

CONTROLE ÓTIMO DE SISTEMAS AFINS COM COMUTAÇÃO A TEMPO DISCRETO

LUCAS N. EGIDIO*, GRACE S. DEAECTO*

**DMC / Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP
Rua Mendeleev, 200, 13083-860, Campinas, SP, Brasil*

Emails: egidio@fem.unicamp.br, grace@fem.unicamp.br

Abstract— This paper proposes a state feedback switching function for switched affine systems in the discrete-time domain, assuring global practical stability of a desired equilibrium point, which belongs to a predefined set. The control design takes into account the volume minimization of an ellipsoidal convergence region, containing the equilibrium point of interest to where the system state trajectories are asymptotically attracted. This problem is described as the minimization of a nonlinear, although convex, objective function subject to convex constraints for which is applied the Frank-Wolfe algorithm, well known in the literature of nonlinear optimization. The conditions are well adapted to deal with sampled-data control systems with uncertain sampling periods. Numerical examples validate the theoretical results and are used for comparison with a recent technique available in the literature.

Keywords— Switched affine systems, state-feedback control, discrete-time domain, sampled-data control.

Resumo— Este artigo propõe uma função de comutação dependente do estado para sistemas afins com comutação a tempo discreto, assegurando estabilidade prática global de um ponto de equilíbrio desejado, pertencente a um conjunto pré-definido. O projeto de controle leva em conta a minimização do volume de uma região de convergência elipsoidal, contendo o ponto de equilíbrio de interesse, para onde as trajetórias do estado são assintoticamente atraídas. Este problema é descrito como a minimização de uma função objetivo não-linear, embora convexa, sujeita a restrições convexas para a qual é aplicado o algoritmo de Frank-Wolfe, já conhecido na literatura de otimização não-linear. As condições são bem adaptadas para tratar sistemas de controle com dados amostrados, considerando o período de amostragem incerto. Exemplos numéricos validam os resultados teóricos e são usados para comparação com uma técnica recente disponível na literatura.

Palavras-chave— Sistemas afins com comutação, controle via realimentação de estado, domínio do tempo discreto, controle com dados amostrados.

1 Introdução

Sistemas com comutação são compostos por um conjunto de subsistemas e uma regra que rege a comutação entre eles. Esta regra quando adequadamente projetada pode assegurar estabilidade, mesmo no caso em que todos os subsistemas são instáveis, ou melhorar o desempenho do sistema global quando comparado àquele de cada subsistema isolado, veja (Geromel et al., 2013) para detalhes. As referências (DeCarlo et al., 2000), (Liberzon, 2003), (Shorten et al., 2007) e (Sun, 2005) fornecem uma base teórica sólida sobre esta importante classe de sistemas. Essas características fazem com que este assunto seja de grande interesse teórico e de aplicação prática, em especial na área de eletrônica de potência, veja (Cardim et al., 2009), (Corona et al., 2007) e (Deaecto et al., 2010). Principalmente nesta área é comum a existência de sistemas afins com comutação, que são caracterizados por apresentar vários pontos de equilíbrio compondo uma região de grande interesse no espaço de estado. O objetivo de controle consiste em projetar uma função de comutação capaz de governar as trajetórias do sistema para o ponto de equilíbrio desejado pertencente a um conjunto pré-definido. A literatura apresenta alguns resultados sobre estabilidade destes sistemas no domínio do tempo contínuo, veja por exemplo, (Bolzern and Spi-

nelli, 2004), (Deaecto et al., 2010), (Deaecto and Santos, 2015) e (Scharlau et al., 2014). Nessas referências a existência de modos deslizantes estáveis é essencial para assegurar estabilidade assintótica global. Todavia, isto implica na ocorrência de um fenômeno indesejado denominado “*chatter-ring*” que pode causar danos nos equipamentos de sistemas reais devido à sua alta frequência de comutação. Por esta razão, existe um grande esforço da comunidade científica em propor uma função de comutação que seja mais viável para fins de aplicação prática. Uma das propostas é realizar o controle de sistemas com dados amostrados assegurando estabilidade prática, onde as trajetórias são guiadas para uma região tão pequena quanto possível contendo o ponto de equilíbrio, veja (Hauroigne et al., 2011), (Hetel and Fridman, 2013), (Kuiava et al., 2013), (Seatzu et al., 2006) e (Patino et al., 2009).

Este artigo tem como objetivo estudar estabilidade de sistemas afins com comutação a tempo discreto que, segundo o nosso conhecimento, é um tema ainda não tratado na literatura. O projeto de uma função de comutação para o caso discreto representa um problema mais difícil do que o seu análogo em tempo contínuo, uma vez que a frequência de comutação é naturalmente limitada pela frequência de amostragem e, portanto, não é possível garantir estabilidade assintótica mas sim estabilidade prática. Dessa forma, nosso obje-

tivo é projetar uma função de comutação globalmente estabilizante a partir de condições que minimizam o volume da região de convergência elipsoidal, contendo o ponto de equilíbrio desejado, para onde as trajetórias do estado são assintoticamente atraídas. Este projeto envolve a minimização de uma função objetivo não-linear, embora convexa, que pode ser realizada utilizando o algoritmo de Frank-Wolfe, (Frank and Wolfe, 1956). As condições são adaptadas para tratar o controle de sistemas com dados amostrados considerando período de amostragem incerto. Exemplos ilustrativos mostram a validade da teoria proposta e sua eficiência quando comparada à técnicas recentes disponíveis na literatura. A notação utilizada é padrão. Para matrizes e vetores reais, $(\cdot)'$ denota o transposto. Para uma matriz simétrica, $(\bullet)$ denota cada um dos seus blocos simétricos. Os símbolos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{N}$ denotam os conjuntos dos números reais e naturais, respectivamente. O conjunto $\mathbb{K} := \{1, \dots, N\}$ é composto pelos N primeiros números naturais não nulos. O símbolo $\otimes$ denota o produto de Kronecker. Para qualquer matriz simétrica, $X > 0$ ($X \geq 0$) denota uma matriz (semi)definida positiva. Uma combinação convexa de matrizes de mesma dimensão é denotada por $X_\lambda = \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i X_i$ com $\lambda \in \Lambda$ onde $\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{R}^n : \lambda_i \geq 0, \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i = 1\}$ é o simplex unitário. Uma matriz quadrada é dita Hurwitz se todos seus autovalores s_i satisfazem $\text{Re}(s_i) < 0$. Uma matriz é dita Schur estável se todos seus autovalores z_i satisfazem $|z_i| < 1$. O autovalor máximo de uma matriz simétrica Q é denotado por $\gamma_{\max}(Q)$.

2 Formulação do problema

Considere um sistema afim com comutação com a seguinte realização no espaço de estado

$$x[k+1] = A_\sigma x[k] + b_\sigma, \quad x[0] = x_0 \quad (1)$$

onde $x[k] \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $\sigma(x): \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{K}$ é a função de comutação que escolhe a cada instante de tempo um dos N subsistemas disponíveis $(A_i, b_i), i \in \mathbb{K}$. Neste contexto, $\sigma(x) \in \mathbb{K}$ é uma sequência de controle a ser determinada de modo a orquestrar o estado do sistema em direção a um ponto de equilíbrio $x_e \in \mathbb{R}^n$. Definindo a variável auxiliar $\xi[k] = x[k] - x_e, \forall k \in \mathbb{N}$, o sistema (1) pode ser reescrito como

$$\xi[k+1] = A_\sigma \xi[k] + \ell_\sigma, \quad \xi[0] = \xi_0 \quad (2)$$

com $\ell_i = (A_i - I)x_e + b_i, \forall i \in \mathbb{K}$. O objetivo é o projeto de $\sigma(x)$ tal que, idealmente, $\xi[k] \rightarrow 0$ para qualquer condição inicial x_0 . Contudo, diferente do que ocorre no domínio do tempo contínuo este objetivo não pode ser assegurado. De fato, como o ponto de equilíbrio x_e é geralmente diferente dos pontos de equilíbrio de cada um dos

subsistemas isolados, a frequência de comutação deve ser extremamente elevada (fenômeno “chattering”) para manter as trajetórias do estado fixas sobre ele. Uma vez que os sistemas discretos têm uma limitação natural na frequência de comutação definida pela frequência de amostragem, a estabilidade assintótica é geralmente impossível de ser assegurada. Dessa forma, o objetivo do problema passa a ser garantir estabilidade prática, onde as trajetórias do sistema (2) serão guiadas para uma região de convergência tão pequena quanto possível contendo o ponto de equilíbrio de interesse.

Como será esclarecido na próxima seção, nossas condições são obtidas a partir da função de Lyapunov quadrática $v(\xi) = \xi' P \xi$ e a regra de comutação associada é

$$\sigma(\xi) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} v(A_i \xi + \ell_i) \quad (3)$$

a qual é responsável por levar o estado do sistema para a região de convergência definida a seguir.

Definição 1 Uma região $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ é uma região de convergência do sistema (2) governado por uma função de comutação $\sigma(\xi)$ se as seguintes condições forem simultaneamente satisfeitas:

- (a) $0 \in \mathcal{X}$;
- (b) Se $\xi \notin \mathcal{X}$, então $\Delta v(\xi) < 0$;

De acordo com a definição acima, as trajetórias do sistema tendem ao ponto de equilíbrio $\xi = 0$ dentro da região $\mathcal{X}$ mas, devido a (b), não o atingem. Note que as trajetórias podem deixar $\mathcal{X}$ mas, devido a (b), sempre retornam para esta região em um instante de tempo subsequente. Segundo a referência recente (Deaecto and Geromel, 2016) a propriedade de invariância pode ser garantida incluindo na Definição 1 a seguinte condição: se $\xi[k] \in \mathcal{X}$ então $\xi[k+1] \in \mathcal{X}$. A seção seguinte apresenta condições para o projeto de (3) levando em conta a minimização do volume de $\mathcal{X}$.

3 Análise de estabilidade

Considere o conjunto de pontos de equilíbrio atingíveis dado por

$$X_e := \{x_e \in \mathbb{R}^n : x_e = (I - A_\lambda)^{-1} b_\lambda, \lambda \in \mathcal{S}\} \quad (4)$$

com $\mathcal{S} \subseteq \Lambda$ sendo o conjunto de todos os $\lambda \in \Lambda$ tais que A_λ é Schur estável. O próximo teorema permite encontrar uma região elipsoidal de mínimo volume que garante estabilidade prática de qualquer ponto de equilíbrio em (4).

Teorema 1 Seja o sistema afim com comutação (2) e um ponto $x_e \in X_e$ associado a um $\lambda \in \mathcal{S}$ dado. Se existirem matrizes simétricas $P > 0$ e $W > 0$ solução do problema de otimização convexa

$$\inf_{P>0, W>0} -\ln(\det(W)) \quad (5)$$

sujeito a

$$\sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i A_i' P A_i - P < -W \quad (6)$$

$$\sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i \begin{bmatrix} 1 - \ell_i' P \ell_i & \bullet \\ c_i & W \end{bmatrix} > 0 \quad (7)$$

onde $c_i = A_i' P \ell_i$, então a função de comutação (3) garante que a região elipsoidal

$$\mathcal{X}_* := \{\xi \in \mathbb{R}^n : (\xi - \mu)' W (\xi - \mu) \leq 1\} \quad (8)$$

É uma região de convergência de volume mínimo centrada em $\mu = W^{-1} c_\lambda$.

Prova: Adotando a função de Lyapunov $v(\xi) = \xi' P \xi$ e utilizando a regra de comutação (3) temos

$$\begin{aligned} \Delta v(\xi) &= v(A_\sigma \xi + \ell_\sigma) - v(\xi) \\ &= \min_{i \in \mathbb{K}} (A_i \xi + \ell_i)' P (A_i \xi + \ell_i) - \xi' P \xi \\ &\leq -\xi' Q_\lambda \xi + 2c_\lambda' \xi + \rho_\lambda \\ &\leq -(\xi - \mu)' Q_\lambda (\xi - \mu) + c_\lambda' Q_\lambda^{-1} c_\lambda + \rho_\lambda \end{aligned} \quad (9)$$

com $-Q_i = A_i' P A_i + P$ e $\rho_i = \ell_i' P \ell_i$, $\forall i \in \mathbb{K}$. Sem perda de generalidade podemos introduzir uma nova variável matricial $W < Q_\lambda$ e uma restrição $c_\lambda' Q_\lambda^{-1} c_\lambda + \rho_\lambda < 1$ o que nos leva às desigualdades (6) e (7). Juntamente com (9), tais desigualdades garantem que para todo $\xi \notin \mathcal{X}_*$ temos $\Delta v(\xi) < 0$. Além disso, a verificação de que $0 \in \mathcal{X}_*$ é obtida facilmente substituindo $\xi = 0$ no lado esquerdo de (8) e a partir de (7), concluímos que $c_\lambda' W^{-1} c_\lambda < c_\lambda' W^{-1} c_\lambda + \rho_\lambda < 1$. A prova é finalizada levando em conta que o volume de $\mathcal{X}_*$ é proporcional a $(\det(W))^{-1/2}$ e minimizar este determinante é o mesmo que minimizar $-\ln(\det(W))$. $\square$

É importante ressaltar alguns pontos a respeito deste resultado. O primeiro refere-se   função objetivo. Note que o resultado do Teorema 1 é expresso por Desigualdades Matriciais Lineares¹ com uma função objetivo convexa porém não-linear cuja derivada é dada por $d \ln(\det(W))/dW = W^{-1}$. A literatura apresenta alguns métodos para resolver este problema, veja (Lasdon, 1970). Na nossa visão, ele pode ser resolvido adequadamente pelo algoritmo de Frank-Wolfe, resumido a seguir, veja (Frank and Wolfe, 1956).

- Iterar até a convergência
- Escolha $q = 0$ e W_q factível.

1. Resolva o problema de otimização convexa

$$\inf_{P > 0, S > 0} -\text{tr}(W_q^{-1} S)$$

¹do inglês Linear Matrix Inequalities, veja (Boyd et al., 1994)

sujeito a

$$\sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i A_i' P A_i - P < -S$$

$$\sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i \begin{bmatrix} 1 - \ell_i' P \ell_i & \bullet \\ c_i & S \end{bmatrix} > 0$$

e determine a solução ótima S_q .

2. Por busca unidimensional, determine

$$\alpha_q = \arg \max_{\alpha \in [0,1]} \ln(\det(\alpha S_q + (1 - \alpha) W_q))$$

faça $W_{q+1} = \alpha_q S_q + (1 - \alpha_q) W_q$, $q \leftarrow q + 1$ e repita.

Aplicando este método, a convergência para a solução ótima é sempre garantida. O segundo ponto diz respeito   suficiência das condições propostas. Infelizmente, diferente das condições obtidas para o domínio do tempo contínuo não   possível encontrar uma condição de estabilidade baseada no fato da matriz A_λ ser Schur estável. Como provado em (Deaecto et al., 2014), a condição necessária e suficiente para a factibilidade de $\sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i A_i' P A_i - P < 0$ é a matriz $\sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i (A_i' \otimes A_i) \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ ser Schur estável, o que geralmente é uma condição mais restritiva do que exigir que apenas a matriz A_λ seja Schur estável. O último ponto refere-se   região de convergência do Teorema 1. Note que ela é descentralizada, o que pode ser uma restrição para a minimização do volume. Como discutido na referência (Deaecto and Egidio, 2016) uma escolha diferente para o conjunto de pontos de equilíbrio permite a obtenção de uma região de convergência centrada na origem. Entretanto, o preço a ser pago   que as novas condições são extremamente não-lineares, não-convexas e não permitem a definição *a priori* do ponto de equilíbrio de interesse. Além disso, foi possível concluir que nenhuma das condições   melhor em termos de minimização do volume. O exemplo a seguir mostra a eficiência da regra de comutação proposta.

Exemplo 1 Considere o sistema (1) com dois subsistemas instáveis definidos por

$$A_i = e^{F_i T}, \quad b_i = \int_0^T e^{F_i \tau} d\tau g_i, \quad i \in \{1, 2\}$$

onde $T = 1$ e

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$g_1 = [0 \ 1 \ 0]'$ e $g_2 = [0 \ 0 \ 1]'$ com um vetor $\lambda = [0.4 \ 0.6] \in \mathcal{S}$ associado a um ponto de equilíbrio $x_e = [3.2545 \ -0.0048 \ -0.4645]' \in X_e$.

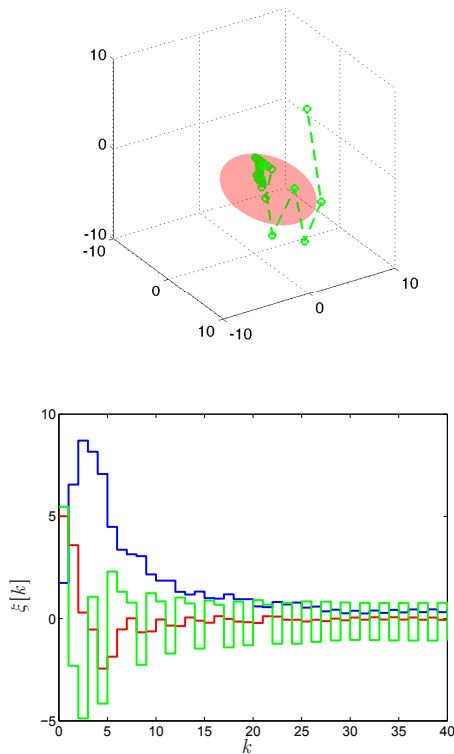


Figura 1: Região de convergência $\mathcal{X}_*$ e simulação no tempo.

Resolvendo o problema (5) do Teorema 1, obtivemos a solução ótima

$$W = \begin{bmatrix} 0.0369 & -0.0226 & 0.0037 \\ -0.0226 & 0.1070 & -0.0114 \\ 0.0037 & -0.0114 & 0.1047 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.5363 & 0.3984 & 0.0793 \\ 0.3984 & 1.4454 & 0.4763 \\ 0.0793 & 0.4763 & 0.3014 \end{bmatrix}$$

que define a região $\mathcal{X}_*$ centrada em $\mu = [3.5214 \ -0.6451 \ -1.1459]$ com volume mínimo $\text{vol}_{T_1}(\mathcal{X}_*) = 222.21$. A Figura 1 mostra, na parte superior, o espaço de estado com a região $\mathcal{X}_*$ e as trajetórias do sistema em malha fechada partindo de $\xi_0 = [1.7455 \ 5.0048 \ 5.4645]'$ e, na parte inferior, a simulação correspondente no tempo.

4 Sistemas com dados amostrados

Esta seção é dedicada ao controle de sistemas afins com comutação a tempo contínuo com dados amostrados. Neste caso, o projetista define um período de amostragem $T > 0$ durante o qual a função de comutação não varia. Na sequência, ainda nesta seção, trataremos o caso em que o período de amostragem $T_k = t_{k+1} - t_k > 0$ é não uniforme entre dois instantes de comutação sucessivos, satisfazendo $T_k \in [T_{\min}, T_{\max}]$. Considere

o seguinte sistema afim a tempo contínuo

$$\dot{y}(t) = F_\sigma y(t) + g_\sigma, \quad y(0) = y_0 \quad (10)$$

Já é conhecido da literatura, veja (Deaecto et al., 2010) e (Deaecto and Santos, 2015), que esta classe de sistemas pode ser controlada por uma função de comutação dependente do estado a qual faz com que o ponto de equilíbrio $y_e \in Y_e := \{y_e \in \mathbb{R}^n : y_e = -F_\lambda^{-1} g_\lambda, \lambda \in \mathcal{H}\}$ seja globalmente assintoticamente estável, sendo $\mathcal{H} \subseteq \Lambda$ o conjunto de todos os vetores $\lambda \in \Lambda$ tal que F_λ é Hurwitz. A principal preocupação prática é a ocorrência do “chattering”, fenômeno que desejamos evitar a partir da escolha de uma função de comutação que se mantém constante em $t \in [t_k, t_{k+1}[$, sendo $T = t_{k+1} - t_k > 0$. É também conhecido na literatura, veja (Deaecto et al., 2014), que uma representação a tempo discreto de (10) é dada por (1) com as matrizes $A_i = e^{F_i T}$ e $b_i = \int_0^T e^{F_i \tau} d\tau g_i, \forall i \in \mathbb{K}$ tal que $x[k] = y(t_k) = y(kT), \forall k \in \mathbb{N}$. Após escolher $y_e \in Y_e$ associado a um $\lambda \in \mathcal{H}$ e calcular o correspondente $x_e \in X_e$, esta função de comutação pode ser obtida a partir do Teorema 1 adicionando ao conjunto de restrições a desigualdade $(y_e - x_e - \mu)' W (y_e - x_e - \mu) < 1$ que pode ser reescrita como uma LMI na forma

$$\begin{bmatrix} (y_e - x_e)' W (y_e - x_e) - & & \\ -2c'_\lambda (y_e - x_e) - 1 & \bullet & \\ c_\lambda & & -W \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

A solução deste problema define a região de convergência de mínimo volume contendo y_e em seu interior.

Neste ponto é importante analisar o que ocorre quando o período de amostragem $T > 0$ se torna arbitrariamente pequeno. Adotando a aproximação de primeira ordem $A_i \approx I + T F_i$ e $b_i = T g_i$, encontramos que $X_e \rightarrow Y_e$ elemento a elemento quando $T > 0$ tende a zero. Além disso, os vetores $\ell_i \rightarrow T(F_i x_e + g_i)$ e $c_i \rightarrow P \ell_i, \forall i \in \mathbb{K}$. Consequentemente, $\ell_\lambda \rightarrow 0$ pois $x_e \rightarrow y_e$ e $c_\lambda \rightarrow 0$ que, por sua vez, implica que $\mu = 0$ e a região de convergência torna-se a origem $\mathcal{X}_* \rightarrow \{0\}$, indicando que $y(t)$ tende assintoticamente para y_e . Finalmente, a função de comutação torna-se

$$\begin{aligned} \sigma(\xi) &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}} v(A_i \xi + \ell_i) \\ &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}} v(\xi + T(F_i \xi + F_i x_e + g_i)) \\ &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \xi' P (F_i \xi + (F_i y_e + g_i)) \end{aligned} \quad (12)$$

recuperando a conhecida função de comutação para sistemas a tempo contínuo, veja (Deaecto et al., 2014).

Visando levar em conta a robustez em relação ao período de amostragem, consideramos que $t_{k+1} - t_k = T_k > 0$ sendo $T_k \in \Omega := [T_{\min}, T_{\max}]$, com $T_{\min} > 0$ e $T_{\max} > 0$ definidos pelo projetista. Não é simples a tarefa de garantir que as

condições do Teorema 1 juntas com (11) são válidas para todo $T \in \Omega$ devido ao fato de dependerem intrinsecamente de T . Definindo a função

$$\Psi(P, W, T) = \begin{bmatrix} -Q_\lambda + W & 0 & 0 \\ 0 & f(x_e) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \xi'_e W \xi_e - 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

com $f(x_e) = c'_\lambda W^{-1} c_\lambda + \rho_\lambda$ e $\xi_e = y_e - x_e - \mu$, temos que as condições do Teorema 1 e (11) são satisfeitas sempre que $\Psi(P, W, T) < 0$, $\forall T \in \Omega$. Uma possível estratégia é avaliar (13) para cada $T \in \Omega_{ap} \subset \Omega$, onde Ω_{ap} é uma discretização suficientemente refinada de Ω , veja (Deaecto et al., 2014) e (Geromel and Souza, 2015). O algoritmo seguinte proposto em (Geromel and Souza, 2015) assegura a validade de (13) para todo $T \in \Omega$.

- Escolha $y_e \in Y_e$ associado a um $\lambda \in \mathcal{H}$.
- Seja $q = 0$ e $\Omega_{ap} = \{T_{max}\}$.
 1. Calcule $x_e(T) \in X_e$ e encontre a solução P_{q+1}, W_{q+1} da função objetivo $J_{q+1} = \inf_{\{P, W\}} -\ln(\det(W))$ sujeito a (6), (7) e (11) para todo $T \in \Omega_{ap}$. Se infactível, o mesmo é válido para o Teorema 1 com $T \in \Omega$. Pare.

2. Por busca linear, determine

$$T_{q+1} = \arg \max_{T \in \Omega} \gamma_{max}(\Psi(P_{q+1}, W_{q+1}, T))$$

Se $\gamma_{max}(\Psi(P_{q+1}, W_{q+1}, T_{q+1})) < 0$, pare. A solução ótima foi encontrada e é válida para todo $T \in \Omega$.

3. Atualize $\Omega_{ap} \leftarrow \Omega_{ap} \cup \{T_{q+1}\}$, faça $q \leftarrow q + 1$ e repita.

Note que no passo 3 o algoritmo aumenta o conjunto de restrições do problema de otimização e por consequência $J_{q+1} > J_q$. Este algoritmo converge para a solução ótima sempre que o problema admitir uma solução limitada. O próximo exemplo ilustra os aspectos mais importantes da estratégia de controle proposta.

Exemplo 2 Os dados numéricos estão disponíveis no Exemplo 1 de (Hetel and Fridman, 2013), que refere-se a um sistema afim com comutação a tempo contínuo composto de $N = 4$ subsistemas instáveis. O ponto de equilíbrio de interesse é a origem $y_e = 0$ associado a $\lambda = [0.15 \ 0.20 \ 0.30 \ 0.35]'$. Aplicando as condições do Teorema 1 junto com (11), concluímos que o sistema é praticamente estável para um período de amostragem variante no tempo $T_k \in]0, T_{max}]$ com $T_{max} = 1.726 \times 10^{-3}$, o que é quatro vezes maior que o máximo intervalo obtido em (Hetel and Fridman, 2013), onde $T_{max} = 3.2 \times 10^{-4}$. Escolhendo um intervalo $\Omega = [3 \times 10^{-4}, 15 \times 10^{-4}]$, aplicamos o último algoritmo para as condições do Teorema

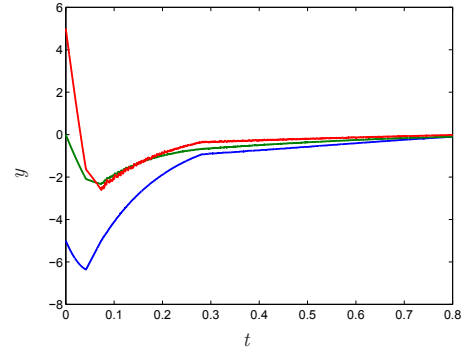
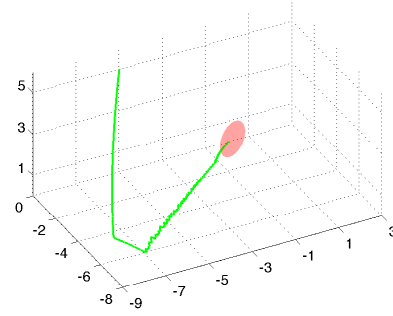


Figura 2: Região de convergência $\mathcal{X}_*$ e simulação no tempo.

1 e (11). Após duas iterações obtivemos a solução ótima

$$W = \begin{bmatrix} 3.7088 & -1.5911 & -0.9532 \\ -1.5911 & 2.2688 & 1.0422 \\ -0.9532 & 1.0422 & 1.8088 \end{bmatrix}$$

$$P = 10^4 \times \begin{bmatrix} 0.2711 & -0.2263 & -0.0598 \\ -0.2263 & 2.1207 & -0.7809 \\ -0.0598 & -0.7809 & 0.5551 \end{bmatrix}$$

e um volume mínimo $\text{vol}(\mathcal{X}_*) = 1.51$. A Figura 2 apresenta, na parte superior, o espaço de estado junto com a região $\mathcal{X}_*$ e as trajetórias do sistema em malha fechada, iniciando em $y_0 = [-5 \ 0 \ 5]'$, com $T_k \in \Omega$ uniformemente distribuído no intervalo mencionado. Na parte inferior apresentamos a simulação no tempo correspondente.

5 Conclusão

Neste artigo propusemos uma função de comutação que assegura estabilidade prática de sistemas afins com comutação a tempo discreto. O problema de projeto leva em conta a minimização do volume de uma região de convergência elipsoidal para onde o estado do sistema é assintoticamente atraído. O resultado é adaptado para tratar o controle de sistemas contínuos com dados amostrados considerando robustez em relação ao período de amostragem. Os exemplos apresentados ilustraram a eficiência da técnica proposta.

Agradecimentos

Este trabalho contou com o apoio financeiro da Fapesp (Processos 2013/08691-2 e 2014/06509-5) e do CNPq (Processos 443166/2014-5 e 306911/2015-9).

Referências

- Bolzern, P. and Spinelli, W. (2004). Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point, *Proc. of the American Control Conference*, Boston, USA, pp. 3890–3895.
- Boyd, S. P., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia.
- Cardim, R., Teixeira, M., Assunção, E. and Covacic, M. R. (2009). Variable-structure control design of switched systems with an application to a DC–DC power converter, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **56**(9): 3505–3513.
- Corona, D., Buisson, J., De Schutter, B. and Giua, A. (2007). Stabilization of switched affine systems: An application to the buck-boost converter, *Proc. of the American Control Conference*, New York, USA, pp. 6037–6042.
- Deaecto, G. S. and Egidio, L. N. (2016). Practical stability of discrete-time switched affine systems, *Proc. of the European Control Conference*, Aalborg, DK, pp. 2048–2053.
- Deaecto, G. S. and Geromel, J. C. (2016). Stability and robustness analysis of discrete-time switched affine systems, *Submitted*.
- Deaecto, G. S., Geromel, J. C., Garcia, F. and Pomilio, J. (2010). Switched affine systems control design with application to DC–DC converters, *IET Control Theory Appl.* **4**(7): 1201–1210.
- Deaecto, G. S. and Santos, G. C. (2015). State feedback $\mathcal{H}_\infty$ control design of continuous-time switched affine systems, *IET Control Theory Appl.* **9**(10): 1511–1516.
- Deaecto, G., Souza, M. and Geromel, J. C. (2014). Chattering free control of continuous-time switched linear systems, *IET Control Theory Appl.* **8**(5): 348–354.
- DeCarlo, R., Branicky, M. S., Pettersson, S., Lenartson, B. et al. (2000). Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems, *Proc. of the IEEE* **88**(7): 1069–1082.
- Frank, M. and Wolfe, P. (1956). An algorithm for quadratic programming, *Naval Research Logistics Quarterly* **3**(1-2): 95–110.
- Geromel, J. C., Deaecto, G. S. and Daafouz, J. (2013). Suboptimal switching control consistency analysis for switched linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **58**(7): 1857–1861.
- Geromel, J. C. and Souza, M. (2015). On an LMI approach to optimal sampled-data state feedback control design, *International Journal of Control* **88**(11): 2369–2379.
- Hauroigne, P., Riedinger, P. and Iung, C. (2011). Switched affine systems using sampled-data controllers: Robust and guaranteed stabilization, *IEEE Transactions on Automatic Control* **56**(12): 2929–2935.
- Hetel, L. and Fridman, E. (2013). Robust sampled-data control of switched affine systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **58**(11): 2922–2928.
- Kuiava, R., Ramos, R. A., Pota, H. R. and Alberto, L. F. (2013). Practical stability of switched systems without a common equilibrium and governed by a time-dependent switching signal, *European Journal of Control* **19**(3): 206–213.
- Lasdon, L. S. (1970). *Optimization Theory for Large Scale Systems*, MacMillan, New York.
- Liberzon, D. (2003). *Switching in Systems and Control*, Birkhauser, Boston, USA.
- Patino, D., Riedinger, P. and Iung, C. (2009). Practical optimal state feedback control law for continuous-time switched affine systems with cyclic steady state, *International Journal of Control* **82**(7): 1357–1376.
- Scharlau, C. C., de Oliveira, M. C., Trofino, A. and Dezuo, T. J. (2014). Switching rule design for affine switched systems using a max-type composition rule, *Systems & Control Letters* **68**: 1–8.
- Seatzu, C., Corona, D., Giua, A., Bemporad, A. et al. (2006). Optimal control of continuous-time switched affine systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **51**(5): 726–741.
- Shorten, R., Wirth, F., Mason, O., Wulff, K. and King, C. (2007). Stability criteria for switched and hybrid systems, *SIAM Review* **49**(4): 545–592.
- Sun, Z. (2005). *Switched Linear Systems: Control and Design*, Springer, London, UK.