

CONTROLE DE ATITUDE DIGITAL APLICADO A UMA PLANTA GIROSCÓPIO

FABIO YUKIO TORIUMI*, BRUNO AUGUSTO ANGÉLICO*

**Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - USP
São Paulo, SP, Brasil*

Emails: fabioyt@usp.br, angelico@lac.usp.br

Abstract— Two different approaches are proposed for attitude control of a control moment gyroscope (CMG), a digital proportional-integral-derivative (PID) and a digital linear-quadratic regulator (LQR) with integral action. The chosen plant configuration leads to a decoupled nonlinear multiple-input multiple-output (MIMO) system. Continuous and discrete time models of the plant are derived and then controllers are designed. These controllers are validated with experimental tests in the real plant, which results are analyzed and compared.

Keywords— Control Moment Gyroscope, Digital LQR Control, Digital PID Control.

Resumo— Dois métodos diferentes são propostos para o controle de atitude de uma planta giroscópio CMG (*control moment gyroscope*), um PID (proporcional-integral-derivativo) digital e um LQR (*linear-quadratic regulator*) digital com ação integrativa. A configuração escolhida da planta dá origem a um sistema MIMO (*multiple-input multiple-output*) desacoplado não linear. Os modelos em tempo contínuo e discreto da planta são gerados e, então, os controladores são projetados. Estes controladores são validados por meio de testes experimentais com a planta real, sendo seus resultados analisados e comparados.

Palavras-chave— Giroscópio CMG, Controle LQR Digital, Controle PID Digital.

1 Introdução

Os giroscópios CMG's (*control moment gyroscope*) são muito utilizados como atuadores para estabilização, como por exemplo em Yetkin et al. (2014) que utiliza um CMG na estrutura de uma bicicleta para equilibrá-la verticalmente em repouso, e em Gagne et al. (2012) que um CMG é aplicado na estrutura de um equipamento utilizado em cirurgias cardíacas para minimizar o deslocamento do epicárdio. No entanto, sua principal aplicação é no controle de atitude de satélites e veículos espaciais, como por exemplo em Bhat and Tiwari (2009) que analisa a controlabilidade de diferentes arranjos de estruturas e quantidades de CMGs para o controle de atitude de um veículo espacial.

Um CMG é geralmente composto por um disco (rotor) suspenso no centro de uma ou mais estruturas motorizadas de formato circular, que mudam a direção do momento angular do rotor. Tal mudança causa uma reação característica de torque chamada de "torque giroscópico" (Wie, 1998), que pode ser usado para rotacionar um satélite ou um veículo espacial. Os CMGs foram usados por décadas em grandes veículos espaciais, como *Skylab*, *Mir Space Station* e *International Space Station* (Armenise et al., 2010).

Um CMG eletromecânico, modelo 750 da fabricante ECP (*Educational Control Products*), é considerado neste trabalho. Várias estratégias vêm sendo propostas para o controle de atitude desta planta, como pode ser visto nos artigos de Abbas et al. (2013) e de Durand et al. (2014), ambos em tempo contínuo.

A configuração da planta, no ponto de operação considerado neste artigo, dá origem a um sis-

tema MIMO não linear desacoplado. Dois projetos de controladores em tempo discreto, baseados em métodos digitais diferentes, são aplicados para o controle de atitude da planta: um pelo método PID (proporcional-integral-derivativo), no qual é considerado antes uma realimentação de velocidade na planta para amortecer sua frequência de nutação, e o outro pelo método LQR (*linear-quadratic regulator*), onde um integrador discreto é acrescentado ao sistema. Os resultados dos testes experimentais são analisados e comparados.

2 Descrição e Modelos da Planta

O giroscópio CMG, modelo 750 da fabricante ECP, é uma planta não linear com 4 graus de liberdade. Seus componentes estão descritos na Figura 1, onde os quatro corpos rígidos rotacionais (*A*, *B*, *C* e *D*) possuem posições angulares θ_n ($n = 1, 2, 3, 4$)¹, respectivamente, em torno dos seus eixos de rotação $\#n$, medidos por *encoders* incrementais (*A*, *B*, *C* e *D*).

Há dois motores DC instalados na planta: o motor #1, que fornece o torque T_1 ao rotor (corpo *D*), e o motor #2, que fornece o torque T_2 ao corpo *C*. Os corpos *A* e *B* não possuem atuadores que forneçam um torque ativo. Eles podem ser rotacionados por meio de torques reativos, onde o corpo *B* é rotacionado pelo torque reativo gerado pela variação da velocidade do rotor, e o corpo *A* pelo torque giroscópico, gerado quando o corpo *C* é rotacionado enquanto houver velocidade no rotor. No controle de atitude, as posições angulares

¹Vale ressaltar que a notação definida neste artigo difere da apresentada no manual do fabricante (ECP, 1999).

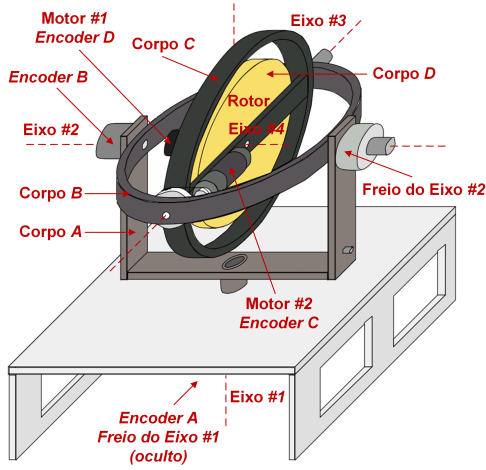


Figura 1: Descrição dos componentes da planta.

dos corpos B e A (θ_2 e θ_1 , respectivamente) são rotacionadas por meio dos torques T_1 e T_2 , respectivamente. A planta possui freios instalados nos eixos #1 e #2, que podem ser acionados manualmente por meio de chaves interruptoras.

A modelagem matemática foi realizada por meio da mecânica Lagrangiana e a linearização pela expansão em série de Taylor em torno do ponto de operação apresentado na Figura 1, resultando em um sistema MIMO desacoplado. Considerando os ganhos dos *encoders* e dos conversores A/D da planta, uma representação em espaço de estados em tempo contínuo é obtida e dada por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \text{ e } y(t) = Cx(t), \quad (1)$$

$$x(t) = [\theta_2(t) \ \theta_1(t) \ \omega_3(t) \ \omega_2(t) \ \omega_1(t)]^T, \quad (2)$$

$$u(t) = [T_1(t) \ T_2(t)]^T, \quad (3)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 64,0945 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5,6568 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 408,197 \\ -38,256 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e} \quad (5)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

O equivalente discreto, considerando ZOH (*zero-order hold*) e um período de amostragem definido como $T_s = 0,008$ segundos, é dado por:

$$x[k+1] = \Phi x[k] + \Gamma u[k] \text{ e } y[k] = Cx[k], \quad (7)$$

$$x[k] = [\theta_2[k] \ \theta_1[k] \ \omega_3[k] \ \omega_2[k] \ \omega_1[k]]^T, \quad (8)$$

$$u[k] = [T_1[k] \ T_2[k]]^T, \quad (9)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,0080 & 0 \\ 0 & 1 & -0,0002 & 0 & 0,0080 \\ 0 & 0 & 0,9884 & 0 & 0,5108 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0451 & 0 & 0,9884 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -0,0012 & 0 \\ 0 & -0,0002 \\ 0 & 3,2530 \\ -0,3060 & 0 \\ 0 & -0,0737 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

e sendo C igual a (6). Ambos modelos em espaço de estados são controláveis e observáveis.

3 Projeto dos Controladores Digitais

Os controladores são projetados com o objetivo de efetuar o controle de atitude da planta, ou seja, fazer com que as saídas do sistema $y(t) = [\theta_2(t) \ \theta_1(t)]^T$ acompanhem as trajetórias de referência $r(t) = [r_{\theta_2}(t) \ r_{\theta_1}(t)]^T$.

3.1 Controlador baseado no método PID digital

Antes de realizar o projeto do controlador PID digital, uma realimentação de velocidade é realizada na planta para amortecer a ressonância na frequência de nutação, que é um fenômeno existente em um giroscópio, causado por um par de polos complexos conjugados de malha fechada da planta, localizados em $s = 0 \pm j19,0412$.

Para isso, uma matriz de realimentação de estados K_{rv} é implementada de forma a realimentar apenas o estado $\omega_3(t)$, relacionado diretamente ao efeito de nutação, no modelo em espaço de estados em tempo contínuo da planta. A nova matriz A deste novo modelo da planta com essa realimentação é dada pela matriz $A_v = A - BK_{rv}$:

$$K_{rv} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,09 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$A_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -36,7377 & 0 & 64,0945 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5,6568 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

onde o par de polos complexos conjugados de malha fechada, relacionados ao efeito de nutação, estão localizados agora em $s = -18,3689 \pm j5,0153$.

O equivalente discreto da matriz A_v , considerando ZOH com $T_s = 0,008$ segundos, é:

$$\Phi_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,0080 & 0 \\ 0 & 1 & -0,0002 & 0 & 0,0080 \\ 0 & 0 & 0,7358 & 0 & 0,4426 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0391 & 0 & 0,9895 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Dessa forma, a função de transferência discreta $G_v(z) = C(zI - \Phi_v)^{-1}\Gamma$ do novo modelo da

planta com realimentação de velocidade é:

$$G_v(z) = \begin{bmatrix} G_{v_1}(z) & 0 \\ 0 & G_{v_2}(z) \end{bmatrix}, \text{ sendo:} \quad (15)$$

$$G_{v_1}(z) = -\frac{12,24 \cdot 10^{-4}(z+1)}{(z-1)^2}, \text{ e} \quad (16)$$

$$G_{v_2}(z) = -\frac{1,83 \cdot 10^{-4}(z+3,47)(z+0,25)}{(z-1)(z^2-1,725z+0,745)}. \quad (17)$$

Considerando (15), é projetado $C(z)$:

$$C(z) = \begin{bmatrix} C_1(z) & 0 \\ 0 & C_2(z) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

resultando na função de malha aberta:

$$G_v(z)C(z) = \begin{bmatrix} G_{v_1}(z)C_1(z) & 0 \\ 0 & G_{v_2}(z)C_2(z) \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Portanto, as parcelas $C_m(z)$ são projetadas em relação as parcelas $G_{v_m}(z)$ ($m = 1, 2$). Para isso, é considerada a função de transferência discreta do controlador PID digital básico, com aproximações pelo método de Tustin para a parte integral e pelo método retangular para trás para a parte derivativa, dada por (de Lauro Castrucci et al., 2011):

$$C_m(z) = K_{p_m} \left(1 + \frac{T_s}{2T_{i_m}} \frac{(z+1)}{(z-1)} + \frac{T_{d_m}}{T_s} \frac{(z-1)}{z} \right). \quad (20)$$

Alternativamente, pode-se escrever (20) de forma equivalente como:

$$C_m(z) = \frac{K_m(z-\alpha_m)(z-\beta_m)}{z(z-1)}, \quad (21)$$

e aplicar o método do lugar das raízes (L.R.), onde são definidos α_m com valores reais dentro do círculo unitário, β_m de forma a atender a condição angular:

$$\angle G_{v_m}(z)C_m(z) = \pm\pi(2k+1), \text{ sendo } k = 0, 1, 2, \dots, \quad (22)$$

e K_m de forma a atender a condição de módulo:

$$|G_{v_m}(z)C_m(z)| = 1, \quad (23)$$

onde os valores de z que atendem essas duas condições são os polos de malha fechada do sistema.

Portanto, pode-se alocar um par de polos complexos conjugados desejados de malha fechada z_{0_m} , definidos por meio de duas especificações de desempenho, o tempo de acomodação $t_{s_m}(5\%)$, em segundos, e o valor máximo de sobressinal da resposta ao degrau M_{p_m} , em porcentagem. Com tais especificações, são calculados o coeficiente de amortecimento ζ_m e a frequência natural ω_{n_m} , que definem a localização desses polos no plano- z , dada por (Ogata, 1995):

$$z_{0_m} = e^{T_s(-\zeta_m\omega_{n_m} \pm j\omega_{n_m}\sqrt{1-\zeta_m^2})}, \quad (24)$$

com período de amostragem $T_s = 0,008$ segundos.

Então, definindo as especificações de desempenho para o projeto da primeira parcela $C_1(z)$ como $t_{s_1}(5\%) = 0,3$ e $M_{p_1} = 0,63\%$, obtêm-se $\zeta_1 = 0,85$ e $\omega_{n_1} = 11,765$, que geram o seguinte par de polos complexos conjugados de malha fechada a serem alocados no plano- z :

$$z_{0_1} = 0,9220 \pm j0,0457. \quad (25)$$

Define-se então $\alpha_1 = 0,99$, analisa-se (22) em z_{0_1} obtendo $\beta_1 = 0,953$, e ao analisar (23) em z_{0_1} obtêm-se $K_1 = 63,964$.

Portanto, $C_1(z)$ resultante é ²:

$$C_1(z) = -63,964 \frac{(z-0,99)(z-0,953)}{z(z-1)}. \quad (26)$$

E para o projeto da segunda parcela $C_2(z)$, definem-se as especificações de desempenho como $t_{s_2}(5\%) = 1$ e $M_{p_2} = 2,66 \cdot 10^{-8}\%$, obtendo $\zeta_2 = 0,99$ e $\omega_{n_2} = 3,0303$, que geram o seguinte par de polos complexos conjugados de malha fechada a serem alocados no plano- z :

$$z_{0_2} = 0,9763 \pm j0,0033. \quad (27)$$

Define-se então $\alpha_2 = 0,984$, analisa-se (22) em z_{0_2} obtendo $\beta_2 = 0,957$, e ao analisar (23) em z_{0_2} obtêm-se $K_2 = 45,851$:

Portanto, $C_2(z)$ resultante é ³:

$$C_2(z) = -45,851 \frac{(z-0,984)(z-0,957)}{z(z-1)}. \quad (28)$$

3.2 Controlador baseado no método LQR digital

O sistema ilustrado na Figura 2 é considerado para o projeto do controlador LQR digital com ação integrativa, composto pela planta com uma realimentação de estados e um integrador discreto.

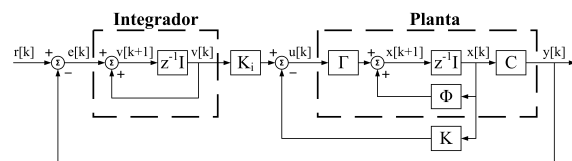


Figura 2: Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.

O integrador discreto obtém a integral do sinal de erro de acompanhamento de referência ($e[k] = r[k] - y[k]$), e sua saída $v[k]$, que é realimentada junto com os estados da planta, muda enquanto sua entrada $e[k]$ não for nula.

²Para facilitar o projeto de $C_1(z)$, foi considerado $-G_{v_1}(z)$, causando a inversão de sinal de K_1 em $C_1(z)$.

³idem à observação feita em $C_1(z)$.

Como mostrado na Figura 2, a equação discreta do integrador discreto e o vetor de controle são, respectivamente:

$$v[k+1] = v[k] + r[k] - y[k], \quad (29)$$

$$u[k] = K_i v[k] - Kx[k], \quad (30)$$

e, com a realimentação de estados na planta, a equação de estados do sistema em malha fechada é dada por:

$$x[k+1] = (\Phi - \Gamma K)x[k] + \Gamma K_i v[k]. \quad (31)$$

Para obter as matrizes de ganho de realimentação de estados K_i (para os estados do integrador $v[k]$) e K (para os estados da planta $x[k]$), um sistema aumentado de malha fechada da planta é considerado, composto por (29) e (31):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x[k+1] \\ v[k+1] \end{bmatrix}}_{x_{aum}[k+1]} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi - \Gamma K & \Gamma K_i \\ -C & I_{2 \times 2} \end{bmatrix}}_M \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x[k] \\ v[k] \end{bmatrix}}_{x_{aum}[k]} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{5 \times 2} \\ I_{2 \times 2} \end{bmatrix}}_{\Gamma_{aum}} \cdot r[k], \quad (32)$$

onde I e 0 são as matrizes identidade e nula, respectivamente, e M pode ser reescrita como:

$$M = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi & 0_{5 \times 2} \\ -C & I_{2 \times 2} \end{bmatrix}}_{\Phi_{aum}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}}_{\Gamma_{aum}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} K & -K_i \end{bmatrix}}_{K_{aum}}. \quad (33)$$

Ao comparar (32) e (33) com (31), observa-se que o ganho K_{aum} pode ser encontrado considerando o sistema aumentado $(\Phi_{aum}, \Gamma_{aum})$, como K pode ser encontrado para o sistema original (Φ, Γ) . Portanto, o sistema aumentado com a lei de controle (30) é considerado para o projeto do controlador pelo método LQR digital, que tem o intuito de minimizar a seguinte função custo:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (x_{aum}^T[k] Q x_{aum}[k] + u^T[k] R u[k]), \quad (34)$$

onde Q e R são matrizes simétricas positivas definidas, e são escolhidas empiricamente com base no peso relativo dos vetores $x_{aum}[k]$ e $u[k]$ em (34). Um método que pode ser utilizado é a regra de Bryson (Bryson and Ho, 1969), que as definem como matrizes diagonais tais que:

$$Q_{ii} = \frac{1}{\text{Máxima variação aceitável para } x_{aum_i}^2}, \quad (35)$$

$$R_{jj} = \frac{1}{\text{Máxima variação aceitável para } u_j^2}, \quad (36)$$

sendo $i = 1, 2, \dots, 7$ and $j = 1, 2$.

Na prática, essa escolha resultará em valores aceitáveis de $x_{aum}[k]$ e $u[k]$. Define-se, então, os valores de máxima variação para θ_1 e θ_2 iguais a 5° e para T_1 e T_2 iguais a $0,353$ N.m e $1,464$ N.m, respectivamente, que geram as seguintes matrizes Q e R ao considerar os ganhos dos *encoders* e dos

conversores A/D da planta ⁴:

$$Q = 1,9767 \cdot 10^{-8} \cdot \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 5} \\ 0_{5 \times 2} & 0_{5 \times 5} \end{bmatrix}, \text{ e} \quad (37)$$

$$R = 3,7253 \cdot 10^{-9} \cdot I_{2 \times 2}. \quad (38)$$

No entanto, como essas matrizes são fracamente conectadas com especificações de desempenho, o procedimento de *pincer*, demonstrado em Franklin et al. (1997), pode ser usado para introduzir um grau de controle ao modificar (34) com uma variável α , que é diretamente ligado ao tempo de acomodação t_s :

$$J_o = \sum_{k=0}^{\infty} (v_1^T[k] Q v_1[k] + v_2^T[k] R v_2[k]), \quad (39)$$

sendo $v_1[k] = \alpha^k x_{aum}[k]$ e $v_2[k] = \alpha^k u[k]$.

Aplicando esse método para $t_s = 1$ segundo, obtém-se $\alpha = 1,0375$, e minimizando (39), a matriz de ganho resultante do LQR digital é:

$K_{aum} = [K \ -K_i]$, sendo:

$$K = \begin{bmatrix} -9,613 & 0 & 0 & -0,805 & 0 \\ 0 & -6,690 & 0,106 & 0 & -0,336 \end{bmatrix},$$

$$K_i = \begin{bmatrix} -0,308 & 0 \\ 0 & -0,245 \end{bmatrix}. \quad (40)$$

4 Procedimento Experimental e Resultados

Dois testes experimentais com a planta real são realizados para validar os controladores projetados: teste de acompanhamento de referência e teste de rejeição à perturbação na saída da planta, sendo no primeiro avaliado se as saídas do sistema $y(t) = [\theta_2(t) \ \theta_1(t)]^T$ acompanham os sinais $r(t) = [r_{\theta_2}(t) \ r_{\theta_1}(t)]^T$, respeitando as especificações de desempenho, e no segundo é avaliado se as saídas do sistema $y(t)$ rejeitam os sinais $d(t) = [d_{\theta_2}(t) \ d_{\theta_1}(t)]^T$ em modo regulatório, ou seja, com $r(t)$ nulo. Para isso, considera-se o sistema experimental mostrado na Figura 3 e obtêm-se as velocidades angulares dos corpos $\omega_n = \dot{\theta}_n$ ($n = 1, 2, 3, 4$) indiretamente pelo método retangular para trás (*backward rectangular rule*).

Todos os experimentos são realizados com o Matlab/Simulink, onde os *scripts* e os diagramas de blocos foram criados para executar o procedimento experimental iniciado com a planta posicionada conforme Figura 1, com os freios dos eixos #1 e #2 acionados, e um controlador PI (proporcional-integral) simples ativado para elevar a velocidade do rotor e mantê-lo a 400 rpm.

⁴Vale ressaltar que os valores de Q e R são baixos pois considera-se as unidades dos estados da planta em pulsos de *encoders* e as unidades dos sinais de esforços de controle dos motores em pulsos dos conversores A/D da planta.

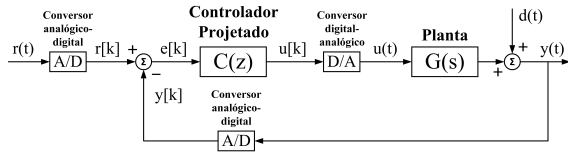
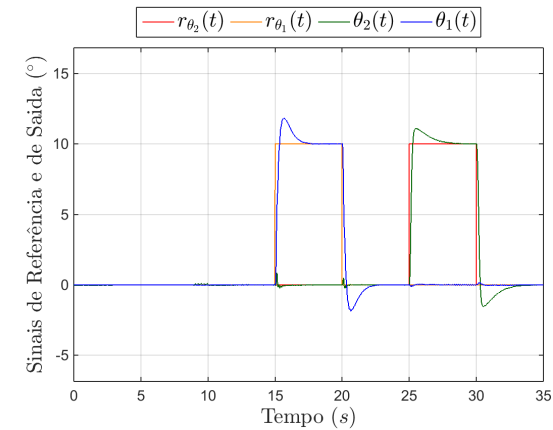


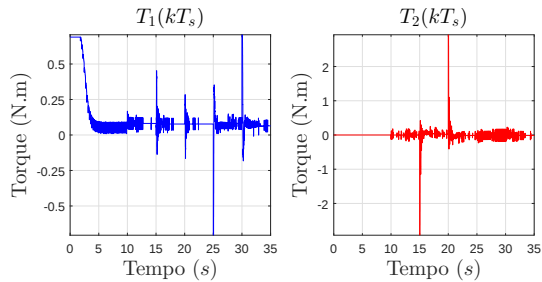
Figura 3: Sistema Experimental.

Em $t = 8s$, os freios são desacionados manualmente e, em $t = 10s$, o controlador PI simples é substituído pelo controlador projetado. Um sinal retangular para a saída θ_1 é introduzido em $t = 15s$ (sendo esse sinal o $r(t)$ para o primeiro teste e o $d(t)$ para o segundo teste), onde $r(t)$ possui amplitude de 10° e duração de 5 segundos e $d(t)$ possui amplitude de 5° e duração de 4 segundos. O mesmo sinal retangular é introduzido em $t = 25s$, mas agora para a saída θ_2 . O procedimento é encerrado em $t = 35s$.

As Figuras 4 e 5 mostram as respostas do sistema com o controlador PID digital ao primeiro e segundo teste, respectivamente. Do mesmo modo, as Figuras 6 e 7 mostram as respostas do sistema com o controlador LQR digital. Os sinais de saída $y(t)$ e de trajetórias retangulares $r(t)$ ou $d(t)$ são mostrados nas Figuras 4a, 5a, 6a e 7a, e os sinais de controle dos motores $u(kT_s) = [T_1(kT_s) \ T_2(kT_s)]^T$ são mostrados nas Figuras 4b, 5b, 6b e 7b.

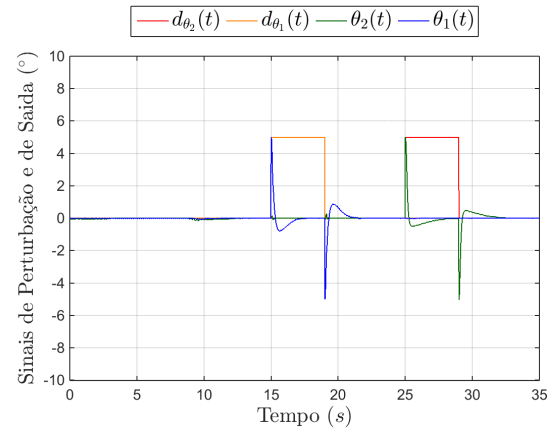


(a) Sinais de referência e de saída $r(t)$ e $y(t)$.

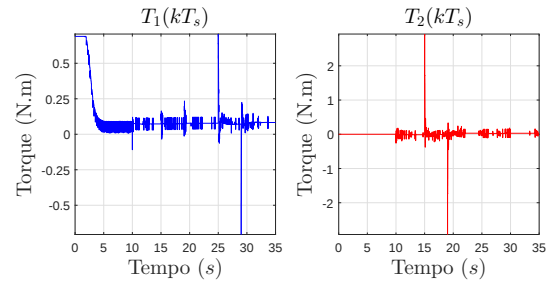


(b) Sinais de controle dos motores $u(kT_s)$.

Figura 4: Resposta do sistema com o controlador PID ao teste de acompanhamento de referência.

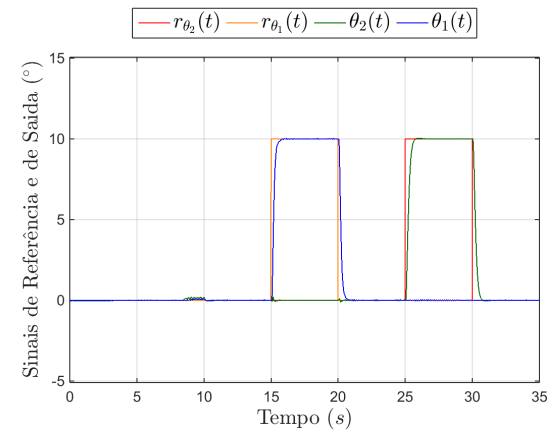


(a) Sinais de perturbação e de saída $d(t)$ e $y(t)$.

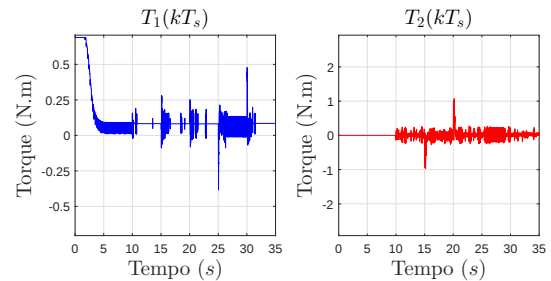


(b) Sinais de controle dos motores $u(kT_s)$.

Figura 5: Resposta do sistema com o controlador PID ao teste de rejeição de perturbação.

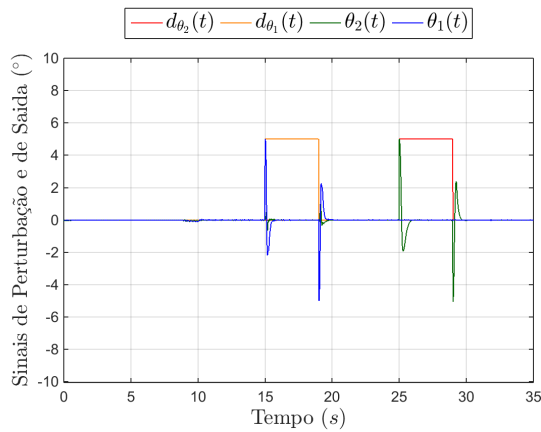


(a) Sinais de referência e de saída $r(t)$ e $y(t)$.

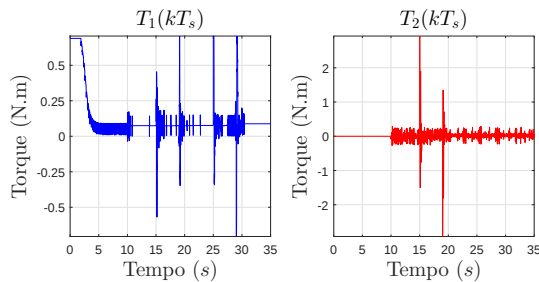


(b) Sinais de controle dos motores $u(kT_s)$.

Figura 6: Resposta do sistema com o controlador LQR ao teste de acompanhamento de referência.



(a) Sinais de perturbação e de saída $d(t)$ e $y(t)$.



(b) Sinais de controle dos motores $u(kT_s)$.

Figura 7: Resposta do sistema com o controlador LQR ao teste de rejeição de perturbação.

5 Conclusões

Os resultados apresentados nas Figuras 4 à 7 mostram que ambos controladores projetados atenderam o objetivo de controle de atitude da planta, onde os sinais de saída $y(t)$ acompanharam os sinais de acompanhamento de referência $r(t)$, além de rejeitarem sinais de perturbações nas saídas $d(t)$, ambos com trajetórias retangulares.

Comparando os resultados obtidos entre os dois controladores, o projetado pelo método LQR digital apresentou os melhores resultados e atendeu a especificação de desempenho t_s definida no projeto, porém foi necessário a disponibilidade de todos os estados de $x[k]$, sendo os estados das velocidades angulares $\omega[k]$ obtidas indiretamente pelo método retangular para trás. O controlador projetado pelo método PID digital, apesar de atender o objetivo de controle de atitude, não atendeu as especificações de desempenho definidas no projeto, pois foram alocados apenas um par de polos complexos conjugados de malha fechada com tais especificações, onde os outros afetaram o desempenho do sistema, porém foram necessários apenas a disponibilidade dos sinais de saída $y[k]$, e de $\omega_3[k]$ para a realimentação de velocidade da planta para amortecer seu efeito de nutação.

Agradecimentos

Agradecemos à FAPESP que financiou este trabalho com o processo 2013/25605-2 e ao CNPq por seu contínuo apoio financeiro.

Referências

- Abbas, H. S., Ali, A., Hashemi, S. M. and Werner, H. (2013). Lpv gain-scheduled control of a control moment gyroscope, *American Control Conference (ACC)*, 2013, pp. 6841–6846.
- Armenise, M. N., Ciminelli, C., Dell’Olio, F. and Passaro, V. M. (2010). *Advances in gyroscope technologies*, Springer Science & Business Media.
- Bhat, S. and Tiwari, P. (2009). Controllability of spacecraft attitude using control moment gyroscopes, *IEEE Transactions on Automatic Control* **54**(3): 585–590.
- Bryson, A. and Ho, Y. (1969). *Applied Optimal Control*, Waltham.
- Craig, J. J. (1989). *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, Vol. 2, Addison-Wesley.
- de Lauro Castrucci, P., Bittar, A. and Sales, R. (2011). *Controle Automático*, LTC.
- Durand, S., Boisseau, B., Martinez-Molina, J., Marchand, N. and Raharijaona, T. (2014). Event-based lqr with integral action, *2014 IEEE Emerging Technology and Factory Automation (ETFA)*, pp. 1–7.
- ECP, T. P. (1999). *Manual For Model 750 Control Moment Gyroscope*, ECP, Educational Control Products.
- Franklin, G. F., Powell, D. J. and Workman, M. L. (1997). *Digital Control of Dynamic Systems*, Vol. 3, Reading, Ma.: Addison-Wesley, 1980.
- Gagne, J., Piccin, O., Laroche, E., Diana, M. and Gangloff, J. (2012). Gyrolock: Stabilizing the heart with control moment gyroscope (cmg); from concept to first in vivo assessments, *IEEE Transactions on Robotics* **28**(4): 942–954.
- Ogata, K. (1995). *Discrete-Time Control Systems*, Vol. 2, Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ.
- Wie, B. (1998). *Space vehicle dynamics and control*, Aiaa.
- Yetkin, H., Kalouche, S., Vernier, M., Colvin, G., Redmill, K. and Ozguner, U. (2014). Gyroscopic stabilization of an unmanned bicycle, *American Control Conference (ACC)*, 2014, pp. 4549–4554.