}} \{-\tilde{\xi}'\tilde{Q}_i\tilde{\xi} + 2\tilde{\xi}'\tilde{P}\tilde{\ell}_i\} - z_e'z_e \\ &< -\tilde{\xi}'\tilde{Q}_\lambda\tilde{\xi} + 2\tilde{\xi}'\tilde{P}\tilde{\ell}_\lambda - z_e'z_e \\ &< -z_e'z_e\end{aligned}\quad (18)$$

onde a primeira desigualdade vem de (15), a segunda   consequência da função de comutação (12) e a última vem de (16). Integrando ambos os lados de $\dot{v}(\xi) < -z_e'z_e$ de $t = 0$ a $t \rightarrow \infty$, obtemos (17), já que a estabilidade assintótica de x_e garante $\lim_{t \rightarrow \infty} v(\tilde{\xi}(t)) = 0$. $\square$

Para o caso de realimentação de saída, o Lema 1 não pode ser adotado uma vez que o estado $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, importante para a implementação da regra de comutação (12), não está disponível. Para este caso, vamos considerar as matrizes $\tilde{Q}_i$ e $\tilde{P} > 0$ com a seguinte estrutura

$$\tilde{Q}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{P} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V' & \hat{Y} \end{bmatrix} \quad (19)$$

sendo $Q_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ matrizes simétricas, $0 < Y \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $0 < \hat{Y} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ e $V \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ uma matriz não singular arbitrária. Além disso, se definirmos $\hat{b}_i$, $i \in \mathbb{K}$, como sendo

$$\hat{b}_i = -V^{-1}Y(A_ix_e + b_i) - (\hat{A}_i + \hat{B}_iC_i)x_e \quad (20)$$

fazemos com que a primeira linha do vetor $\tilde{P}\tilde{\ell}_i$ seja nula. Assim, as matrizes (19) junto com (20) fazem com que a função (12) seja dada por

$$\sigma(\hat{x}) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \hat{\xi}'(-Q_i\hat{\xi} + 2(V' - \hat{Y}V^{-1}Y)\ell_i) \quad (21)$$

com $\ell_i = A_ix_e + b_i$ e $\hat{\xi} = \hat{x} - x_e$, que é dependente apenas da saída medida $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ através da variável de estado do filtro $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$. O teorema a seguir generaliza o Lema 1 para tratar o caso de controle via realimentação de saída.

Teorema 1 *Considere o sistema (13)-(14) e sejam $x_e \in X_e$ e seu vetor $\lambda \in \Lambda$ associado dados. Existem matrizes $\hat{A}_i$, $\hat{B}_i$ e vetores $\hat{b}_i$, $i \in \mathbb{K}$, satisfazendo as condições (15)-(16), para $\tilde{Q}_i$ e $\tilde{P} > 0$ com a estrutura (19), se e somente se existirem matrizes simétricas Z , Y e Q_i , e matrizes L_i para as quais as desigualdades matriciais lineares*

$$\text{He}\{ZA_i\} + E_i'E_i + Q_i < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (22)$$

$$\text{He}\{YA_i + L_iC_i\} + E_i'E_i < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (23)$$

$$Y > Z > 0, \quad Q_\lambda \geq 0, \quad A_\lambda x_e + b_\lambda = 0 \quad (24)$$

são satisfeitas. Além disso, a função de comutação do tipo mínimo

$$\sigma(\hat{x}) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \hat{\xi}'(-Q_i\hat{\xi} + 2Z(A_ix_e + b_i)) \quad (25)$$

e o filtro com comutação de ordem completa (8) com matrizes

$$\hat{A}_i = (Y - Z)^{-1}(YA_i + L_iC_i + E_i'E_i + A_i'Z) \quad (26)$$

$$\hat{B}_i = -(Y - Z)^{-1}L_i \quad (27)$$

$$\hat{b}_i = -(Y - Z)^{-1}((E_i'E_i + A_i'Z)x_e - Yb_i) \quad (28)$$

garantem a estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio desejado $x_e \in X_e$ e satisfazem o custo garantido

$$\|z_e\|_2^2 < (x_0 - x_e)'Y(x_0 - x_e) \quad (29)$$

Prova: Considere as matrizes $\tilde{P} > 0$ e $\tilde{Q}_i$ particionadas como indicado em (19) e

$$\tilde{P}^{-1} = \begin{bmatrix} X & U \\ U' & \hat{X} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} X & I \\ U' & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Calculando $\tilde{\Gamma}'\tilde{P}\tilde{\Gamma}$, temos que $\tilde{P} > 0$ se e somente se $Y > Z = X^{-1} > 0$. Ademais, simples manipulações algébricas permitem concluir que para matrizes (Z, Y, U) dadas satisfazendo $Y > Z = X^{-1} > 0$ e U regular é sempre possível determinar $(\hat{X}, \hat{Y}, V)$ tais que $\tilde{P} > 0$. De fato elas são dadas por $V = (I - YX)U'^{-1}$, $\hat{X} = U'(X - Y^{-1})^{-1}U$ e $\hat{Y} = U^{-1}(XYX - X)U'^{-1}$. Multiplicando as desigualdades (15) pela direita por $\tilde{\Gamma}$ e pela esquerda por sua transposta, obtemos

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11i} & \bullet \\ \Psi_{21i} & \Psi_{22i} \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (31)$$

onde $\Psi_{11i} = \text{He}\{A_iX\} + XE_i'E_iX + U\hat{Q}_iU'$, $\Psi_{21i} = YA_iX + V\hat{B}_iC_iX + V\hat{A}_iU' + A_i' + E_i'E_iX$ e $\Psi_{22i} = \text{He}\{YA_i + V\hat{B}_iC_i\} + E_i'E_i$. Podemos notar que estas desigualdades são factíveis se e somente se (22) e (23) forem satisfeitas. De fato, isto pode ser verificado fazendo $Q_i = X^{-1}U\hat{Q}_iU'X^{-1}$, adotando $\hat{B}_i = V^{-1}L_i$, $\hat{A}_i$ como apresentado na equação (26) que anula os elementos matriciais Ψ_{21i} e, sem perda de generalidade, $U = X = Z^{-1}$. Além disso, da estrutura apresentada em (19), fica claro que $\tilde{Q}_\lambda \geq 0$ e somente se $Q_\lambda \geq 0$ e $\tilde{\ell}_\lambda = 0$ se e somente se $x_e \in X_e$ que é uma consequência imediata de (19) junto com (20) as quais fornecem

$$\tilde{\ell}_\lambda = \begin{bmatrix} I \\ -V^{-1}Y \end{bmatrix} (A_\lambda x_e + b_\lambda) \quad (32)$$

Como já mencionado, o termo $\hat{b}_i$ em (20) foi escolhido de forma a anular a primeira linha de $\tilde{P}\tilde{\ell}_i$ e foi importante para obter (25). Levando em conta que $U = X$ temos $\hat{Y} = -V = Y - Z$ o que nos fornece as matrizes de espaço de estado (26)-(28) e a função de comutação do tipo mínimo (25). Por fim, o custo garantido vem de

$$\begin{aligned}\|z_e\|_2^2 &< \tilde{\xi}_0'\tilde{P}\tilde{\xi}_0 \\ &< (x_0 - x_e)'Y(x_0 - x_e), \quad \forall x_0 \neq x_e\end{aligned} \quad (33)$$

concluindo, assim, a prova. $\square$

Note que as desigualdades (22) juntamente com $Q_\lambda \geq 0$ requerem que A_λ seja Hurwitz estável como uma condição necessária. Além disso, como as matrizes Q_i , $\forall i \in \mathbb{K}$, não possuem sinal definido, nenhuma propriedade de estabilidade é imposta às matrizes dos subsistemas A_i , $i \in \mathbb{K}$, consideradas isoladamente. Por outro lado, as desigualdades (23) exigem a existência de ganhos $K_i = Y^{-1}L_i$ tais que as matrizes $A_i + K_i C_i$ sejam quadraticamente estáveis para todo $i \in \mathbb{K}$. Entretanto, esta exigência é amenizada pois os ganhos K_i são dependentes de índice.

A referência (Yoshimura et al., 2013) trata do mesmo problema e propõe uma função de comutação globalmente assintoticamente estabilizante baseada no projeto de um observador para sistemas afins com comutação. As condições de estabilidade são baseadas na existência de matrizes $Y > 0$ e L_i , $\forall i \in \mathbb{K}$, satisfazendo as desigualdades matriciais lineares

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{Y A_i + L_i C_i\} & \bullet \\ L_i C_i & A_i' Y + Y A_i \end{bmatrix} < 0, i \in \mathbb{K} \quad (34)$$

as quais foram expressas utilizando a mesma notação definida neste artigo. Certamente, estas condições são mais conservadoras do que o resultado aqui obtido, já que exigem que as matrizes A_i juntamente com as de malha fechada $A_i + K_i C_i$ sejam quadraticamente estáveis para todo $i \in \mathbb{K}$.

4 Projeto de controle $\mathcal{H}_2$

Como é usual na literatura, veja (Geromel et al., 2008), o sistema afim com comutação (9)-(10) perturbado por uma entrada impulsiva $w(t) = \delta(t)e_k$ pode ser reescrito de maneira equivalente por (13)-(14) com $\tilde{\xi}(0) = \tilde{H}_{\sigma(0)} e_k$. Tomando este fato em conta, o teorema a seguir mantém verdadeiras as condições do Teorema 1 e fornece um limitante superior adequado para o índice de desempenho $\mathcal{H}_2$ definido em (5).

Teorema 2 Considere o sistema (9)-(10) e sejam $x_e \in X_e$ e seu vetor associado $\lambda \in \Lambda$ dados. Se existirem matrizes simétricas Z , Y , Q_i , W_i e matrizes L_i para todo $i \in \mathbb{K}$ satisfazendo as condições (22)-(24) e

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ Z H_i & Z & \bullet \\ Y H_i + L_i D_i & Z & Y \end{bmatrix} > 0, i \in \mathbb{K} \quad (35)$$

então a função de comutação do tipo mínimo (25) em conjunto com o filtro de ordem completa (8) com matrizes (26)-(28) garantem a estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio $x_e \in X_e$ e satisfazem o seguinte custo garantido $\mathcal{H}_2$

$$J_2(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{K}} \text{Tr}(W_i) \quad (36)$$

Prova: Devido à validade do Teorema 1, as condições (22)-(24) garantem que (15)-(16) com $(\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{b}_i)$ dados em (26)-(28) são satisfeitas. Além disso, de (17) com $\tilde{\xi}(0) = \tilde{H}_{\sigma(0)} e_k$, temos

$$J_2(\sigma) < \sum_{k=1}^{n_w} e_k \tilde{H}'_{\sigma(0)} \tilde{P} \tilde{H}_{\sigma(0)} e_k = \text{Tr}(\tilde{H}'_{\sigma(0)} \tilde{P} \tilde{H}_{\sigma(0)})$$

Logo, fazendo $J_2(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{K}} \text{Tr}(W_i)$ com $W_i > \tilde{H}'_i \tilde{P} \tilde{H}_i$ e aplicando o Complemento de Schur em $W_i > \tilde{H}'_i \tilde{P} \tilde{H}_i$, obtemos

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet \\ \tilde{P} \tilde{H}_i & \tilde{P} \end{bmatrix} > 0 \quad (37)$$

Usando a identidade $\tilde{H}'_i \tilde{P} \tilde{H}_i = [H'_i \ H'_i Y + D'_i \hat{B}'_i V']$ com $\hat{B}_i$ dado por (27), multiplicando as desigualdades (37) pela direita por $\text{diag}\{I, \tilde{\Gamma}\}$, pela esquerda por sua transposta, e o resultado obtido ambos os lados por $\text{diag}\{I, X^{-1}, I\}$ com $X^{-1} = Z$, obtemos (35), concluindo, assim, a prova. $\square$

Note que o Teorema 2 indica que devemos considerar em $\tilde{\xi}(0) = \tilde{H}_{\sigma(0)} e_k$ o valor $\sigma(0) = i^*$ sendo o índice ótimo resultante da otimização (36). Se desejarmos deixar o custo garantido $\mathcal{H}_2$ independente de $\sigma(0)$ tornando-o, portanto, arbitrário devemos substituir a matriz W_i por W nas condições do teorema. O Corolário 1 a seguir apresenta uma maneira alternativa para resolver as condições do Teorema 2.

Corolário 1 Considere o sistema (9)-(10) e sejam $x_e \in X_e$ e seu vetor associado $\lambda \in \Lambda$ dados. As condições do Teorema 2 são satisfeitas se existirem matrizes $Y > Z_\lambda > 0$ com

$$Z_i = \int_0^\infty e^{A'_\lambda t} E'_i E_i e^{A_\lambda t} dt, i \in \mathbb{K} \quad (38)$$

e matrizes L_i, W_i , $i \in \mathbb{K}$, satisfazendo (23) e as desigualdades

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ H_i & Z_\lambda^{-1} & \bullet \\ Y H_i + L_i D_i & I & Y \end{bmatrix} > 0, i \in \mathbb{K} \quad (39)$$

Então a função de comutação do tipo mínimo (25) com as matrizes

$$-Q_i = \text{He}\{Z_\lambda A_i\} + E'_i E_i, i \in \mathbb{K} \quad (40)$$

em conjunto com o filtro de ordem completa (8) definido pelas matrizes (26)-(28), considerando Z_λ no lugar de Z , garantem a estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio desejado $x_e \in X_e$ e satisfazem o custo garantido $\mathcal{H}_2$ da equação (36).

Prova: Escrevendo as desigualdades (22) como $\text{He}\{Z A_i\} + E'_i E_i + Q_i = -S$ para $S > 0$ arbitrário e considerando $Q_\lambda \approx 0$, o que é sempre possível

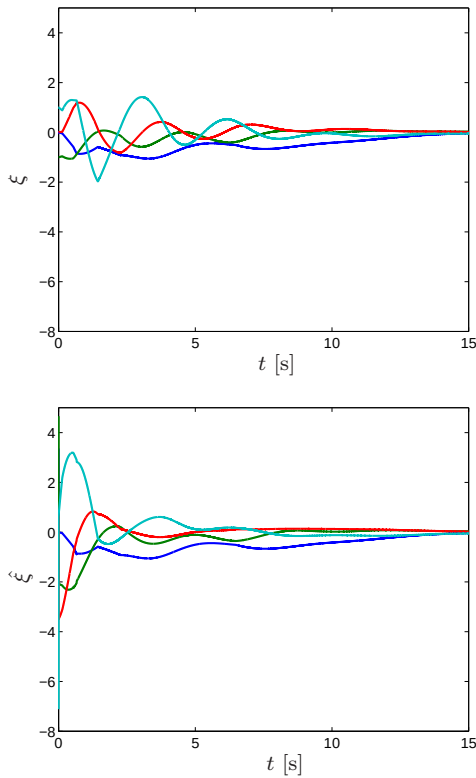


Figura 1: Trajetórias do sistema e do filtro

pois A_λ é Hurwitz estável, obtemos $\text{He}\{ZA_\lambda\} + \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i E_i' E_i = -S < 0$. Além disso, subtraindo ambas as desigualdades com $S > 0$, temos

$$Q_i = \text{He}\{Z(A_\lambda - A_i)\} + \left(\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_j E_j' E_j - E_i' E_i \right) \quad (41)$$

Note que qualquer solução $Z > 0$ é tal que

$$Z = \int_0^\infty e^{A_\lambda' t} \left(\sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i E_i' E_i + S \right) e^{A_\lambda t} dt > Z_\lambda$$

com Z_i , $i \in \mathbb{K}$, dada em (38). Consequentemente, $Z_\lambda^{-1} > Z^{-1} > 0$, e a melhor escolha de $Z > 0$ em (35) deve ser arbitrariamente próxima de Z_λ , o que nos leva a (39) e ao custo garantido (36). Além disso, como Z_λ é a solução da equação de Lyapunov $\text{He}\{Z_\lambda A_\lambda\} + \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i E_i' E_i = 0$, de (41) obtemos (40) concluindo, assim, a prova. $\square$

Este corolário mostra que, após escolher $x_e \in X_e$ e $\lambda(x_e)$, a matriz Z_λ pode ser calculada separadamente. O seu valor é então fornecido para satisfazer as desigualdades $Y > Z_\lambda$, (23) e (39).

5 Exemplo numérico

Este exemplo consiste no sistema afim (1)-(3) definido pelas matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$b_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 1]'$, $b_2 = [-1 \ 0 \ 1 \ 1]'$, $b_3 = [0 \ -1 \ 2 \ 0]'$, $H_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 1]'$, $H_2 = [0 \ -1 \ 0 \ 1]'$, $H_3 = [0 \ 0 \ 1 \ 1]'$, $C_1 = C_2 = C_3 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$, $D_1 = D_2 = D_3 = 1$ e $E_1 = E_2 = E_3 = I_4$. Note que os três subsistemas são instáveis. Escolhemos o ponto de equilíbrio $x_e = [1.95 \ -0.30 \ 0.30 \ -0.80]'$ $\in X_e$ associado a $\lambda = [0.5 \ 0.2 \ 0.3]'$ para o qual A_λ é Hurwitz estável. Resolvemos as condições do Teorema 2 e obtivemos como resultado $\sigma(0) = i^* = 2$, o custo garantido $J_2(\sigma) < 516.5825$ e as matrizes

$$Y = \begin{bmatrix} 672.2097 & -506.1961 & 162.4495 & -71.2121 \\ -506.1961 & 490.4543 & -175.1645 & 98.6727 \\ 162.4495 & -175.1645 & 108.9369 & -33.6891 \\ -71.2121 & 98.6727 & -33.6891 & 35.4981 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 3.2151 & 4.6453 & 2.7968 & 1.2500 \\ 4.6453 & 12.6446 & 7.5168 & 4.2877 \\ 2.7968 & 7.5168 & 11.1690 & 2.8631 \\ 1.2500 & 4.2877 & 2.8631 & 4.8045 \end{bmatrix}$$

$$L'_1 = [-22754.8760 \ 757.0773 \ -145.1060 \ 201.4687]$$

$$L'_2 = [-491.9788 \ 285.1671 \ -11.0774 \ 46.6223]$$

$$L'_3 = [-22229.1776 \ 96.0064 \ 75.5787 \ -34.2719]$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1.5000 & 2.3226 & 3.2179 & 2.0077 \\ 2.3226 & -1.7151 & 4.5726 & -3.9623 \\ 3.2179 & 4.5726 & 6.8715 & 3.7612 \\ 2.0077 & -3.9623 & 3.7612 & -6.7263 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1.5000 & 3.5726 & -0.5321 & 4.5077 \\ 3.5726 & 6.8603 & -5.4274 & 9.4176 \\ -0.5321 & -5.4274 & -10.3073 & -4.9260 \\ 4.5077 & 9.4176 & -4.9260 & 12.4916 \end{bmatrix}$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} -3.5000 & -6.2528 & -5.0084 & -6.3513 \\ -6.2528 & -1.7151 & -4.0028 & 0.3254 \\ -5.0084 & -4.0028 & -4.5810 & -2.9846 \\ -6.3513 & 0.3254 & -2.9846 & 2.8827 \end{bmatrix}$$

importantes para a síntese do filtro $\hat{A}_i$, $\hat{B}_i$, $\hat{b}_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$ e a implementação da regra de comutação (25). Os valores numéricos apresentados foram arredondados na quarta casa decimal. A Figura 1 apresenta as trajetórias do sistema ξ e do filtro $\hat{\xi}$ que, como esperado, evoluem para a origem, indicando que os estados x e $\hat{x}$ evoluem para

o ponto de equilíbrio desejado. A frequência de comutação é bastante elevada após $t \geq 1.437$ [s] o que indica a ocorrência de modos deslizantes estáveis. Este exemplo mostra a validade e a eficiência da função de comutação proposta.

6 Conclusão

Neste artigo, propusemos uma função de comutação dependente somente da saída medida que foi projetada em conjunto com um filtro dinâmico de ordem completa de forma a assegurar não somente estabilidade, mas também, um custo garantido $\mathcal{H}_2$. A validade e a eficiência da função de comutação proposta foi verificada através de um exemplo numérico que consistiu de um sistema afim de quarta ordem com comutação composto por três subsistemas instáveis. Verificamos que a função de comutação projetada é eficiente mesmo diante da ocorrência de modos deslizantes. Um ponto importante a ser pesquisado no futuro é obter condições de estabilidade considerando uma frequência de comutação limitada.

Agradecimentos

Agradecemos   FAPESP (Fund  o de Amparo   Pesquisa do Estado de São Paulo) e ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo apoio financeiro.

Referências

- Blondel, V. and Tsitsiklis, J. N. (1997). Np-hardness of some linear control design problems, *SIAM Journal on Control and Optimization* **35**: 2118–2127.
- Bolzern, P. and Spinelli, W. (2004). Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point, *American Control Conference* **47**: 2286–2291.
- Cardim, R., Teixeira, M. C. M., Assunção, E. and Covacic, M. (2009). Variable-structure control design of switched systems with an application to a DC-DC power converter, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **56**: 3505–3513.
- Corona, D., Buisson, J., Schutter, B. D. and Giua, A. (2007). Stabilization of switched affine systems: An application to the buck-boost converter, *American Control Conference* pp. 6037–6042.
- Deaecto, G. S. (2015). Output-input dependent switching function design for switched affine systems with $\mathcal{H}_\infty$ performance, *Proc. of the 54th IEEE Conference on Decision and Control* pp. 4891–4896.
- Deaecto, G. S. (2016). Dynamic output feedback $\mathcal{H}_\infty$ control of continuous-time switched affine systems, *Automatica* **71**: 44–49.
- Deaecto, G. S., Geromel, J. C., Garcia, F. S. and Pomilio, J. A. (2010). Switched affine systems control design to DC-DC converters, *IET Control Theory and Applications* **4**: 1201–1210.
- Deaecto, G. S. and Santos, G. C. (2015). State feedback $\mathcal{H}_\infty$ control design of continuous-time switched affine systems, *IET Control Theory and Applications* **9**: 1511–1516.
- Geromel, J. C., Colaneri, P. and Bolzern, P. (2008). Dynamic output feedback control of switched linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **53**: 720–733.
- Geromel, J. C., Deaecto, G. S. and Daafouz, J. (2013). Suboptimal switching control consistency analysis for switched linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **58**: 1857–1861.
- Hetel, L. and Fridman, E. (2013). Robust sampled-data control of switched affine systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **58**: 2922–2928.
- Liberzon, D. (2003). *Switching in Systems and Control*, Birkhauser, Boston, USA.
- Mainardi Jr., E. I., Teixeira, M. C. M., Moreira, M. R., Cardim, R., Assun  o, E. and Yoshimura, V. L. (2012). On control design of switched affine systems with application to dc-dc converters, *Frontiers in Advanced Control Systems, In-Teh* pp. 101–116. chapter 5.
- Scharlau, C. C., de Oliveira, M. C., Trofino, A. and Dezu , T. J. M. (2014). Switching rule design for affine switched systems using a max-type composition rule, *Systems & Control Letters* **68**: 1–8.
- Shorten, R., Wirth, F., Mason, O., Wulff, K. and King, C. (2007). Stability criteria for switched and hybrid systems, *SIAM Review* **49**: 545–592.
- Trofino, A., Scharlau, C. C., Dezu , T. J. M. and de Oliveira, M. C. (2012). Switching rule design for affine switched systems with $\mathcal{H}_\infty$ performance, *Proc. of the 51th IEEE Conference on Decision and Control* pp. 1923–1928.
- Yoshimura, V. L., Assun  o, E., da Silva, E. R. P., Teixeira, M. C. M. and Mainardi Jr., E. I. (2013). Observer-based control design for switched affine systems and applications to DC-DC converters, *Journal of Control, Automation and Electrical Systems* **24**: 535–543.