

REPROJETO DIGITAL DE SISTEMAS POLITÓPICOS COM MINIMIZAÇÃO DE NORMA $\mathcal{H}_2$

CECÍLIA F. MORAIS*, MÁRCIO F. BRAGA[†], EDUARDO S. TOGNETTI[‡],
RICARDO C. L. F. OLIVEIRA*, PEDRO L. D. PERES*

*Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação,
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, 13083-852, Campinas, SP, Brasil.

[†]Departamento de Engenharia Elétrica, Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas, Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP, 35931-008, João Monlevade, MG, Brasil.

[‡]Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília – UnB, 70910-900, Brasília, DF, Brasil.

Emails: {cfmoraiss, ricfow, peres}@dt.fee.unicamp.br, mfbraga@deelt.ufop.br, estognetti@ene.unb.br

Abstract— The aim of this paper is to design digital controllers that stabilize a polytopic continuous-time system by employing the digital redesign technique. In this method, starting from a continuous-time controller previously computed, it is possible to determine an equivalent discrete-time controller that stabilizes the hybrid system and optimizes some performance criterion related with the difference between the trajectories of the closed-loop continuous-time system and the hybrid system. In this paper, a bound to the $\mathcal{H}_2$ norm of a system representing the dynamics of the difference (error) between the state trajectories of the continuous-time and the discrete-time plant is minimized. The design conditions are formulated in terms of linear matrix inequalities based on polynomially parameter-dependent decision variables and a scalar parameter search. Numerical examples illustrate the applicability and the advantages of the proposed methodology when compared with other conditions from the literature.

Keywords— Digital Redesign, $\mathcal{H}_2$ Norm, Polytopic Uncertainty, Linear Matrix Inequalities, Sampled-data Systems.

Resumo— O objetivo deste artigo é o projeto de controladores discretos que estabilizem um sistema politópico a tempo contínuo utilizando a técnica de reprojeto digital. Nesse método, a partir de um controlador previamente projetado em tempo contínuo, é possível determinar um equivalente discreto que estabiliza o sistema híbrido otimizando algum critério de desempenho com o intuito de tornar a diferença entre as trajetórias dos sistemas híbrido e contínuo em malha fechada tão pequena quanto possível. Neste trabalho, um limitante para a norma $\mathcal{H}_2$ de um sistema que representa a dinâmica da diferença (erro) entre as trajetórias das plantas contínua e discreta é minimizado. As condições de projeto são formuladas em termos de desigualdades matriciais lineares baseadas em variáveis de decisão polinomialmente dependentes das incertezas e na busca em um parâmetro escalar. Exemplos numéricos ilustram a aplicabilidade dos métodos e demonstram as vantagens quando comparados a outras condições da literatura.

Palavras-chave— Reprojoeto Digital, Norma $\mathcal{H}_2$, Incerteza Politópica, Desigualdades Matriciais Lineares, Sistemas Amostrados.

1 Introdução

Devido ao avanço da tecnologia digital, o controle de sistemas dinâmicos via rede vem se tornando cada vez mais comum em aplicações práticas. Como as plantas controladas usualmente são contínuas no tempo, a determinação de controladores com implementação discreta (digital), capazes de estabilizar o sistema original, pode ser uma tarefa desafiadora. Nesse contexto surge a técnica de reprojeto digital (do inglês, *digital redesign*) (Chang et al., 2002; Lee et al., 2004; Lee et al., 2006). Nessa técnica, dada um controlador estabilizante a tempo contínuo previamente projetado, computa-se um controlador a tempo discreto que garante a estabilidade do conjunto híbrido (planta contínua e controlador) ao mesmo tempo em que minimiza-se um critério de desempenho associado à diferença (erro) entre as trajetórias das variáveis de estado das representações contínua e discreta.

Enquanto os primeiros trabalhos de reprojeto digital (Shieh et al., 1992; Tsai et al., 1993) assumem que a estabilidade do sistema resultante é alcançada devido à proximidade das trajetórias das variáveis de estado, implicando na verificação da estabilidade *a posteriori* via simulação, as pesquisas mais recentes (Chang et al., 2002; Lee et al., 2006; Maccari Jr. et al., 2013; Braga et al., 2015) empregam simultaneamente um critério de análise de estabilidade e uma

condição de reprojeto digital associada à minimização da norma do erro entre as variáveis de estado. Existem ainda outras extensões da técnica, como o reprojeto digital inteligente (Lee et al., 2004; Sung et al., 2010; Koo et al., 2011; Koo et al., 2013; Koo et al., 2016) que seguem o mesmo princípio de conversão de controladores analógicos em equivalentes digitais com o intuito de alcançar a correspondência entre as trajetórias das variáveis de estado, mas que tratam especificamente de modelos nebulosos de Takagi-Sugeno (Tanaka e Wang, 2001). Finalmente, motivados pelo fato de que a maioria dos métodos mencionados anteriormente opta pela minimização da norma da distância entre as representações contínua e discreta das matrizes de espaço de estados, em Lee et al. (2015), os autores propõem uma maneira alternativa de reduzir a diferença entre as trajetórias contínua e discreta. Sendo assim, primeiramente é construído um sinal de erro associado a uma dinâmica, que pode ser interpretada como um mapeamento de uma entrada dada pelo vetor de variáveis de estado amostrado $x_d(k)$ para uma saída dada pelo erro $e(k)$ entre as variáveis de estado em tempo contínuo $x_c(k)$ e discreto $x_d(k)$, de forma que a correspondência entre as variáveis de estado pode ser obtida pela minimização da norma $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência do sistema dinâmico de erro.

Particularmente, quando a descrição do sistema

contínuo envolve a presença de incertezas associadas aos processos físicos, o projeto de controladores digitais é dificultado pois o processo de discretização envolve o cálculo das exponenciais de matrizes incertas. Levando em conta essa dificuldade e seguindo as propostas de soluções fornecidas em Lee et al. (2015) e Braga et al. (2015), o objetivo deste artigo é computar controladores discretos que estabilizem sistemas lineares contínuos afetados por incertezas politópicas empregando a técnica de reprojeção digital via minimização da norma $\mathcal{H}_2$ do sistema dinâmico de erro. Para isso, primeiramente utiliza-se um método de discretização baseado na expansão por séries de Taylor (Braga et al., 2013; Braga et al., 2014; Braga et al., 2015). Em seguida, resolvem-se, por meio de algoritmos eficientes de programação convexa, condições baseadas em desigualdades matriciais lineares (do inglês *Linear Matrix Inequalities* – LMIs) com variáveis de decisão dependentes de parâmetros e busca em um escalar. As condições de projeto envolvem basicamente a estabilidade do sistema híbrido em malha fechada e a minimização da norma $\mathcal{H}_2$ do sistema dinâmico do erro entre as trajetórias. O problema tratado neste trabalho é mais abrangente que o apresentado em Lee et al. (2015) pois considera o controle digital de sistemas lineares politópicos. Além disso, para valores fixos do parâmetro escalar (introduzido para aumentar a liberdade na busca por uma solução factível) o procedimento de solução é convexo, não sendo necessário resolver um problema não linear, tal qual no algoritmo proposto em Lee et al. (2015, Remark 3). Experimentos numéricos são apresentados para ilustrar a aplicabilidade do procedimento proposto.

2 Formulação do Problema

Considere o sistema linear contínuo e invariante no tempo

$$\dot{x}_c(t) = E(\alpha)x_c(t) + F(\alpha)u_c(t) \quad (1)$$

em que $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ e $u_c(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ representam, respectivamente, o vetor de estados e a lei de controle em tempo contínuo. As matrizes $E(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $F(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ são politópicas, ou seja, são dadas pela combinação convexa de N vértices conhecidos

$$(E, F)(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (E_i, F_i) \quad (2)$$

em que o vetor de parâmetros invariantes no tempo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ pertence ao simplex unitário

$$\Lambda_N = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \zeta_i = 1, \zeta_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}. \quad (3)$$

A lei de controle por realimentação de estado é descrita por

$$u_c(t) = K_c x_c(t) \quad (4)$$

em que K_c representa o controlador em tempo contínuo que estabiliza robustamente o sistema (1) produzindo a seguinte dinâmica em malha fechada

$$\dot{x}_c(t) = (E(\alpha) + F(\alpha)K_c)x_c(t). \quad (5)$$

Discretizando (5), obtém-se

$$x_c(k+1) = A_{mf}(\alpha)x_c(k) \quad (6)$$

em que

$$A_{mf}(\alpha) = e^{(E(\alpha) + F(\alpha)K_c)T}, \quad (7)$$

T é o período de amostragem e $x_c(k)$ é a representação em tempo discreto de $x_c(t)$ com $t = kT$.¹

Por outro lado, uma representação amostrada de (1) utilizando um segurador de ordem zero (ZOH, do inglês *Zero-Order Hold*) pode ser descrita por

$$x_d(k+1) = A(\alpha)x_d(k) + B(\alpha)u_d(k) \quad (8)$$

com

$$A(\alpha) = e^{E(\alpha)T}, \quad B(\alpha) = \left(\int_0^T e^{E(\alpha)s} ds \right) F(\alpha) \quad (9)$$

e a lei de controle em tempo discreto

$$u_d(k) = K_d x_d(k), \quad (10)$$

produzindo o seguinte sistema discreto em malha fechada

$$x_d(k+1) = (A(\alpha) + B(\alpha)K_d)x_d(k). \quad (11)$$

Tendo essas definições como base, pode-se enunciar o problema de reprojeção digital (Chang et al., 2002).

Problema 1 (Reprojeção digital) Dada uma lei de controle por realimentação de estado contínua no tempo $u_c(t) = K_c x_c(t)$ tal que o sistema em malha fechada (5) seja assintoticamente estável, projete uma lei de controle amostrada por realimentação de estado (10) tal que

- a estabilidade em malha fechada por realimentação de estado do sistema discreto no tempo (11) seja assegurada;
- as trajetórias das variáveis de estado do sistema discreto em malha fechada (11) sejam tão próximas quanto for possível das trajetórias do sistema contínuo em malha fechada (5) nos instantes $t = kT$.

Para atingir os objetivos estabelecidos anteriormente, a forma mais comum é minimizar a norma euclidiana da diferença entre as variáveis de estado contínuas e discretas (Chang et al., 2002; Lee et al., 2004). Porém, neste trabalho, a proposta é minimizar a norma $\mathcal{H}_2$ associada a $e(k) = x_d(k) - x_c(k)$, com $e(k)$ possuindo a seguinte dinâmica

$$\begin{aligned} e(k+1) &= x_d(k+1) - x_c(k+1) \\ &= (A(\alpha) + B(\alpha)K_d)x_d(k) - A_{mf}(\alpha)x_c(k) \\ &\quad + A_{mf}(\alpha)x_d(k) - A_{mf}(\alpha)x_d(k) \\ &= A_{mf}(\alpha)e(k) \\ &\quad + (A(\alpha) + B(\alpha)K_d - A_{mf}(\alpha))x_d(k), \end{aligned}$$

¹Por simplicidade de notação, o instante kT é representado por k .

ou

$$\begin{aligned} x_e(k+1) &= A_e(\alpha)x_e(k) + B_e(\alpha)w_e(k) \\ z_e(k) &= C_e x_e(k) \end{aligned} \quad (12)$$

com $x_e(k) = e(k)$, $w_e(k) = x_d(k)$, $A_e(\alpha) = A_{mf}(\alpha)$, $B_e(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha)K_d - A_{mf}(\alpha)$ e $C_e = I$.

Primeiramente, para computar um limitante superior para a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema representado em (12),   necessário solucionar o problema de tratar exponenciais de matrizes incertas presentes nas expressões (7) e (9). Uma alternativa computacionalmente viável é apresentada em Braga et al. (2013), Braga et al. (2014) e Braga et al. (2015), na qual é utilizado um procedimento baseado na expansão em série de Taylor de um grau arbitrário ℓ , conforme descrito a seguir

$$\begin{aligned} A_{mf}(\alpha) &= A_{mf}^\ell(\alpha) + \Delta A_{mf}^\ell(\alpha), \\ A(\alpha) &= A_\ell(\alpha) + \Delta A_\ell(\alpha), \\ B(\alpha) &= B_\ell(\alpha) + \Delta B_\ell(\alpha), \end{aligned} \quad (13)$$

com

$$A_{mf}^\ell(\alpha) = \sum_{j=0}^{\ell} \frac{(E(\alpha) + F(\alpha)K_c)^j}{j!} T^j, \quad (14)$$

$$A_\ell(\alpha) = \sum_{j=0}^{\ell} \frac{E(\alpha)^j}{j!} T^j, \quad (15)$$

$$B_\ell(\alpha) = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{E(\alpha)^{j-1}}{j!} T^j F(\alpha), \quad (16)$$

e

$$\Delta A_{mf}^\ell(\alpha) = e^{(E(\alpha) + F(\alpha)K_c)T} - A_{mf}^\ell(\alpha), \quad (17)$$

$$\Delta A_\ell(\alpha) = e^{E(\alpha)T} - A_\ell(\alpha), \quad (18)$$

$$\Delta B_\ell(\alpha) = \left(\int_0^T e^{E(\alpha)s} ds \right) F(\alpha) - B_\ell(\alpha), \quad (19)$$

em que $\Delta A_{mf}^\ell(\alpha)$, $\Delta A_\ell(\alpha)$ e $\Delta B_\ell(\alpha)$ são os resíduos da expansão em série de Taylor de ordem ℓ . Seguindo as not  o e definições apresentados em Braga et al. (2013), (15) e (16) podem ser reescritas como

$$A_\ell(\alpha) \triangleq \sum_{k \in \mathcal{K}(\ell)} \alpha^k A_k, \quad B_\ell(\alpha) \triangleq \sum_{k \in \mathcal{K}(\ell)} \alpha^k B_k \quad (20)$$

com os respectivos coeficientes matriciais

$$A_k = \sum_{j=0}^{\ell} \frac{T^j}{j!} \sum_{\hat{k} \in \mathcal{K}(\ell-j)} \sum_{p \in \mathcal{P}(k-\hat{k})} \frac{(\ell-j)!}{\hat{k}!} E_p, \quad (21)$$

$$B_k = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{T^j}{j!} \sum_{\hat{k} \in \mathcal{K}(\ell-j)} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i - \hat{k}_i > 0}} \sum_{p \in \mathcal{P}(k-\hat{k}-e_i)} \frac{(\ell-j)!}{\hat{k}!} E_p F_i. \quad (22)$$

Finalmente, a expressão para a versão discreta da matriz de malha fechada dada por (14) pode ser computada por (21) substituindo-se A_k e E_p respectivamente por $A_{mf,k}$ e $E_p + F_p K_c$. Adicionalmente,   necessário

impor limitantes superiores para os termos que aparecem em (13), $\Delta A_{mf}^\ell(\alpha)$, $\Delta A_\ell(\alpha)$ e $\Delta B_\ell(\alpha)$, ou seja, calcular

$$\begin{aligned} \delta_{Amf} &= \sup_{\alpha \in \Lambda_N} \|\Delta A_{mf}^\ell(\alpha)\|, \quad \delta_A = \sup_{\alpha \in \Lambda_N} \|\Delta A_\ell(\alpha)\|, \\ \delta_B &= \sup_{\alpha \in \Lambda_N} \|\Delta B_\ell(\alpha)\|, \end{aligned} \quad (23)$$

realizando-se, por exemplo, uma busca em uma malha fina de valores de $\alpha \in \Lambda_N$ como descrito em Braga et al. (2014). Note que, uma vez que esse procedimento aumenta o custo computacional apenas na fase de projeto (*off-line*),   possível que uma malha de valores tão granulosa quanto se queira seja usada para computar (23).

Na prova das condições LMIs propostas na Seção 3 é empregado o seguinte lema (Boyd et al., 1994).

Lema 1 Dado um escalar $\lambda > 0$ e matrizes M e N de dimensões compatíveis, então $MN + N'M' \leq \lambda MM' + \lambda^{-1}N'N$.

3 Principais Resultados

Nesta seção são apresentados os resultados teóricos deste trabalho, cujas principais contribuições incluem: apresentar novas condições LMIs de reprojeto digital para o cômputo de controladores discretos que estabilizem um sistema politópico contínuo amostrado; associar o projeto do controlador discreto   minimização da norma $\mathcal{H}_2$ do sistema (12) em termos de LMIs com funções de Lyapunov dependentes de parâmetros e variáveis de folga; ilustrar por experimentos numéricos que escolhas adequadas dos parâmetros de entrada dos teoremas propostos podem levar a sistemas discretos em malha fechada com trajetórias de variáveis de estado mais próximas das produzidas pelo sistema contínuo em malha fechada. As condições LMIs propostas utilizam funções de Lyapunov polinomialmente dependentes de parâmetros, variáveis de folga e um parâmetro escalar pertencente a um intervalo limitado que pode representar um grau extra de liberdade na busca por uma solução factível.

No teorema seguinte, condições LMIs para a síntese de um controlador discreto via reprojeto digital associado   minimização da norma $\mathcal{H}_2$ do sistema erro (12) são apresentadas.

Teorema 1 Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $W(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e uma matriz $X(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ polinomiais de grau $g \in \mathbb{N}$, matrizes constantes $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $Z \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, escalares positivos λ_{A1} , λ_{B1} , λ_{A2} , λ_{B2} e λ_{Amf} e um dado par metro escalar $\xi \in (-1, 1)$, tais que as LMIs

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \Theta \\ -W(\alpha) \end{pmatrix} & \star & \star & \star \\ \begin{pmatrix} G'A_\ell(\alpha)' \\ +Z'B_\ell(\alpha)' \\ -\xi G \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} W(\alpha) \\ -G \\ -G' \end{pmatrix} & \star & \star \\ \xi Z & Z & -\lambda_{B1}I & \star \\ \xi G & G & 0 & -\lambda_{A1}I \end{bmatrix} < 0, \quad (24)$$

$$\text{Tr}(P(\alpha)) < \mu^2, \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \Psi_{22} & \star & \star & \star & \star \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} & \star & \star & \star \\ X(\alpha) & -G & 0 & \Psi_{44} & \star & \star \\ 0 & G & 0 & 0 & -\lambda_{A2}I & \star \\ 0 & Z & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{B2}I \end{bmatrix} < 0, \quad (26)$$

com $\Theta = (\lambda_{A1}\delta_A^2 + \lambda_{B1}\delta_B^2)I + \xi(A_\ell(\alpha)G + B_\ell(\alpha)Z) + \xi(A_\ell(\alpha)G + B_\ell(\alpha)Z)'$,

$$\Psi_{11} = P(\alpha) - X(\alpha) - X(\alpha)',$$

$$\Psi_{22} = I - G - G', \quad \Psi_{31} = A_{mf}^\ell(\alpha)X(\alpha),$$

$$\Psi_{32} = A_\ell(\alpha)G + B_\ell(\alpha)Z - A_{mf}^\ell(\alpha)G,$$

$$\Psi_{33} = -P(\alpha) + (\lambda_{Amf}\delta_{Amf}^2 + \lambda_{A2}\delta_A^2 + \lambda_{B2}\delta_B^2)I,$$

$$\Psi_{44} = -\lambda_{Amf}I,$$

sejam verificadas para todo $\alpha \in \Lambda_N$, então $K_d = ZG^{-1}$ é um ganho discreto robusto por realimentação de estado que estabiliza o sistema (8) e μ   um custo garantido para a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema erro (12) que representa a diferença entre as variáveis de estado do sistema discreto controlado (11) e as trajetórias do sistema contínuo amostrado em malha fechada (6).

Observação 1 Em (26), $A_{mf}^\ell(\alpha)$, $A_\ell(\alpha)$ e $B_\ell(\alpha)$, com grau de aproximação de série de Taylor $\ell \in \mathbb{N}$, são computadas empregando os coeficientes $A_{mf,k}$, A_k e B_k e os resíduos δ_A , δ_B e δ_{Amf} são dados por (23).

Prova: A prova de (24) segue os mesmos passos da prova do Teorema 1 de Braga et al. (2013), garantindo que o sistema discreto em malha fechada (11)   assintoticamente estável. Por outro lado, (25) pode ser reescrita como $\text{Tr}(C_e P(\alpha) C_e') < \mu^2$ uma vez que $C_e = I$, recuperando a condição do traço no cômputo da norma $\mathcal{H}_2$ (de Oliveira et al., 2002) para o sistema erro (12). Adicionalmente, sabendo que $\Delta B_\ell(\alpha) \Delta B_\ell(\alpha)' \leq \delta_B^2 I$, $\Delta A_\ell(\alpha) \Delta A_\ell(\alpha)' \leq \delta_A^2 I$, $\Delta A_{mf}^\ell(\alpha) \Delta A_{mf}^\ell(\alpha)' \leq \delta_{Amf}^2 I$ e utilizando o Lema 1 na seguinte ordem com as escolhas $\lambda = \lambda_{B2}$,

$$M' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Delta B_\ell(\alpha)' & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & Z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

depois $\lambda = \lambda_{A2}$,

$$M' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Delta A_\ell(\alpha)' & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & G & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e finalmente $\lambda = \lambda_{Amf}$,

$$M' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Delta A_{mf}^\ell(\alpha)' \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} X(\alpha) & -G & 0 \end{bmatrix},$$

e, em seguida, aplicando o complemento de Schur, observa-se que se (26) for verificada, então

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) - X(\alpha) - X(\alpha)' & \star & \star \\ 0 & I - G - G' & \star \\ A_e(\alpha)X(\alpha) & B_e G & -P(\alpha) \end{bmatrix} < 0 \quad (27)$$

também é assegurada. Pr  e p s multiplicando (27) respectivamente por $\begin{bmatrix} A_e & B_e & I \end{bmatrix}$ e sua transposta, recupera-se a condição do gramiano de controlabilidade

$$A_e(\alpha)P(\alpha)A_e(\alpha)' - P(\alpha) + B_e(\alpha)B_e(\alpha)' < 0. \quad (28)$$

Por conseguinte, ao minimizar a variável μ sujeita às restrições (25) e (26), o custo garantido $\mathcal{H}_2$ do sistema (12) também é minimizado. $\square$

4 Exemplos Ilustrativos

Para demonstrar as vantagens da abordagem proposta em relação às demais técnicas existentes na literatura, primeiramente as condições apresentadas neste texto são adaptadas para tratar o caso precisamente conhecido (quando o sistema contínuo original não é afetado por incertezas) e comparadas a outras condições de reprojeto digital existentes. Em seguida, é investigado um exemplo incerto. Todas as rotinas foram implementadas em Matlab, versão 7.10 (R2010a) usando Yalmip (L fberg, 2004) e SeDuMi (Sturm, 1999), em um computador AMD Phenom (TM) II X6 1090T (3.2GHz), 4GB RAM e os controladores apresentados foram truncados com 4 casas decimais.

Exemplo 1 Considere o sistema precisamente conhecido linear, invariante e contínuo no tempo apresentado em Lee et al. (2015). O período de amostragem   $T = 0.3$ s e a condição inicial empregada nas simulações   $x_c(0) = x_d(0) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}'$. O objetivo deste exemplo   sintetizar um ganho discreto estabilizante via reprojeto digital e comparar as trajetórias das variáveis de estado em tempo discreto e em tempo contínuo produzidas pelos sistemas em malha fechada com ganhos computados por diferentes abordagens da literatura, incluindo a técnica proposta neste texto. Sendo assim, primeiramente computa-se um ganho de realimentação de estado em tempo contínuo K_c por algum método disponível na literatura, por exemplo, o Lema 1 de Oliveira et al. (2011), obtendo-se $K_c = \begin{bmatrix} 3.2072 & 5.0202 & 63.8913 & 12.0550 \end{bmatrix}$.

Usando o método de reprojeto digital apresentado em Chang et al. (2002), baseado em um critério de estabilidade quadrática e na minimização da norma euclidiana da diferença entre as trajetórias de estado discreto e contínuo, obt m-se $K_d(CPLJ) = \begin{bmatrix} 0.3273 & 0.6340 & 30.2190 & 7.0104 \end{bmatrix}$. Em seguida, projeta-se um controlador pelo método proposto em Braga et al. (2015), que utiliza condições LMIs baseadas em variáveis de decisão dependentes de parâmetros associadas com busca em um parâmetro escalar $\xi \in (-1, 1)$. Para este exemplo em particular, a busca no parâmetro escalar não produziu alterações significativas e o ganho computado para $\xi = 0$   $K_d(BMTOPT) = \begin{bmatrix} 0.4151 & 0.8106 & 28.0458 & 6.6690 \end{bmatrix}$. O terceiro controlador foi obtido pelo procedimento sistemático fornecido por Lee et al. (2015, Remark 3). Nessa técnica, fixa-se o coeficiente de amortecimento da função de Lyapunov em $\alpha = 1$, realiza-se um procedimento de bisseção para encontrar o mínimo valor de $\gamma = \gamma^*$ que é um limitante superior para a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema erro e, em seguida, fixa-se $\gamma = \gamma^*$ e encontra-se por bisseção o mínimo valor de $\alpha = \alpha^*$ para o qual as LMIs propostas são factíveis. Seguindo os passos descritos anteriormente, obt m-se $K_d(LJK) = \begin{bmatrix} 0.8516 & 1.4818 & 33.7996 & 7.6864 \end{bmatrix}$ para $\gamma^* = 4.2343$ e $\alpha^* = 0.75$. Finalmente, adaptando o método proposto para sintetizar um controlador discreto para um sistema precisamente conhecido, ou seja, a discretização das matrizes por meio de (7) e (9)   exata e, portanto δ_{Amf} , δ_A e δ_B são nulos, obt m-se um custo garantido para a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema erro (12) de $\mu = 3.3963$ e o ganho $K_d(T1) = \begin{bmatrix} 0.7685 & 1.3522 & 32.6673 & 7.4818 \end{bmatrix}$,

pela aplicação do Teorema 1 com $\xi = 0$ (a variação do parâmetro escalar não modifica os custos garantidos para o caso precisamente conhecido).

Para efeito de comparação, as trajetórias do estado x_1 do sistema contínuo em malha fechada e dos sistemas discretos usando os ganhos computados são apresentadas na Figura 1. Observa-se que embora seja mais direto minimizar a norma euclidiana da distância entre as trajetórias contínua e discreta, os melhores resultados foram obtidos com a otimização de critérios de desempenho associados ao sistema erro (12). Outra informação relevante é o fato de que diferentemente do método em Lee et al. (2015), as condições fornecidas neste texto são LMIs para um dado parâmetro ξ e o valor do limitante superior μ para o custo garantido pode ser obtido resolvendo-se um problema de otimização sem a necessidade de empregar algum algoritmo iterativo ou procedimento de bissecção.

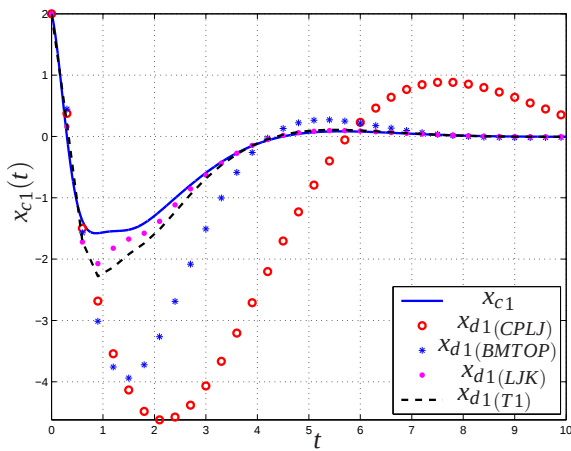


Figura 1: Estado x_1 do sistema contínuo em malha fechada usando o ganho K_c (linha contínua em azul), e do sistema discreto em malha fechada com os ganhos $K_{d(CPLJ)}$ (círculo vermelho), $K_{d(BMTOP)}$ (asterisco), $K_{d(LJK)}$ (ponto rosa) e $K_{d(T1)}$ (tracejado) para o Exemplo 1, considerando $x_0 = [2 \ -3 \ -1 \ 1]'$ e um período de amostragem $T = 0.3$ s.

Exemplo 2 Considere um sistema mecânico que consiste em duas massas ($m_1 = 1$ kg e $m_2 = 15$ kg) acopladas por uma mola com constante elástica $k_2 \in [40, 60]$ N/m e um amortecedor ($b = 1.8$ Ns/m), a primeira massa também está conectada à parede por outra mola ($k_1 = 100$ N/m). O objetivo é controlar a velocidade e aceleração das massas exercendo uma força sobre a massa m_1 . Como a constante elástica k_2 pertence a um intervalo conhecido, o sistema pode ser representado por um politopo de dois vértices

$$E_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(k_1 + k_{2i})/m_1 & k_{2i}/m_1 & -b/m_1 & b/m_1 \\ k_{2i}/m_2 & -k_{2i}/m_2 & b/m_2 & -b/m_2 \end{bmatrix},$$

$$F_i = [0 \ 0 \ 1/m_1 \ 0]', \quad i = 1, 2.$$

Primeiramente, computa-se o ganho em tempo contínuo $K_c = [96.2665 \ -1.9950 \ -3.7209 \ -11.5712]$ utilizando-se o Lema 1 de Oliveira et al. (2011). Em

seguida, para o reprojeto digital considerou-se um período de amostragem de $T = 0.1$ s e as condições LMIs do Teorema 1 foram empregadas com $\xi = 0$, diferentes graus g de dependência dos parâmetros e coeficientes matriciais resultantes de expansões da série de Taylor de grau $\ell = 5, 6, 7$, resultando em diferentes ganhos discretos. Tais ganhos proveem estratégias de controle que resultam em sistemas híbridos em malha fechada, compostos pelo sistema contínuo e o controlador discreto usando um ZOH, cujos custos garantidos da norma $\mathcal{H}_2$ associados ao sistema erro entre as trajetórias são apresentados na Tabela 1. Observe que tanto o aumento do grau g das variáveis de decisão quanto do grau ℓ da série de Taylor, associado a representações mais precisas do sistema politópico contínuo em tempo discreto, permitem produzir resultados menos conservadores no que se refere aos custos garantidos μ . Adicionalmente, a Figura 2 apresenta um gráfico de μ versus ξ empregando o Teorema 1 com $g = 1$ e $\ell = 5$ para mostrar que escolhas apropriadas do parâmetro escalar ξ podem produzir ganhos associados a menores custos garantidos $\mathcal{H}_2$ para o sistema erro (12).

Tabela 1: Custos garantidos (μ) para a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema (12) obtidos com o Teorema 1 para $\xi = 0$, diferentes graus g de dependência dos parâmetros e graus ℓ de expansão de série de Taylor.

ℓ	5		6		7	
g	0	1	0	1	0	1
μ	26.82	6.62	0.91	0.77	0.39	0.33

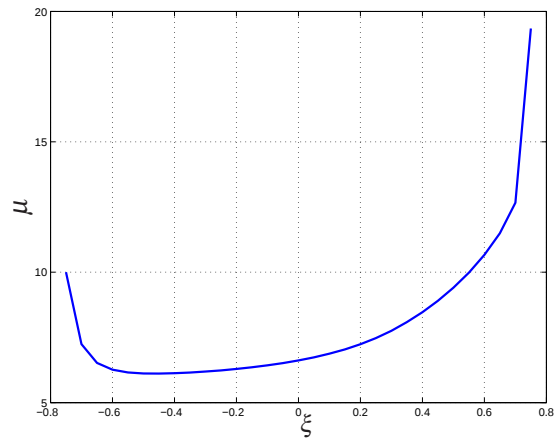


Figura 2: Custos garantidos $\mathcal{H}_2$ (μ) para o sistema erro (12) obtidos com o Teorema 1 para $\ell = 5$, $g = 1$ e diferentes valores de $\xi \in (-1, 1)$ para o Exemplo 2 com período de amostragem $T = 0.1$ s.

5 Conclusões

Foram propostas novas condições LMIs para reprojeto digital de sistemas lineares incertos baseadas em variáveis de decisão dependentes de parâmetros e busca em um parâmetro escalar. Diferentemente de

outros métodos da literatura que recorrem à minimização da norma euclidiana da distância entre as trajetórias das variáveis de estado em malha fechada em tempo contínuo e discreto, a proposta deste trabalho foi minimizar a norma $\mathcal{H}_2$ de um sistema aumentado representando o erro entre as trajetórias contínua e discreta. Os exemplos numéricos mostraram que a técnica apresentada pode ser menos conservadora tanto no caso incerto quanto no caso precisamente conhecido. No caso de sistemas incertos, observou-se que uma representação polinomial mais precisa do sistema em tempo discreto, ou seja, maiores graus ℓ de expansão em série de Taylor, aliada à flexibilidade proporcionada pelo aumento dos graus g de dependência dos parâmetros incertos e a escolha do parâmetro escalar, permitem obter resultados menos conservadores produzindo respostas transitórias mais próximas das trajetórias do sistema contínuo original.

Agradecimentos

Às agências CAPES, CNPq e FAPESP (Proc. 2014/22881-1).

Referências

- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- Braga, M. F., Morais, C. F., Tognetti, E. S., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2013). Discretização e controle por realimentação de estados de sistemas lineares incertos, *XI SBAI*, Fortaleza, CE, Brasil.
- Braga, M. F., Morais, C. F., Tognetti, E. S., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2014). Discretisation and control of polytopic systems with uncertain sampling rates and network-induced delays, *Int. J. Control* **87**(11): 2398–2411.
- Braga, M. F., Morais, C. F., Tognetti, E. S., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2015). Condições LMIs para controle de sistemas politópicos via reprojeto digital, *XII SBAI*, Natal, RN, pp. 386–391.
- Chang, W., Park, J.-B., Lee, H. J. e Joo, Y.-H. (2002). LMI approach to digital redesign of linear time-invariant systems, *IEE Proc. — Control Theory and Appl.* **149**(4): 297–302.
- de Oliveira, M. C., Geromel, J. C. e Bernussou, J. (2002). Extended $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ characterization and controller parametrizations for discrete-time systems, *Int. J. Control* **75**(9): 666–679.
- Koo, G. B., Park, J.-B. e Joo, Y.-H. (2013). Intelligent digital redesign for nonlinear systems using a guaranteed cost control method, *Int. J. Control Autom. Syst.* **11**(6): 1075–1083.
- Koo, G. B., Park, J.-B. e Joo, Y.-H. (2016). Intelligent digital redesign of fuzzy controller for non-linear systems with packet losses, *IET Control Theory & Appl.* **10**(3): 292–299.
- Koo, G. B., Park, J.-B., Joo, Y.-H. e Jeon, H. S. (2011). Digital controller design for fuzzy systems with packet loss: Intelligent digital redesign approach, *Proc. 2011 IEEE Int. Conf. Fuzzy Syst.*, Taipei, Taiwan, pp. 1989–1993.
- Lee, D. H., Joo, Y.-H. e Kim, S. K. (2015). $\mathcal{H}_\infty$ digital redesign for LTI systems, *Int. J. Control Autom. Syst.* **13**(3): 603–610.
- Lee, H. J., Kim, H., Joo, Y.-H., Chang, W. e Park, J.-B. (2004). A new intelligent digital redesign for T–S fuzzy systems: global approach, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **12**(2): 274–284.
- Lee, H. J., Park, J.-B. e Joo, Y.-H. (2006). Further refinement on LMI-based digital redesign: Delta-operator approach, *IEEE Trans. Circuits & Syst. II: Exp. Briefs* **53**(6): 473–477.
- Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *Proc. 2004 IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des.*, Taipei, Taiwan, pp. 284–289.
- Maccari Jr., L. A., Montagner, V. F. e Oliveira, R. C. L. F. (2013). Digital redesign LMI conditions for state feedback controllers with an application for power electronics, *2013 Brazilian Power Electronics Conference (COBEP)*, Gramado, RS, Brazil, pp. 350–355.
- Oliveira, R. C. L. F., de Oliveira, M. C. e Peres, P. L. D. (2011). Robust state feedback LMI methods for continuous-time linear systems: Discussions, extensions and numerical comparisons, *Proc. 2011 IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des.*, Denver, CO, USA, pp. 1038–1043.
- Shieh, L. S., Zhang, J. L. e Sunkel, J. W. (1992). A new approach to the digital redesign of continuous-time controllers, *Control Theory Adv. Techn.* **8**(1): 37–57.
- Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optim. Method Softw.* **11**(1–4): 625–653. <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>.
- Sung, H. C., Kim, D. W., Park, J.-B. e Joo, Y.-H. (2010). Robust digital control of fuzzy systems with parametric uncertainties: LMI-based digital redesign approach, *Fuzzy Sets & Syst.* **161**(6): 919–933.
- Tanaka, K. e Wang, H. (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*, John Wiley & Sons, New York, NY.
- Tsai, J. S. H., Shieh, L. S. e Zhang, J. L. (1993). An improvement on the digital redesign method based on the block-pulse function approximation, *Circ. Syst. Signal Process.* **12**(1): 37–49.