

CONTROLE $\mathcal{H}_2$ DE SISTEMAS LINEARES POSITIVOS COM COMUTAÇÃO

GRACE S. DEAECTO*, JOSÉ C. GEROMEL†

**Faculdade de Engenharia Mecânica, Unicamp
13083-860, Campinas, SP, Brasil*

†*Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Unicamp
13083-852, Campinas, Brasil*

Emails: grace@fem.unicamp.br, geromel@dsce.fee.unicamp.br

Abstract— This paper treats state feedback control design of positive switched linear systems in the continuous-time domain. The main goal is to design a globally asymptotically stabilizing switching function together with a set of state feedback gains preserving closed-loop system positivity and assuring a prescribed $\mathcal{H}_2$ guaranteed cost. The main difficulty to be faced is that the conditions needed to assure positivity are highly nonconvex making the problem very difficult to solve. As a first step, sufficient and generally conservative conditions expressed in terms of linear matrix inequalities (LMI) are provided. Afterwards, a globally convergent algorithm which consists in a sequence of convex programming problems able to deal with the original nonconvex constraints is proposed. This algorithm is based on a recently developed Generalized Kleinman-Newton Method and represents the main result of the paper. Its efficiency is evaluated by means of an academical example.

Keywords— Positive systems, switched systems, state-feedback control, $\mathcal{H}_2$ performance

Resumo— Este artigo trata do projeto via realimentação de estado de sistemas lineares positivos com comutação a tempo contínuo. O principal objetivo é determinar uma função de comutação estabilizante e um conjunto de ganhos de realimentação de estado assegurando positividade do sistema em malha fechada e um custo garantido $\mathcal{H}_2$. A principal dificuldade a ser enfrentada é que as condições necessárias para assegurar positividade são extremamente não-convexas. Como passo preliminar, são obtidas condições suficientes e geralmente conservadoras expressas em termos de desigualdades matriciais lineares (LMI). Posteriormente, é proposto um algoritmo globalmente convergente que consiste em uma sequência de problemas de programação convexa capaz de resolver as restrições não-convexas originais. Este algoritmo é baseado no Método de Kleinman-Newton Generalizado, recentemente desenvolvido, e representa o principal resultado do artigo. Sua eficiência é avaliada por um exemplo acadêmico.

Palavras-chave— Sistemas positivos, sistemas com comutação, realimentação de estado, desempenho $\mathcal{H}_2$

1 Introdução

Sistemas positivos e sistemas com comutação são temas que têm atraído a atenção da comunidade científica nos últimos anos. O livro (Farina and Rinaldi, 2000) e o artigo (Bolzern and Colaneri, 2015) apresentam alguns dos principais resultados teóricos e uma série de aplicações práticas que evidenciam a importância dos sistemas positivos, enquanto que o livro (Liberzon, 2003) e o artigo (Shorten et al., 2007) são referências básicas sobre sistemas com comutação. A literatura apresenta vários resultados sobre projeto de controle de sistemas lineares com comutação, veja (DeCarlo et al., 2000), (Geromel and Colaneri, 2006) e (Deaecto and Geromel, 2011). Entretanto, quando a restrição necessária para assegurar positividade é adicionada o problema de projeto torna-se muito mais difícil do que o enfrentado nestas referências. De fato, a dinâmica de sistemas positivos é modelada por matrizes de Metzler para as quais o Teorema de Perron-Frobenius se aplica, veja (Luenberger, 1979). Para sistemas lineares invariantes no tempo (LIT) este é o ponto chave para estabelecer que a estabilidade assintótica é preservada se e somente se a desigualdade de Lyapunov admitir uma solução diagonal positiva, veja (Ebihara et al., 2014). Ademais,

foi provado em (Tanaka and Langbort, 2011) que para a norma $\mathcal{H}_\infty$ esta propriedade se mantém válida, assegurando com que a convexidade das condições de projeto não seja destruída. Infelizmente, isto não ocorre no caso de controle $\mathcal{H}_2$, veja (Deaecto and Geromel, 2016). Para sistemas com comutação, a literatura ainda apresenta poucos resultados, veja (Knorn et al., 2009), (Zhao et al., 2012), (Fornasini and Valcher, 2010) e (Zhang et al., 2015) como alguns exemplos.

Neste artigo, nosso principal objetivo é projetar uma função de comutação globalmente assintoticamente estabilizante e um conjunto de ganhos de realimentação de estado assegurando positividade de sistemas lineares com comutação e um custo garantido $\mathcal{H}_2$. As condições de projeto são baseadas nas desigualdades de Lyapunov-Metzler, definidas em (Geromel and Colaneri, 2006), com restrições adicionais para assegurar positividade do sistema em malha fechada. Estas restrições fazem com que o problema de projeto seja não-convexo e de difícil solução sendo, segundo o nosso conhecimento, um problema ainda em aberto na literatura. Como passo preliminar, são obtidas condições suficientes e geralmente conservadoras expressas em termos de LMIs. Posteriormente, resolvemos as condições não-convexas originais através de um método iterativo que consiste na so-

lução de problemas de otimização convexa e que generaliza o algoritmo de Kleinman-Newton, veja (Kleinman, 1968). O método possui convergência quadrática e monotônica. A validade da teoria e a eficiência do algoritmo são ilustradas através de um exemplo acadêmico.

A notação usada é padrão. Para matrizes quadradas, $\text{tr}(\cdot)$ denota a função traço. Para matrizes reais e vetores, $(\cdot)'$ indica transposto. Para uma matriz simétrica, $(\bullet)$ denota cada bloco simétrico. Para uma matriz real M , $\text{He}\{M\} = M + M'$ denota o operador Hermitiano. Os símbolos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{N}$ denotam o conjunto dos números reais e naturais, respectivamente. Para qualquer matriz simétrica real, $X \succ 0$ ($X \succeq 0$) denota uma matriz (semi) definida positiva. Para qualquer matriz real $Y \geq 0$ ($Y \gg 0$) indica uma matriz com todos os elementos não-negativos (estritamente positivos).

2 Formulação do Problema

Considere o seguinte sistema com comutação

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + B_\sigma u(t) + E_\sigma w(t), x(0) = 0 \quad (1)$$

$$z(t) = C_\sigma x(t) + D_\sigma u(t) \quad (2)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ e $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ o estado, o controle, a entrada exógena e a saída controlada, respectivamente. A função $\sigma(x) : x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \{1, \dots, N\} := \mathbb{K}$ é a regra de comutação a ser determinada que seleciona a cada instante de tempo um subsistema adequado dentre os N disponíveis. Embora nosso interesse seja no estudo de sistemas positivos, caracterizados por apresentar matrizes A_i Metzler e matrizes B_i , E_i , C_i , D_i , $\forall i \in \mathbb{K}$, não negativas, não precisamos nos restringir apenas a esta classe de sistemas uma vez que desejamos assegurar positividade do sistema em malha fechada. Assumimos que $D_i' C_i = 0$, $D_i' D_i \succ 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$, o que é uma hipótese comum que pode ser introduzida sem perda de generalidade, veja (Geromel et al., 2013).

Para $u(t) = L_\sigma x(t)$ com $\{L_1, \dots, L_N\}$ ganhos matriciais reais, definimos o índice de desempenho $\mathcal{H}_2$ como

$$J(\sigma, L_\sigma) = \sum_{\ell=1}^{n_w} \int_0^\infty z_\ell(t)' z_\ell(t) dt \quad (3)$$

em que $z_\ell(t)$ é a resposta do sistema à entrada impulsiva $w(t) = \delta(t)e_\ell$, com e_ℓ sendo a ℓ -ésima coluna da matriz identidade de ordem n_w . Se desejarmos determinar ganhos matriciais tais que o sistema em malha fechada seja positivo, basta impor que todas as matrizes $A_{L_i} = A_i + B_i L_i$ sejam Metzler e $C_{L_i} = C_i + D_i L_i$ sejam não-negativas para todo $i \in \mathbb{K}$. Isto é possível se e somente se existir um escalar $\mu > 0$ grande o suficiente tal que $A_{L_i} + \mu I$ seja não-negativa. Logo, as condições anteriores são satisfeitas sempre que cada

ganho L_i , $i \in \mathbb{K}$, pertencer ao conjunto

$$\mathcal{L}_i = \{L_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n} : A_{L_i} + \mu I \gg 0, C_{L_i} \gg 0\} \quad (4)$$

que define para cada $i \in \mathbb{K}$ uma região de factibilidade aberta e convexa. Em (4) ao invés de não-negativas, as restrições foram consideradas estritamente positivas tornando possível sua descrição através de LMIs. Em um contexto mais amplo, gostaríamos de resolver o problema de controle ótimo¹

$$\inf_{\{\sigma, L_\sigma \in \mathcal{L}_\sigma\}} J(\sigma, L_\sigma) \quad (5)$$

que, infelizmente, é muito difícil devido à sua natureza não-linear herdada pela função de comutação. Por esta razão, como já é comum na teoria de sistemas com comutação, vamos obter um limitante superior adequado, mas agora, levando em conta que $L_i \in \mathcal{L}_i$, $\forall i \in \mathbb{K}$. Isto é possível resolvendo o seguinte problema de otimização

$$J_s = \inf_{\{L_i \in \mathcal{L}_i, P_i \succ 0\}} \max_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(E_i' P_i E_i) \quad (6)$$

sujeito às desigualdades de Lyapunov-Metzler

$$\text{He}\{P_i A_{L_i}\} + \sum_{j \in \mathbb{K}} \pi_{ji} P_j + C_{L_i}' C_{L_i} \prec 0, i \in \mathbb{K} \quad (7)$$

definidas em (Geromel and Colaneri, 2006), com $\Pi = \{\pi_{ji}\} \in \mathcal{M}$, sendo $\mathcal{M}$ uma subclasse de matrizes de Metzler que satisfaz $\sum_{j \in \mathbb{K}} \pi_{ji} = 0$. Esta restrição adicional implica que $\pi_{ii} = -\sum_{j \neq i \in \mathbb{K}} \pi_{ji} \leq 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$, o que é essencial para obter os resultados que se seguem. Além disso, a solução deste problema assegura que a função de comutação do tipo mínimo

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x' P_i x \quad (8)$$

é globalmente assintoticamente estabilizante e satisfaz o custo garantido $J(\sigma, L_\sigma) < J_s$, veja (Geromel et al., 2013). O operador máximo em (6) indica que o custo $\mathcal{H}_2$ é robusto em relação ao índice do subsistema escolhido para atuar em $t = 0$ e nos permite escrever

$$\max_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(E_i' P_i E_i) \leq \inf_W \{\text{tr}(W) : E_i' P_i E_i < W, i \in \mathbb{K}\} \quad (9)$$

Note que, além da não-convexidade herdada pelo produto de variáveis matriciais $\{\Pi, P_i, i \in \mathbb{K}\}$, temos que lidar com uma dificuldade adicional que refere-se à destruição da convexidade dos conjuntos $\mathcal{L}_i$, $i \in \mathbb{K}$, pela mudança de variáveis necessária para resolver as desigualdades de Lyapunov-Metzler (7). Felizmente, na segunda parte deste artigo apresentamos um algoritmo globalmente convergente capaz de fornecer uma solução estacionária para o problema proposto. O próximo lema é essencial para desenvolvimentos futuros.

¹Assumimos que cada conjunto $\mathcal{L}_i$ é não vazio.

Lema 1 Se a solução ótima $(L_i^*, P_i^* \succ 0)$, $i \in \mathbb{K}$, do problema (6) existir, ela satisfaz $P_i^* \geq 0$.

Prova: Considere que $L_i^* \in \mathcal{L}_i$ e $P_i^* \succ 0$, $i \in \mathbb{K}$, resolvem o problema (6) sujeito   (7). A função objetivo faz com que ela fique arbitrariamente próxima da solução da igualdade

$$\text{He}\{P_i^* \bar{A}_{L_i}\} + R_{L_i}^* = 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (10)$$

em que as matrizes $\bar{A}_{L_i} = A_{L_i} + (\pi_{ii}/2)I$ são Metzler e Hurwitz estáveis e $R_{L_i}^* = \sum_{j \neq i \in \mathbb{K}} \pi_{ji} P_j^* + C_{L_i}' C_{L_i} \succ 0$ pois $P_i^* \succ 0$ e $\pi_{ji} \geq 0, \forall j \neq i$. A equação (10) pode ser resolvida iterativamente por

$$\text{He}\{P_i^{k+1} \bar{A}_{L_i}\} + \sum_{j \neq i \in \mathbb{K}} \pi_{ji} P_j^k + C_{L_i}' C_{L_i} = 0 \quad (11)$$

que converge para a solução de equilíbrio (L_i^*, P_i^*) . De fato, note que

$$P_i^{k+1} = \int_0^\infty e^{\bar{A}_{L_i} t} R_{L_i}^k e^{\bar{A}_{L_i} t} dt \quad (12)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$. Portanto, definindo $\Delta_i^{k+1} = P_i^{k+1} - P_i^k$ para $k = 0, 1, \dots$, temos que $\Delta_i^{k+1} \succeq 0$ sempre que $P_i^0 = 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$, e tende a zero quando a solução se aproxima da solução de equilíbrio, veja (Costa et al., 2013). Além disso, considerando que cada $\bar{A}_{L_i}$   Metzler e as matrizes C_{L_i} são estritamente positivas, temos que $P_i^* \geq 0$ pois $e^{\bar{A}_{L_i} t} \geq 0$, $\forall t \geq 0$, o que conclui a prova. $\square$

3 Projeto de Controle

Nosso primeiro passo   converter o problema (6) em um problema de programac o convexa e analisar o grau de conservadorismo introduzido nesta operação. Para isto, vamos definir o conjunto

$$\mathcal{N}_i = \{(L_i, Q_i \succ 0) : (A_{L_i} + \mu I)Q_i \gg 0, C_{L_i}' Q_i \gg 0\} \quad (13)$$

para $\mu > 0$ suficientemente grande, e o problema de controle associado

$$J_s = \inf_{\{(L_i, Q_i) \in \mathcal{N}_i\}} \max_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(E_i' Q_i^{-1} E_i) \quad (14)$$

sujeito às desigualdades de Lyapunov-Metzler

$$\text{He}\{A_{L_i} Q_i\} + \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{ji} Q_i Q_j^{-1} Q_i + Q_i C_{L_i}' C_{L_i} Q_i \prec 0 \quad (15)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$. A razão desta operação é fazer com que, para uma matriz $\Pi \in \mathcal{M}$ dada, o resultado da transformação $L_i = Y_i Q_i^{-1}$ possa ser convertido em um problema de programac o convexa expresso nas novas variáveis (Y_i, Q_i) . De fato, como indicado em (Geromel et al., 2013) o problema (14)-(15) pode ser reescrito como

$$J_s = \inf_{\{W, (Y_i, Q_i) \in \mathcal{N}_i\}} \text{tr}(W) \quad (16)$$

sujeito às desigualdades de Lyapunov-Metzler

$$\begin{bmatrix} W & \bullet \\ E_i & Q_i \end{bmatrix} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} T_{ij} + Q_i & \bullet \\ Q_i & Q_j \end{bmatrix} \succ 0, \quad i \neq j \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{A_i Q_i + B_i Y_i\} + \sum_{j \neq i \in \mathbb{K}} \pi_{ji} T_{ij} & \bullet \\ C_i Q_i + D_i Y_i & -I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (18)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$. Isto pode ser verificado a partir de

$$\sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{ji} Q_i Q_j^{-1} Q_i = \sum_{j \neq i \in \mathbb{K}} \pi_{ji} (Q_i Q_j^{-1} Q_i - Q_i) \quad (19)$$

com $T_{ij} > Q_i Q_j^{-1} Q_i - Q_i$, $\forall i \neq j$, e considerando a expressão alternativa (9) com $W > E_i' Q_i^{-1} E_i$, $i \in \mathbb{K}$. Para estabelecer a relação entre este problema, que é convexo sempre que a matriz $\Pi \in \mathcal{M}$ for dada, e o problema não-convexo (6), vamos introduzir o seguinte subconjunto de matrizes

$$\mathcal{P} = \{0 \prec Q \in \mathbb{R}^{n \times n} : Q^{-1} \gg 0\} \quad (20)$$

que é importante para estabelecer os próximos resultados. A literatura não apresenta uma caracterização completa sobre este conjunto, como por exemplo, se existe uma classe de matrizes para a qual ele é convexo. O lema seguinte está disponível em (Geromel and Deaecto, 2016) mas será repetido aqui por conveniência.

Lema 2 O conjunto convexo

$$\mathcal{Q} = \{0 \prec Q \in \mathbb{R}^{n \times n} : Q_{ij} < 0, \forall i \neq j = 1, \dots, n\} \quad (21)$$

É um subconjunto de $\mathcal{P}$ e coincide com $\mathcal{P}$ se $n = 2$.

Prova: Para qualquer $Q \in \mathcal{Q}$ tem-se

$$Q = Q_d - Q_o = Q_d^{1/2} \left(I - Q_d^{-1/2} Q_o Q_d^{-1/2} \right) Q_d^{1/2} \quad (22)$$

em que $Q_d \geq 0$   diagonal e $Q_o \gg 0$. Adicionalmente, $Q \succ 0$ implica que os autovalores de $I - Q_d^{-1/2} Q_o Q_d^{-1/2}$ estão dentro do círculo unitário. Assim, de (Luenberger, 1979), temos que $\left(I - Q_d^{-1/2} Q_o Q_d^{-1/2} \right)^{-1} \gg 0$ o que implica que $Q^{-1} \gg 0$ pois $Q_d^{-1/2} \geq 0$, ou seja, $Q \in \mathcal{P}$. Para $n = 2$, considerando $P = Q^{-1} \succ 0$ com $Q \in \mathcal{P}$ arbitrária, temos que $P_{12} > 0$ e $\det(P) > 0$. Logo, os elementos fora da diagonal principal são dados por $Q_{12} = P_{12}^{-1} = -P_{12}/\det(P) < 0$ o que indica que $Q \in \mathcal{Q}$ concluindo, assim, a prova. $\square$

Note que existem inúmeras questões em aberto associadas com o conjunto $\mathcal{P}$ e que possuem um papel fundamental no projeto de sistemas positivos. Talvez a questão mais interessante seja a determinação de $\mathcal{Q}^*$, ou seja, o maior (em termos de volume, por exemplo) subconjunto convexo de $\mathcal{P}$. Este estudo é relevante, pois para

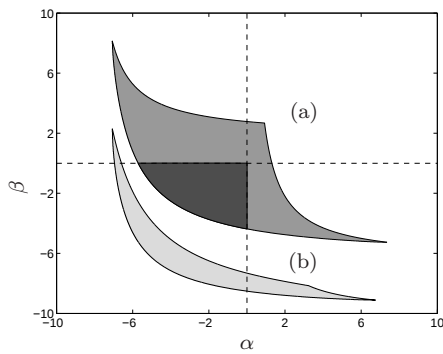


Figura 1: Conjuntos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$

$n \geq 3$ a relação $Q \in \mathcal{P}$ não implica em $Q \in \mathcal{Q}$. Para fins de ilustração, considere a matriz

$$Q = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 & -3 & \gamma \\ 0 & 9 & \alpha & -2 & -2 \\ -1 & \alpha & 8 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & -2 & 10 & \beta \\ \gamma & -2 & -1 & \beta & 10 \end{bmatrix}$$

A parte (a) da Figura 1 mostra o conjunto $\mathcal{P}$ para $\gamma = -3$ onde a região em destaque no seu interior, localizada no terceiro quadrante, representa o conjunto convexo $\mathcal{Q}$. A parte (b) da mesma figura foi obtida para $\gamma = 3$ e mostra em cinza claro o conjunto $\mathcal{P}$. Neste caso $\mathcal{Q}$   vazio. Note que em ambas as partes o conjunto $\mathcal{P}$ é claramente não-convexo. Esta diferença entre as regiões impõe uma dificuldade para se obter uma rela o exata entre as soluções ótimas dos problemas (6) e (14).

Teorema 1 Para uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}$ dada, se a solução ótima (L_i^{**}, Q_i^{**}) , $i \in \mathbb{K}$, do problema (14) for tal que cada $Q_i^{**} \in \mathcal{P}$, então o custo ótimo do problema (6) satisfaz $J_s(L_i^*) \leq \max_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(E_i' Q_i^{**^{-1}} E_i)$.

Prova: Considere uma solução factível (L_i, Q_i) do problema (14) tal que $Q_i \in \mathcal{P}$, $i \in \mathbb{K}$. Levando em conta que $Q_i^{-1} \gg 0$, temos que $(L_i, Q_i) \in \mathcal{N}_i$ implica que $(A_{L_i} + \mu I)Q_i \gg 0$ e $C_{L_i}Q_i \gg 0$, os quais multiplicados pela direita por $Q_i^{-1} \gg 0$ levam a $L_i \in \mathcal{L}_i$. A prova é finalizada pois a solução ótima de (14) fornece $(L_i, P_i) = (L_i^{**}, Q_i^{**^{-1}})$ que é uma solução factível para o problema (6). $\square$

Geralmente, temos $J_s(L_i^*) < J_s(L_i^{**})$ indicando que o problema (14) não é capaz de gerar a solução ótima para (6). Isto ocorre pois $L_i^* \in \mathcal{L}_i$ e $P_i^* \gg 0$ implicam que $(L_i^*, P_i^*) \in \mathcal{N}_i$ mas a mesma conclusão não pode ser obtida para o par (L_i^*, P_i^{*-1}) . Do Lema 2 podemos substituir a condição $Q_i^{**} \in \mathcal{P}$ por $Q_i^{**} \in \mathcal{Q}$ e o resultado do Teorema 1 continua válido. Fazendo isto, obtemos o problema de programação convexa

$$J_s = \inf_{\{W, (Y_i, Q_i \in \mathcal{Q}) \in \mathcal{N}_i\}} \text{tr}(W) \quad (23)$$

sujeito   (17)-(18) que fornece uma solução subótima para o problema original (6).

4 Algoritmo

Nesta seção, nosso objetivo é resolver o problema (6) através da adoção de uma versão simplificada do Método de Kleinman-Newton Generalizado, recentemente desenvolvido pelos autores em (Geromel and Deaecto, 2016). Para isto devemos levar em conta a seguinte equação não-linear de Lyapunov-Metzler.

$$\text{He}\{P_i A_{L_i}\} + \sum_{j \in \mathbb{K}} \pi_{ji} P_j + C_{L_i}' C_{L_i} = 0 \quad (24)$$

que pode ser reescrita como no lema seguinte.

Lema 3 A equação matricial (24) pode ser fatorada como

$$\text{He}\{P_i A_i\} - P_i B_i (D_i' D_i)^{-1} B_i' P_i + R_i + R_{LPi} = 0 \quad (25)$$

$i \in \mathbb{K}$, com $R_i = C_i' C_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \pi_{ji} P_j$ e

$$R_{LPi} = (L_i + (D_i' D_i)^{-1} B_i' P_i)' (D_i' D_i) \times (L_i + (D_i' D_i)^{-1} B_i' P_i) \geq 0 \quad (26)$$

Prova: Segue por simples substitui  o. $\square$

  interessante observar que os ganhos matriciais $L_i = -(D_i' D_i)^{-1} B_i' P_i$ imp em $R_{LPi} = 0$ e fazem com que a equação (25) admita uma  nica solução tal que as matrizes de malha fechada $A_{P_i} + (\pi_{ii}/2)I$ com $A_{P_i} = A_i - B_i (D_i' D_i)^{-1} B_i' P_i$ sejam Hurwitz est veis para todo $i \in \mathbb{K}$. O pr ximo teorema considera a defini  o $C_{P_i} = C_i - D_i (D_i' D_i)^{-1} B_i' P_i$ e   essencial para o desenvolvimento do algoritmo a ser apresentado em seguida.

Teorema 2 Assuma que $(L_i^0 \in \mathcal{L}_i, P_i^0 \succ 0)$, $\forall i \in \mathbb{K}$, resolve (24) produzindo o custo $J_s(L_i^0) = \max_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(E_i' P_i^0 E_i)$ e considere a solução  tima do problema de programação convexa

$$\inf_{\{K_i \in \mathcal{L}_i, S_i \succ 0\}} \max_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(E_i' S_i E_i) \quad (27)$$

sujeito  s desigualdades

$$\begin{bmatrix} \mathcal{V}_i^0 + C_{P_i^0}' C_{P_i^0} & \bullet \\ K_i + (D_i' D_i)^{-1} B_i' S_i & -(D_i' D_i)^{-1} \end{bmatrix} \prec 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (28)$$

com $\mathcal{V}_i^0 = \text{He}\{S_i A_{P_i^0}\} + \sum_{j \in \mathbb{K}} \pi_{ji} S_j$. A solução $P_i \succ 0$ da equação de Lyapunov-Metzler (24) para $L_i = K_i \in \mathcal{L}_i$ produz o custo

$$J_s(L_i) = \max_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(E_i' P_i E_i) \leq \max_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(E_i' S_i E_i) \leq J_s(L_i^0)$$

Prova: O complemento de Schur aplicado na segunda linha e coluna da desigualdade (28) fornece

$$\mathcal{V}_i^0 + C_{P_i^0}' C_{P_i^0} + R_{KSi} \prec 0 \quad (29)$$

Utilizando $A_{P_i^0}$ e $C_{P_i^0}$ definidas anteriormente, podemos escrever

$$\text{He}\{S_i A_{P_i^0}\} + C_{P_i^0}' C_{P_i^0} = \text{He}\{S_i A_i\} - \\ - S_i B_i (D_i' D_i)^{-1} B_i' S_i + C_i' C_i + \mathcal{Z}_i^0$$

com $\mathcal{Z}_i^0 = (S_i - P_i^0) B_i (D_i' D_i)^{-1} B_i' (S_i - P_i^0)$. Esta equação junto com (29) e o Lema 3 fornecem

$$\text{He}\{S_i A_{K_i}\} + \sum_{j \in \mathbb{K}} \pi_{ji} S_j + C_{K_i}' C_{K_i} \prec -\mathcal{Z}_i^0 \prec 0$$

o que indica que os ganhos matriciais atualizados são factíveis e $S_i \succeq P_i \succ 0$. A primeira consequência deste resultado é que se a equação (24) for resolvida para $L_i = K_i \in \mathcal{L}_i$, fornecerá $P_i \succ 0$ satisfazendo $J(L_i) = \max_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(E_i' P_i E_i) \leq \max_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(E_i' S_i E_i)$. Por outro lado, ($K_i \in \mathcal{L}_i, S_i > 0$) arbitrariamente próximo de ($L_i^0 \in \mathcal{L}_i, P_{0i}$) é factível para o problema (27)-(28) pois neste caso (28) se reduz a

$$\text{He}\{P_{0i}^0 A_{L_i^0}\} + \sum_{j \in \mathbb{K}} \pi_{ji} P_j^0 + C_{L_i^0}' C_{L_i^0} = 0$$

A segunda consequência é que

$$\max_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(E_i' S_i E_i) \leq \max_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(E_i' P_i^0 E_i) = J(L_i^0)$$

concluindo, assim, a prova. $\square$

Este resultado pode ser utilizado para resolver o problema de interesse (6). O algoritmo começa a partir de (L_i^0, P_i^0) em que $L_i^0 \in \mathcal{L}_i, i \in \mathbb{K}$, é qualquer conjunto de ganhos que pode ser calculado, por exemplo, resolvendo o problema (23) para uma matriz $\Pi \in \mathcal{M}$ dada, e $P_i^0 \succ 0$ é a solução de (24).

- Escolha $\ell = 0$. Resolva a equação de Lyapunov-Metzler (24) para $L_i = L_i^0 \in \mathcal{L}_i$, determine $P_i^0 \succ 0$ e o custo inicial $J(L_i^0) = \max_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(E_i' P_i^0 E_i)$.
- Resolva o problema de otimização convexa

$$\inf_{K_i \in \mathcal{L}_i, S_i \succ 0} \max_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(E_i' S_i E_i)$$

sujeito às desigualdades

$$\begin{bmatrix} \mathcal{V}_i^\ell + C_{P_i^\ell}' C_{P_i^\ell} & \bullet \\ K_i + (D_i' D_i)^{-1} B_i' S_i & -(D_i' D_i)^{-1} \end{bmatrix} \prec 0$$

e resolva a equação de Lyapunov (24) para $L_i = K_i$ de forma a obter $P_i \succ 0$. Escolha $(L_i^{\ell+1}, P_i^{\ell+1}) = (K_i, P_i)$ e $J(L_i^{\ell+1}) = \max_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(E_i' P_i^{\ell+1} E_i)$.

- Escolha $\ell + 1 \rightarrow \ell$ e itere até que o desempenho relativo satisfaça $J(L_i^{\ell+1})/J(L_i^\ell) > 1 - \epsilon$ para um valor suficientemente pequeno $\epsilon > 0$.

Do Teorema 2 fica claro que $0 \leq J(L_i^{\ell+1}) \leq J(L_i^\ell)$ para todo $\ell \geq 0$ o que significa que este algoritmo converge uniformemente para uma solução estacionária do problema não convexo (6) e, devido ao termo quadrático presente em (4), a convergência é quadrática, veja (Kleinman, 1968).

5 Exemplo Ilustrativo

Considere dois subsistemas instáveis definidos por

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0.5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$B_1 = B_2 = [0 \ 0 \ 1]'$, $E_1 = [0.5 \ 1 \ 2]'$ e $E_2 = [1 \ 2 \ 1]'$, $C_1 = C_2 = [I_3 \ 0_{3 \times 1}]'$, $D_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 3]'$ e $D_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]'$. Neste exemplo consideramos que as matrizes de saída satisfazem a hipótese de ortogonalidade e são usadas exclusivamente para definir o critério $\mathcal{H}_2$. Por esta razão, desconsideramos as restrições $C_{L_i} Q_i \gg 0$ dos conjuntos $\mathcal{N}_i$. Além disso, de forma a considerar conjuntos $\mathcal{N}_i$ fechados, para todo $i \in \mathbb{K}$, substituímos suas condições, respectivamente, por $(A_{L_i} + \mu I) Q_i \gg -\epsilon I$ com $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno. Esta operação certamente exige verificação da solução após concluir o processo de otimização. Resolvemos o problema (23) sujeito às desigualdades (17)-(18) através da realização de busca linear com relação aos elementos da matriz de Metzler obtendo para $(\pi_{21}, \pi_{12}) = (200, 300)$ o custo $J_s^{**} = 31.9796$ e os ganhos matriciais

$$L_1 = [0.0009 \ 0.0013 \ -0.7105] \\ L_2 = [0.0531 \ 0.7278 \ -7.5415]$$

que foram usados como condição inicial para o algoritmo do Teorema 2. Adotando a mesma matriz Π , o algoritmo convergiu para $J_s^* = 26.8016$ após duas iterações, fornecendo

$$K_1 = [0.0001 \ 0.0001 \ -0.6408] \\ K_2 = [-0.9993 \ 0.0012 \ -5.0905]$$

e as matrizes para implementação de (8)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1.3652 & 1.2108 & 0.9890 \\ 1.2108 & 2.2589 & 0.4165 \\ 0.9890 & 0.4165 & 4.8366 \end{bmatrix} \\ P_2 = \begin{bmatrix} 1.3676 & 1.2109 & 0.9910 \\ 1.2109 & 2.2636 & 0.4132 \\ 0.9910 & 0.4132 & 4.7956 \end{bmatrix}$$

A Figura 2 apresenta na parte superior, as trajetórias do sistema e na inferior o esforço de controle. Como podemos observar, após $t = 0.46$ [s] as trajetórias evoluem sobre um modo deslizante estável. Por simulação numérica, calculamos o custo verdadeiro como sendo $J(\cdot) = 20.9453 < 26.8016$.

6 Conclusão

Neste artigo propusemos duas metodologias para tratar o problema de projeto via realimentação de estado de sistemas lineares positivos com comutação. A primeira permite descrever as condições em termos de LMIs, mas introduz algum conservadorismo. A segunda é baseada em uma versão

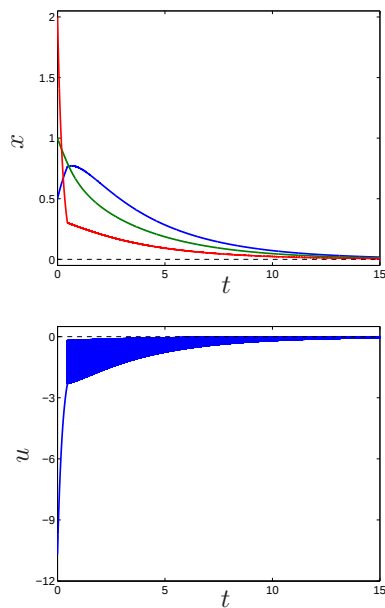


Figura 2: Trajetórias do estado e controle

especial do Método de Kleinman-Newton Generalizado que fornece uma sequência globalmente convergente de problemas de programação convexa capaz de resolver o problema não-convexo original. Um exemplo simples atestou a eficiência das metodologias propostas.

7 Agradecimentos

Agradecemos o apoio financeiro do CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

Referências

- Bolzern, P. and Colaneri, P. (2015). Positive Markov jump linear systems, *Foundations and Trends® in Systems and Control* **2**(3-4): 275–427.
- Costa, O. L. V., Fragoso, M. D. and Todorov, M. G. (2013). *Continuous-Time Markov Jump Linear Systems*, Springer Verlag, Berlin.
- Deaecto, G. S. and Geromel, J. C. (2011). Dynamic output feedback $\mathcal{H}_\infty$ control of switched linear systems, *Automatica* **47**(8): 1713–1720.
- Deaecto, G. S. and Geromel, J. C. (2016). $\mathcal{H}_2$ state feedback control design of continuous-time positive linear systems. Submitted.
- DeCarlo, R. A., Branicky, M. S., Pettersson, S. and Lennartson, B. (2000). Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems, *Proc. of the IEEE* **88**(7): 1069–1082.

- Ebihara, Y., Peaucelle, D. and Arzelier, D. (2014). LMI approach to linear positive system analysis and synthesis, *Systems & Control Letters* **63**: 50–56.
- Farina, L. and Rinaldi, S. (2000). *Positive Linear Systems - Theory and Applications*, John Wiley & Sons.
- Fornasini, E. and Valcher, M. E. (2010). Linear co-positive Lyapunov functions for continuous-time positive switched systems, *IEEE Trans. on Automatic Contr.* **55**(8): 1933–1937.
- Geromel, J. C. and Colaneri, P. (2006). Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems, *SIAM J. Control Optim.* **45**(5): 1915–1930.
- Geromel, J. C. and Deaecto, G. S. (2016). Generalized Kleinman-Newton Method. Submitted.
- Geromel, J. C., Deaecto, G. S. and Daafouz, J. (2013). Suboptimal switching control consistency analysis for switched linear systems, *IEEE Trans. Automatic Control* **58**: 1857–1861.
- Kleinman, D. (1968). On an iterative technique for Riccati equation computations, *IEEE Trans. Automatic Control* **13**: 114–115.
- Knorn, F., Mason, O. and Shorten, R. (2009). On linear co-positive Lyapunov functions for sets of linear positive systems, *Automatica* **45**(8): 1943–1947.
- Liberzon, D. (2003). *Switching in Systems and Control*, Birkhauser.
- Luenberger, D. G. (1979). *Introduction to Dynamic Systems : Theory, Models, and Applications*, John Wiley.
- Shorten, R., Wirth, F., Mason, O., Wulff, K. and King, C. (2007). Stability criteria for switched and hybrid systems, *SIAM Rev* **49**(4): 545–592.
- Tanaka, T. and Langbort, C. (2011). The bounded real lemma for internally positive systems and H-Infinity structured static state feedback, *IEEE Trans. on Automatic Contr.* **56**: 2218–2223.
- Zhang, J., Huang, J. and Zhao, X. (2015). Further results on stability and stabilisation of switched positive systems, *IET Control Theory Appl.* **9**(14): 2132–2139.
- Zhao, X., Zhang, L., Shi, P. and Liu, M. (2012). Stability of switched positive linear systems with average dwell time switching, *Automatica* **48**(6): 1132–1137.