

CÁLCULO DE CUSTO GARANTIDO $\mathcal{H}_\infty$ PELO MÉTODO DE EVOLUÇÃO DIFERENCIAL

DEVAIR DE MOURA MARCOS, EDUARDO NUNES GONÇALVES*

*Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica UFSJ/CEFET-MG
Departamento de Engenharia Elétrica - CEFET-MG, Av. Amazonas 7675
Belo Horizonte, MG, Brasil

Email: devauaiso@yahoo.com.br, eduardong@des.cefetmg.br

Abstract— This work presents a new methodology for $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost analysis of uncertain time-invariant linear systems represented by polytopic system models. Analysis formulations based on linear matrix inequalities are quite popular but they can produce conservative results or even fail to achieve a result in the case of systems with higher order or higher number of polytope vertices. In a previous work, it was verified that the Branch-and-bound method, that combines an analysis formulation based on linear matrix inequalities with a polytope division technique, can compute the $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost with any required precision. The only downside of the Branch-and-bound method is the fact that the computational cost grows rapidly with the complexity of the system. Thus, the contribution of this work is to propose an alternative method of $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost analysis with lower computational cost. We propose to apply the differential evolution optimization algorithm to try to locate the maximum $\mathcal{H}_\infty$ norm in the polytope. After several experiments with different implementations and different configurations for the algorithm, we have achieved an implementation version with high success rate. We present the results of the proposed approach considering an extensive test with 225 polytopic systems generated randomly.

Keywords— $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost, polytopic systems, differential evolution algorithm.

Resumo— Este trabalho apresenta uma nova metodologia de análise de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas lineares invariantes no tempo incertos representados por modelos de sistemas politópicos. Formulações de análise baseadas em desigualdades matriciais lineares são bastante populares mas podem produzir resultados bastante conservadores ou até mesmo não apresentar um resultado no caso de sistemas de ordem mais elevada ou com maior número de vértices do politopo. Em trabalho anterior foi verificado que pelo método *Branch-and-bound*, que combina uma formulação de análise baseada em desigualdades matriciais lineares com uma técnica de divisão do politopo, é possível determinar o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ com qualquer precisão especificada. A única desvantagem do método *Branch-and-bound* é o fato do custo computacional crescer rapidamente com a complexidade do sistema. Desse modo, a contribuição desse trabalho é propor uma forma alternativa de análise de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ com menor custo computacional. Nós propomos aplicar o algoritmo de otimização de evolução diferencial para tentar localizar o máximo global da norma $\mathcal{H}_\infty$ no politopo. Após vários experimentos, com diferentes formas de implementação e diferentes configurações do algoritmo, foi obtida uma versão de implementação com alta taxa de sucesso. São apresentados os resultados do método proposto considerando um teste exaustivo com 225 sistemas politópicos gerados de forma aleatória.

Palavras-chave— custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, sistemas politópicos, algoritmo de evolução diferencial

1 Introdução

Uma das formas de caracterizar o desempenho de sistemas de controle é através de normas matriciais de determinadas matrizes de transferência do sistema. Normas matriciais, como a norma $\mathcal{H}_\infty$, proporcionam uma medida da influência das entradas exógenas (distúrbios de carga, ruídos, sinais de referência etc.) sobre as saídas controladas do sistema (erros de rastreamento, sinais de controle etc.). Um dos grandes desafios do projeto de sistemas de controle é garantir não somente a estabilidade bem como o desempenho frente às incertezas inerentes aos modelos utilizados para análise e síntese. Tais incertezas podem ser decorrentes de dinâmicas negligenciadas da planta, de não linearidades e de incertezas sobre parâmetros do sistema que não são precisamente conhecidos. Uma das formas de se modelar sistemas incertos é tratá-los como sistemas lineares invariantes no tempo, representados por modelos no espaço de estados, com incerteza politópica. Em tal

representação, cada sistema pertencente ao domínio de incerteza pode ser descrito como a combinação convexa dos sistemas que correspondem aos vértices do politopo. A popularidade de modelos de sistema politópicos se deve, em parte, às formulações de análise e síntese descritas em termos de desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *linear matrix inequalities*) (Boyd et al., 1994). Através das formulações LMI, é possível analisar e projetar sistemas de controle considerando somente os sistemas correspondentes aos vértices do politopo. Desse modo, problemas de otimização global não-convexos, de difícil solução, são representados por problemas convexos com disponibilidade de *softwares* comerciais e gratuitos para sua solução (Sturm, 1999).

Existem formulações LMI de análise para o cálculo de um limitante superior para a norma $\mathcal{H}_\infty$ dos infinitos sistemas pertencentes ao domínio de incerteza politópico, denominado custo garantido $\mathcal{H}_\infty$. Formulações LMI de análise baseadas no conceito de estabilidade quadrática (Palhares

et al., 1997), com o uso de uma única variável de Lyapunov para todo o domínio de incerteza, geralmente resulta em resultados conservadores. Para reduzir o conservadorismo, trabalhos posteriores adotaram o uso de variáveis de Lyapunov dependentes de parâmetros, variáveis matriciais extras e/ou parâmetros de sintonia, como por exemplo em Apkarian et al. (2001), de Oliveira et al. (2002), de Oliveira et al. (2004a), de Oliveira et al. (2004b), Ebihara and Hagiwara (2004), Trofino et al. (2005) e He et al. (2005). Contudo, os valores obtidos por estas estratégias são apenas limites superiores dos custos exatos e a precisão dos resultados obtidos pode variar consideravelmente de um caso para outro. Para reduzir o conservadorismo, as novas formulações estão cada vez mais complexas, requerendo maior esforço computacional, como, por exemplo, as formulações baseadas em funções de Lyapunov quadráticas com dependência polinomial homog nea de grau arbitrário nos parâmetros (Chesi et al., 2005; Oliveira and Peres, 2005). A vantagem desta abordagem   que a precisão do custo garantido pode ser melhorada com o aumento do grau da dependência polinomial de parâmetros. Entretanto, a complexidade dessas formulações aumenta rapidamente com o número de vértices do domínio politópico de incerteza e com o grau do pol n mio.

No caso de sistema lineares invariantes no tempo (SLIT), foi verificado que   possível calcular o custo garantido com qualquer precisão desejada através do método *Branch-and-bound* (Gonçalves et al., 2007). Esse método combina formulações LMI de análise com uma técnica de divisão de politopos. O valor máximo dos custos garantidos calculados para cada divisão do politopo é considerado o limitante superior e o valor máximo de norma nos vértices das divisões do politopo é considerado o limitante inferior. O método converge quando a diferença entre os dois limitantes atende   precisão especificada ou se   localizado um sistema instável sobre os vértices das divisões do politopo. O método *Branch-and-bound* possui uma desvantagem, compartilhada pelas formulações LMIs, de que o custo computacional aumenta consideravelmente com o aumento da ordem do sistema e do número de vértices do politopo. Esse fato motiva o desenvolvimento de metodologias alternativas de análise de desempenho robusto de SLIT. A contribuição desse trabalho é propor uma metodologia de cálculo de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ baseado no algoritmo de evolução diferencial (DE, do inglês *Differential Evolution*). O Algoritmo DE   um algoritmo de otimização evolucionário baseado em populações. A escolha do algoritmo DE se deve ao fato de sua simplicidade de implementação e capacidade para obter o mínimo global de uma função não convexa de forma eficiente e com menor custo computacional que outros algoritmos de otimização baseados em po-

pula  es. A motivação para o desenvolvimento de novas estratégia de cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ é a utilização do método no passo de análise de um procedimento iterativo de síntese de sistemas de controle robusto (Gonçalves et al., 2008; Gonçalves et al., 2011).

Esse trabalho é organizado como descrito a seguir. Na seção 2 é apresentada a formulação do problema de análise de desempenho robusto em termos de um problema de otimização que possa ser resolvido pelo algoritmo DE. Na seção 3 são propostas uma implementação do algoritmo DE e uma configuração de parâmetros obtidos após vários testes com diferentes possibilidades. Na seção 4 são apresentados os resultados de testes exaustivos do método DE proposto para analisar a viabilidade de seu uso como estratégia de análise de desempenho robusto de SLIT. Por fim são apresentadas as conclusões do estudo realizado.

2 Formulação do problema

Considere o sistema linear invariante no tempo, incerto, representado pelo modelo no espaço de estados a seguir:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\chi)x(t) + B(\chi)w(t) \\ z(t) &= C(\chi)x(t) + D(\chi)w(t)\end{aligned}\quad (1)$$

com $A(\chi) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(\chi) \in \mathbb{R}^{n \times n_w}$, $C(\chi) \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$ e $D(\chi) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_w}$. Seja $S(\chi)$ a matriz sistema definida como:

$$S(\chi) \triangleq \begin{bmatrix} A(\chi) & B(\chi) \\ C(\chi) & D(\chi) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Considere que a matriz sistema $S(\chi)$ não é precisamente conhecida, mas pertence a um conjunto poliédrico convexo fechado, ou politopo: $S(\chi) \in \mathcal{S}$. O conjunto $\mathcal{S}$ é um politopo no espaço de matrizes definido pelo conjunto de todas matrizes obtidas pela combinação convexa de seus η vértices:

$$\mathcal{S} \triangleq \left\{ S(\chi) : S(\chi) = \sum_{i=1}^{\eta} \chi_i S_i, \chi \in \Omega \right\} \quad (3)$$

sendo

$$S_i \triangleq \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, \eta \quad (4)$$

os vértices do politopo e

$$\Omega \triangleq \left\{ \chi \in \mathbb{R}^{\eta} : \chi_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\eta} \chi_i = 1 \right\}, \quad (5)$$

sendo $\chi = [\chi_1 \ \dots \ \chi_{\eta}]^T$ o vetor que parametriza o politopo. O conjunto Ω é um simplex unitário no espaço de dimensão $\eta - 1$.

Uma das formas de quantificar um sinal contínuo no domínio do tempo é pela norma $\mathcal{L}_2$ definida como

$$\|w(t)\|_2 \triangleq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} w(t)^2 dt}. \quad (6)$$

Se esta integral   finita, o sinal é dito ser quadrado integrável, representado por $w(t) \in \mathcal{L}_2$.

Seja $T_{zw}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ a matriz de transferência relacionando o vetor de entradas exógenas $w(t)$ e o vetor de saídas controladas $z(t)$. A norma $\mathcal{H}_\infty$ de uma matriz de transferência de um sistema estável, corresponde ao pico do ganho da resposta em freqüência, sendo definida como

$$\|T_{zw}(s)\|_\infty \triangleq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}[T_{zw}(j\omega)], \quad (7)$$

sendo $\bar{\sigma}(\cdot)$ o valor singular máximo do argumento. Normas de sistemas podem ser relacionadas com os sinais de entrada e saída no domínio do tempo. O ganho $\mathcal{L}_2$ de um sistema estável linear invariante no tempo corresponde ao maior ganho entre a entrada e saída sobre todos os sinais de entrada limitados $w(t) \in \mathcal{L}_2$, sendo dado por

$$\|T_{zw}(s)\|_\infty = \max_{w(t) \in \mathcal{L}_2, w(t) \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} \quad (8)$$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser determinada resolvendo o seguinte problema de otimização baseado em LMI: se existe $\gamma > 0$ e $P = P^T \succ 0$ que resolvem

$$\begin{aligned} \gamma^* &= \min_{\gamma, P=P^T \succ 0} \gamma \\ \text{sujeito a:} \\ \begin{bmatrix} A^T P + P A & P B & C^T \\ B^T P & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} &\prec 0, \end{aligned} \quad (9)$$

então $\|T_{zw}(s)\|_\infty = \gamma$.

No caso de SLIT incertos com modelo politópico, deseja-se determinar o valor máximo da norma $\mathcal{H}_\infty$, ou custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, para o domínio politópico Ω :

$$\gamma_c \triangleq \max_{\chi \in \Omega} \|T_{zw}(s, \chi)\|_\infty, \quad (10)$$

sendo $T_{zw}(s, \chi) = C(\chi)[sI - A(\chi)]^{-1}B(\chi) + D(\chi)$.

Uma formulação LMI para o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ com função de Lyapunov dependente de parâmetros é apresentada em (de Oliveira et al., 2004b): se existe $\mu_c > 0$ e $P_i = P_i^T \succ 0$, $i = 1, \dots, \eta$, que resolvem o seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} \mu_c^* &= \min_{\mu_c, P_i} \mu_c \\ \text{sujeito a:} \\ \begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i & P_i B_i & C_i^T \\ B_i^T P_i & -I & D_i^T \\ C_i & D_i & -\mu_c I \end{bmatrix} &\prec 0, \\ i &= 1, \dots, \eta \\ \begin{bmatrix} A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j & P_i B_j + P_j B_i & \dots \\ B_j^T P_i + B_i^T P_j & -2I & \dots \\ C_i + C_j & D_i + D_j & \dots \end{bmatrix} &\prec 0, \\ i &= 1, \dots, \eta - 1, j = i + 1, \dots, \eta, \end{aligned} \quad (11)$$

então $\gamma_c^2 \leq \mu_c^*$.

Além do conservadorismo das formulações de análise baseadas em LMIs, em muitos casos não é obtida uma solução para o problema de otimização. Como mencionado na introdução, pela metodologia para cálculo de custo garantido baseado no método *Branch-and-bound* (BB)   possível calcular o custo garantido com qualquer precisão necessária. Entretanto, o método BB apresenta um rápido crescimento do custo computacional com o número de vértices do polit po, η , que define a dimensão do polit po sendo particionado. Desse modo, é interessante desenvolver uma nova metodologia para os casos em que o custo computacional passe a ser proibitivo. O problema de cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ de um sistema politópico pode ser formulado como um problema de otimização:

$$\chi^* = \arg \max_{\chi \in \Omega} \|T_{zw}(s, \chi)\|_\infty \quad (12)$$

sendo $\gamma_c = \|T_{zw}(s, \chi^*)\|_\infty$. Os algoritmos evolutivos baseados em populações possuem maior probabilidade de localizar o mínimo global de funções multimodais, que é o caso do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$. Existem diferentes métodos de otimização evolutivo, entre eles o algoritmo genético, o algoritmo de evolução diferencial e o algoritmo de enxame de partículas. A opção nesse trabalho foi adotar o algoritmo de evolução diferencial, descrito na próxima seção, com base em nossa experiência com esses três algoritmos. A função objetivo a ser minimizada, $f(\chi) : \chi \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, é definida como

$$f(\chi) \triangleq -\|T_{zw}(s, \chi)\|_\infty. \quad (13)$$

3 Algoritmo de Evolução Diferencial

O Algoritmo de Evolução Diferencial (DE, do inglês *Differential Evolution*)   um algoritmo de otimização evolucionário para solução de problemas com funções com domínio real (Storn and Price, 1997; Das and Suganthan, 2011). O algoritmo DE inclui operadores similares ao empregados por algoritmos evolucionários padrões: mutação, cruzamento ou recombinação e seleção.

Seja $\mathcal{U}_{(a,b)}$ um número real pseudo-aleatório com distribuição uniforme no intervalo (a, b) ; $\mathcal{I}_{(m)}$ um número inteiro pseudo-aleatório com distribuição uniforme no intervalo $[1, m]$; $\chi \in \mathbb{R}^\eta$ o vetor de variáveis de otimização; e N o número de indivíduos (soluções candidatas) da população, em geral $5\eta \leq N \leq 10\eta$. Defina a população na k -ésima iteração, $X_k = \{\chi_{k,i}; i = 1, \dots, N\}$, sendo a i -ésima solução:

$$\chi_{k,i} = \begin{bmatrix} \chi_{k,i,1} \\ \vdots \\ \chi_{k,i,\eta} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Os operadores do DE são descritos a seguir.

3.1 População Inicial

Nesse trabalho foi adotado que a população inicial é composta pelos vértices, três pontos determinísticos sobre cada aresta e η soluções distribuídas de forma aleatória também sobre as arestas do polit po Ω . Seja $I_i \in \mathbb{R}^\eta$ a i -ésima coluna da matriz identidade, a população inicial é criada pelo seguinte algoritmo:

```

para  $i \leftarrow 1$  até  $\eta$ 
   $\chi_{1,i} \leftarrow I_i$ 
fim para
 $i \leftarrow \eta$ 
para  $p \leftarrow 1$  até  $\eta - 1$ 
  para  $q \leftarrow p + 1$  até  $\eta$ 
     $\chi_{1,i+1} \leftarrow 0,25\chi_{1,p} + 0,75\chi_{1,q}$ 
     $\chi_{1,i+2} \leftarrow 0,5\chi_{1,p} + 0,5\chi_{1,q}$ 
     $\chi_{1,i+3} \leftarrow 0,75\chi_{1,p} + 0,25\chi_{1,q}$ 
     $i \leftarrow i + 3$ 
  fim para
fim para
para  $j \leftarrow 1$  até  $\eta$ 
   $r_1 \leftarrow \mathcal{I}_{(\eta)}$ 
  repita
     $r_2 \leftarrow \mathcal{I}_{(\eta)}$ 
  até  $r_1 \neq r_2$ 
     $\alpha \leftarrow \mathcal{U}_{(0,1)}$ 
     $i \leftarrow i + 1$ 
     $\chi_{1,i} \leftarrow \alpha\chi_{1,r_1} + (1 - \alpha)\chi_{1,r_2}$ 
  fim para

```

O tamanho total da população é dado por $N = \eta + 3\eta(\eta - 1)/2 + \eta$.

3.2 Mutação diferencial

Sejam os índices $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq r_4 \neq r_5 \neq i$ gerados como $r_j = \mathcal{I}_{(N)}$, $j = 1, \dots, 5$. Com bases em testes anteriores, testando as várias formas de implementação do operador de mutação, nesse trabalho a i -ésima solução mutante   obtida como sendo:

$$\mathbf{v}_{k,i} = \chi_{k,r_1} + F_{1,i}(\chi_{k,r_2} - \chi_{k,r_3}) + F_{2,i}(\chi_{k,r_4} - \chi_{k,r_5}), \quad (15)$$

$i = 1, \dots, N$. Nesse trabalho adotamos os fatores de escala aleatórios para cada mutação, sendo $F_{j,i} = \mathcal{U}_{(0,1)}$, $j = 1, 2$.

3.3 Cruzamento

O cruzamento é realizado entra a i -ésima solução da população atual, $\chi_{k,i}$, e da população mutante, $\mathbf{v}_{k,i}$, para gerar a i -ésima solução da população tentativa, $\mathbf{u}_{k,i}$:

$$u_{k,i,j} = \begin{cases} v_{k,i,j}, & \text{se } \mathcal{U}_{(0,1)} \leq C_r \text{ ou } j = \delta_i \\ \chi_{k,i,j}, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (16)$$

para $j = 1, \dots, \eta$, $i = 1, \dots, N$, sendo $C_r \in [0, 1]$ a taxa de cruzamento. Neste trabalho, foi adotado $C_r = 0,9$. O  ndice $\delta_i = \mathcal{I}_{(\eta)}$ garante que $\mathbf{u}_{k,i} \neq \chi_{k,i}$.

3.4 Tratamento das restrições

No problema (12), uma solução   factível se $\chi_{k,i} \in \Omega$, isto é, $\chi_{k,i,j} \geq 0$, $\forall j$, e $\sum_{j=1}^{\eta} \chi_{k,i,j} = 1$. Neste trabalho, optamos por forçar que toda solução atenda as restrições para evitar o uso de tratamento de restrição pelo método de penalidades. Para isso aplicamos as seguintes operações sobre as soluções tentativa obtidas pela operação de mutação e cruzamento:

$$\begin{aligned} u_{k,i,j} &= |u_{k,i,j}|, & j &= 1, \dots, \eta; \\ \mathbf{u}_{k,i} &= \mathbf{u}_{k,i} / \|\mathbf{u}_{k,i}\|_1, & i &= 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (17)$$

A primeira operação garante que $u_{k,i,j} > 0$ e a segunda que $\sum_{j=1}^{\eta} u_{k,i,j} = 1$.

3.5 Seleção

A operação de seleção determina qual solução, se o alvo, $\chi_{k,i}$, ou a tentativa, $\mathbf{u}_{k,i}$, sobrevive para próxima geração:

$$\chi_{k+1,i} = \begin{cases} \mathbf{u}_{k,i}, & \text{se } f(\mathbf{u}_{k,i}) \leq f(\chi_{k,i}) \\ \chi_{k,i}, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (18)$$

$i = 1, \dots, N$.

3.6 Critério de parada

Adotamos como critérios de parada um número máximo de gerações, N_g , ou a convergência da população comparando os valores máximos e mínimos de $f(\chi)$ da k -ésima população, $f_{\max}(\chi) - f_{\min}(\chi) \leq \epsilon$, $\chi \in \mathbf{X}_k$, sendo ϵ um número pequeno. Nesse trabalho adotamos $N_g = 200\eta$ e $\epsilon = 10^{-6}$. O algoritmo também é interrompido caso seja localizado um sistema instável. **NOTA 3.2:** Diferente da norma $\mathcal{H}_2$, a norma $\mathcal{H}_{\infty}$ requer a especificação de uma precisão de cáculo. Desse modo, a escolha de ϵ deve ser compatível com essa precisão.

3.7 Algoritmo de evolução diferencial

Dados o tamanho da população, N , a taxa de cruzamento, C_r , os valores limites dos fatores de escala, F_l e F_u , tal que $F_{j,i} = \mathcal{U}_{(F_l, F_u)}$, o número máximo de iterações, N_g , e o critério de parada, ϵ , o algoritmo de evolução diferencial pode ser formulado como:

```

 $k \leftarrow 1$ 
 $\mathbf{X}_k \leftarrow \text{Cria\_Popula  o\_Inicial}(N)$ 
 $\mathbf{F}_x \leftarrow f(\mathbf{X}_k)$ 
enquanto não critério de parada
   $\mathbf{V}_k \leftarrow \text{Muta  o\_Diferencial}$ 
   $\mathbf{U}_k \leftarrow \text{Cruzamento}$ 
   $\mathbf{U}_k \leftarrow \text{Tratamento\_Restri  es}$ 
   $\mathbf{F}_u \leftarrow f(\mathbf{U}_k)$ 
   $\mathbf{X}_{k+1} \leftarrow \text{Seleção}$ 
   $k \leftarrow k + 1$ 
fim enquanto

```

4 Testes exaustivos

Para avaliação do método de cáculo do custo $\mathcal{H}_{\infty}$ baseado no algoritmo DE, foram gerados 25 sistemas aleatórios para valores combinados de $n \in \{2, 4, 8\}$ e $\eta \in \{2, 4, 8\}$, totalizando 225 sistemas politópicos. As matrizes $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times n_w}$, $n_w = \mathcal{I}_{(n)}$ e $C_i \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$, $n_z = \mathcal{I}_{(n)}$, $i = 1, \dots, \eta$, foram criadas com elementos aleatórios, com distribuição Gaussiana, com média zero e desvio padrão unitário. Foi adotado $D = 0$ de dimensão compatível. Cada matriz A_i foi recalculada como:

$$A_i = A_i - (\sigma_{m,i} + \mathcal{U}_{(0,1)})I, \quad i = 1, \dots, \eta, \quad (19)$$

sendo $\sigma_{m,i}$ o valor máximo da parte real dos autovalores de A_i e I a matriz identidade de ordem compatível. Foi aplicado o método BB para análise de estabilidade robusta e cáculo do custo garantido $\mathcal{H}_{\infty}$. Sistemas não robustamente estáveis ou sistemas em que o máximo da norma $\mathcal{H}_{\infty}$ ocorre em um dos vértices do politopo foram descartados. O método DE foi executado 10 vezes para cada sistema politópico.

Tabela 1: Resultados do teste exaustivo

n, η	$P_s(\%)$	$E_m(\%)$	$T_{DE}(s)$	$T_{BB}(s)$
2,2	100	-	11,499	2,6390
2,4	97,6	0,9	217,11	23,924
2,8	93,2	46,6	1.981,7	2.367,9
4,2	100	-	13,826	5,4700
4,4	100	-	243,53	82,149
4,8	93,6	90,1	2.236,4	34.760,0
8,2	98,4	31,8	18,920	46,128
8,4	100	-	387,32	1.310,6
8,8	93,6	76,8	2.766,2	566.260,0

Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 1, sendo P_s o percentual de vezes em que o método DE obteve valor igual ou superior ao do limitante inferior do método BB, E_m o erro máximo percentual do método DE em relação ao limitante inferior do método BB, T_{DE} o tempo computacional total médio das 10 análises pelo método DE e T_{BB} o tempo computacional total da análise pelo método BB. Foi considerado que o método DE obteve sucesso se o valor máximo da norma $\mathcal{H}_\infty$ calculado é maior ou igual ao valor máximo de norma nos vértices dos politopos calculado pelo método BB (limitante inferior). Para valores menores de n e η , o método DE apresenta maior custo computacional mas essa situação muda com o aumento de n e de η . O método BB não obteve um limitante superior em 4 casos para $n = 4$ e $\eta = 8$ e 12 para $n = 8$ e $\eta = 8$, dentro do limite de 100 iterações, não convergindo com a precisão estabelecida. Devido a isso, em alguns casos o erro do método BB foi considerável. Para exemplificar, para um sistema politópico com $n = 4$ e $\eta = 8$, após 100 iterações e 5.572,6s de processamento, o método BB obteve o maior valor de norma igual a 80,094, ao passo que o método DE, com um tempo médio de processamento de 158,38s, obteve o valor máximo de norma de 932,98. Desse modo, ao limitar o número de iterações, ambos os métodos podem falhar.

Para ilustrar o funcionamento dos dois métodos, foram gerados sistemas com $n = 2$ e $\eta = 3$ e selecionado aquele com maior variação entre a norma sobre os vértices do politopo e o valor máximo obtido. Um politopo com η vértices corresponde a um simplex unitário no espaço de dimensão $d = \eta - 1$. A Fig. 1 apresenta a divisão do simplex com a localização do ponto de norma $\mathcal{H}_\infty$ máxima. O método BB divide o politopo com maior valor de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ até que a diferença entre o maior custo garantido e o maior valor de norma nos vértices seja menor que um valor especificado, no caso $\varepsilon = 0,01$. A Fig. 2 apresenta a população inicial do método DE, localizada sobre os vértices e arestas do politopo e a população final concentrada próxima do valor ótimo, projetadas no espaço $2d$. As operações do método DE fazem com que a população convirja para o ponto de ótimo. A Fig. 3 apresenta a superfície de $\|T_{zw}(s, \chi)\|_\infty$, onde pode ser observado que $f(\chi)$ é uma função multimodal com mínimos (máximos de norma) em diferentes regiões de Ω .

A razão para o aumento do custo computacional do método LMI/divisão é que, para o politopo cuja formulação LMI não é factível ou que corresponda ao

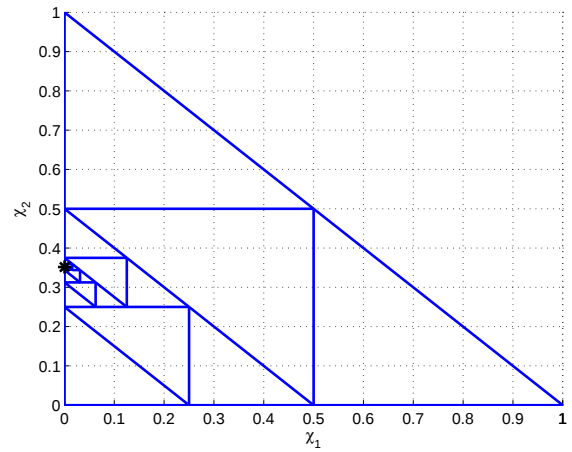


Figura 1: Divisão de simplex pelo método BB e máximo obtido 'x' para um modelo com $\eta = 3$.

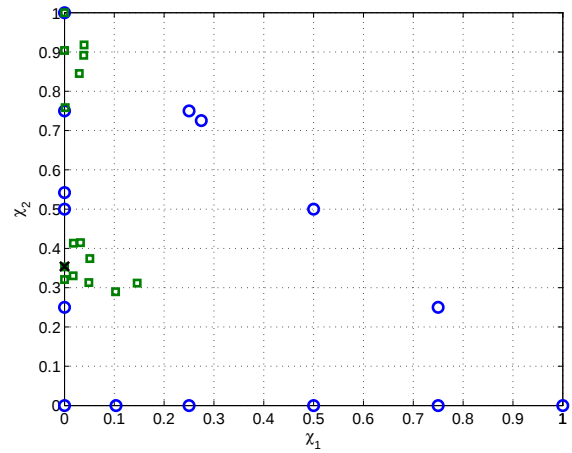


Figura 2: População inicial, 'o', após 10 iterações, '□', e final, 'x', do algoritmo DE para um modelo com $\eta = 3$.

pior caso de custo garantido, é necessário dividir o politopo em 2^d novos politopos, $d = \eta - 1$, e analisar cada um deles pela formulação LMI. Por exemplo, para $\eta = 8$, cada divisão resulta em $2^7 = 128$ novos politopos a serem analisados.

5 Conclusões

Foi proposto um novo método de análise de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas lineares invariantes no tempo, incertos, com modelo politópico baseado no algoritmo de evolução diferencial. Quando o custo computacional é aceitável, o método *Branch-and-bound*, que combina formulações LMI com divisão de politopo, é o mais indicado por ser uma técnica que calcula o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ de forma determinística, com a precisão desejada. No caso do método DE, como foi observado nos testes exaustivos, nem sempre o algoritmo de evolução converge para o máximo global. Apesar disso, o método DE obteve um percentual de sucesso de mais de 90% nos 2.250 testes realizados. Desse modo, quando o método BB se tornar proibitivo com-

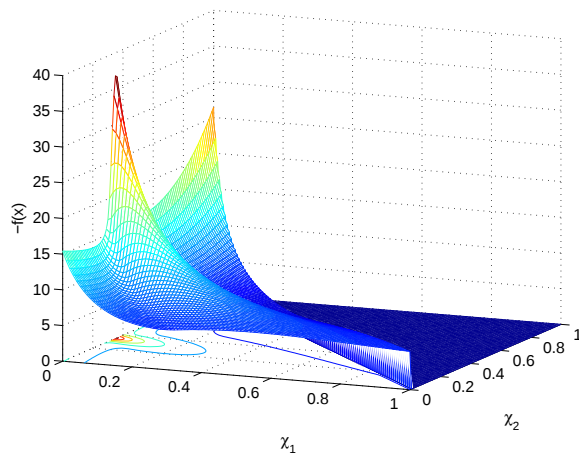


Figura 3: Superfície de $\|T_{zw}(s, \chi)\|_{\infty}$, em função de χ_1 e χ_2 , para um modelo com $\eta = 3$.

putacionalmente, o método DE   uma alternativa a ser considerada. Outra vantagem do método DE   a maior simplicidade de implementação em relação ao método BB. Além de mostrar a viabilidade do método DE para análise do custo garantido $\mathcal{H}_{\infty}$ de sistemas politópicos, outra contribuição desse estudo é apresentar uma implementação e uma configuração de parâmetros eficiente para aplicar o algoritmo DE nesse problema específico. A versão final apresentada foi obtida depois de vários testes com diferentes implementações e diferentes configurações de parâmetros, incluindo os teste realizados inicialmente para análise de estabilidade robusta. O método proposto pode ser facilmente adaptado para calculo de custo garantido $\mathcal{H}_2$ e para tratar sistemas discretos no tempo.

Agradecimentos

Os autores agradecem os apoios das agências CAPES, CNPq, [306005/2012-3] - Produtividade em Pesquisa - PQ - 2012, e FAPEMIG, [APQ-02943-15] - Edital 01/2015 - Demanda Universal.

Referências

- Apkarian, P., Tuan, H. D. and Bernussou, J. (2001). Continuous-time analysis, eigenstructure assignment and $\mathcal{H}_2$ synthesis with enhanced LMI characterizations, *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**(12): 1941–1946.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, PA.
- Chesi, G., Garulli, A., Tesi, A. and Vicino, A. (2005). Polynomially parameter-dependent Lyapunov functions for robust $\mathcal{H}_{\infty}$ performance analysis, in P. Horacek, M. Simandl and P. Zitek (eds), *Preprints of the 16th IFAC World Congress*, IFAC, Prague, Czech Republic.
- Das, S. and Suganthan, P. N. (2011). Differential evolution: A survey of the state-of-the-art, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* **15**(1): 4–31.

- de Oliveira, M. C., Geromel, J. C. and Bernussou, J. (2002). Extended $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_{\infty}$ norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems, *International Journal of Control* **75**(9): 666–679.
- de Oliveira, P. J., Oliveira, R. C. L. F., Leite, V. J. S., Montagner, V. F. and Peres, P. L. D. (2004a). $\mathcal{H}_2$ guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions, *International Journal of Systems Science* **35**(5): 305–315.
- de Oliveira, P. J., Oliveira, R. C. L. F., Leite, V. J. S., Montagner, V. F. and Peres, P. L. D. (2004b). $\mathcal{H}_{\infty}$ guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions, *Automatica* **40**: 1053–1061.
- Ebihara, Y. and Hagiwara, T. (2004). New dilated LMI characterizations for continuous-time multiobjective controller synthesis, *Automatica* **40**: 2003–2009.
- Gonçalves, E. N., Bachur, W. E. G., Palhares, R. M. and Takahashi, R. H. C. (2011). Robust $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_{\infty}$ /reference model dynamic output-feedback control synthesis, *International Journal of Control* **84**(12): 2067–2080.
- Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. and Takahashi, R. H. C. (2008). A novel approach for $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_{\infty}$ robust PID synthesis for uncertain systems, *Journal of Process Control* **18**(1): 19–26.
- Gonçalves, E. N., Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. and Mesquita, R. C. (2007). $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_{\infty}$ ϵ -guaranteed cost computation of uncertain linear systems, *IEEE Proceedings Control Theory & Applications* **1**(1): 201–209.
- He, Y., Wu, M. and She, J.-H. (2005). Improved bounded-real-lemma representation and $\mathcal{H}_{\infty}$ control of systems with polytopic uncertainties, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs* **52**(7): 380–383.
- Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D. (2005). $\mathcal{H}_{\infty}$ guaranteed cost computation via polynomially parameter-dependent Lyapunov functions, in P. Horacek, M. Simandl and P. Zitek (eds), *Preprints of the 16th IFAC World Congress*, IFAC, Prague, Czech Republic.
- Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. and Peres, P. L. D. (1997). $\mathcal{H}_{\infty}$ and $\mathcal{H}_2$ guaranteed costs computation for uncertain linear systems, *International Journal of Systems Science* **28**(2): 183–188.
- Storn, R. and Price, K. (1997). Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces, *Journal of Global Optimization* **11**(4): 341–359.
- Sturm, J. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software* **11–12**: 625–653. Version 1.05 available from <http://fewcal.kub.nl/sturm>.
- Trofino, A., Coutinho, D. F. and Barbosa, K. A. (2005). Improved $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_{\infty}$ conditions for robust analysis and control synthesis of linear systems, *Revista Controle & Automa  o* **16**(4): 427–434.